Учитывая это замечание, мы видим, что пятимерное подпространство операторов чисто второго порядка в $\mathcal{P}/\mathfrak{q}$ изоморфно факторпространству $\mathcal{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2+P_2^2\}$, т. е. мы можем отождествить операторы симметрии чисто второго порядка уравнения Гельмгольца с элементами чисто второго порядка в универсальной обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(2)$ по модулю центра этой обертывающей алгебры. Такая точка зрения будет использована при изучении орбит в разд. 1.2.

1.2. Разделение переменных для уравнения Гельмгольца

Метод разделения переменных для решения уравнений в частных производных, который легко продемонстрировать при решении некоторых важных задач, в общем виде оказывается весьма тонким, и описать его довольно трудно. Поэтому мы начнем с наиболее простых случаев, а затем постепенно перейдем к случаям, все более и более сложным.

Пока мы удовлетворимся несколько расплывчатым определением, утверждающим, что метод разделения переменных — это метод нахождения решений некоторого уравнения второго порядка в частных производных с n переменными, который состоит в сведении этого уравнения к некоторой системе из n (самое большее) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Будем искать решения уравнения (0.1) в виде $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда уравнение Гельмгольца примет вид

$$X''Y + XY'' + \omega^2 XY = 0, \tag{2.1}$$

где штрих означает дифференцирование. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \omega^2, \tag{2.2}$$

где левая часть — функция только от x, а правая — функция только от y. (Следовательно, в (2.2) декартовы координаты x, y разделяются.) Это возможно лишь в том случае, когда обе части нашего уравнения равны некоторой константе $-k^2$, называемой *константой разделения*. Таким образом, уравнение (2.2) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + (\omega^2 - k^2) Y(y) = 0. \tag{2.3}$$

Базисом решений первого уравнения (2.3) является $X_1 = e^{ikx}$, $X_2 = e^{-ikx}$ при $k \neq 0$, базисом решений второго уравнения яв-

ляется $Y_1 = \exp(i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y)$, $Y_2 = \exp(-i(\omega^2 - k^2)^{1/2}y)$, если $\omega^2 - k^2 \neq 0$. Итак, мы находим решения $\Psi(x, y)$ уравнения (0.1) в виде

$$\Psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j,\, l=1}^{2} A_{jl} X_j(x) Y_l(y), \tag{2.4}$$

где комплексные константы A_{jl} произвольны. Несмотря на то что Ψ_k — решения весьма частного вида уравнения (0.1), можно показать, что в сущности любое решение уравнения Гельмгольца можно представить в виде суммы или интеграла (по k) этих частных решений.

Заметим, что решение с разделенными переменными $\Psi_k = X_1 Y_1 = \exp\{i[kx + (\omega^2 - k^2]^{1/2}y]\}$ является общим собственным вектором коммутирующих операторов $P_1 = \partial_x$ и $P_2 = \partial_y$:

$$P_1\Psi_k = ik\Psi_k, \quad P_2\Psi_k = i(\omega^2 - k^2)^{1/2}\Psi_k; \tag{2.5}$$

подобное замечание можно сделать и относительно остальных решений с разделенными переменными $X_j Y_l$. Итак, мы можем охарактеризовать решения с разделенными переменными в декартовых координатах, указав, что они являются общими собственными функциями операторов симметрии $P_1, P_2 \in \mathscr{E}(2)$ в $\mathscr{F}_0$.

Чтобы рассмотреть следующий пример, перейдем к полярным координатам r, θ:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad 0 \leqslant r, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi \,(\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{2.6}$$

В этих координатах уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta} + \omega^2\right)\Psi(r, \theta) = 0. \tag{2.7}$$

Будем искать решения вида $\Psi = R(r)\Theta(\theta)$. Подставляя это выражение в (2.7) и перегруппировывая члены, получаем

$$(r^2R'' + rR' + r^2\omega^2)R^{-1} = -\Theta''\Theta^{-1}. \tag{2.8}$$

Поскольку правая часть соотношения (2.8) — функция только от θ, а левая — функция только от r, обе части этого соотношения должны быть равны некоторой константе k^2. Следовательно, уравнение (2.8) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\Theta''(\theta) + k^2\Theta(\theta) = 0, \quad r^2R''(r) + rR'(r) + (r^2\omega^2 - k^2)\,R = 0. \tag{2.9}$$

Первое уравнение имеет решения $\Theta = e^{\pm ik\theta}$, а второе, уравнение Бесселя, — решения $R = J_{\pm k}(\omega r)$, где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя (см. формулу (Б.14)). Заметим, что решение с разделенными переменными $\Psi_k = J_k(\omega r)e^{ik\theta}$ является собственным вектором оператора $M \in \mathscr{E}(2)$. Действительно, в полярных координатах

$M = -\partial_\theta$, и, следовательно, $\Psi_k \in \mathscr{F}_0$ есть решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее также соотношению

$$M\Psi_k = -ik\Psi_k. \tag{2.10}$$

Подобные замечания справедливы также и для остальных решений с разделенными переменными в полярных координатах.

В каждом из рассмотренных нами примеров мы видели, что решения с разделенными переменными характеризовались как собственные функции некоторого элемента алгебры симметрии $\mathscr{E}(2)$ с константой разделения k, играющей роль собственного значения.

Пусть дан произвольный оператор L в $\mathscr{E}(2)$; можно ли найти систему координат $\{u, v\}$, допускающую разделение переменных в уравнении Гельмгольца, т. е. такую, что решения с разделенными переменными являются собственными функциями оператора L? Проводимое ниже рассуждение показывает, что это возможно. Если L — ненулевой оператор вида

$$L = A(\mathbf{x})\,\partial_x + B(\mathbf{x})\,\partial_y, \qquad A,\ B \in \mathscr{F},$$

то в окрестности некоторой фиксированной точки $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ всегда можно найти такие новые координаты u, v, что $L = \partial_u$. Непосредственное введение (неединственных) координат u, v см. в [1] либо в [142]. (Здесь и далее при анализе координат мы требуем, чтобы новые координаты $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ были вещественными аналитическими функциями от x и y, причем обратные функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ также являются вещественными и аналитическими. Новая система координат может быть определена только в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0$ и не обязательно должна покрывать всю плоскость (x, y).)

Представляя оператор Лапласа Δ_2 в координатах u, v, находим, что

$$Q = \Delta_2 + \omega^2 = B_{11}\partial_{uu} + B_{12}\partial_{uv} + B_{22}\partial_{vv} + C_1\partial_u + C_2\partial_v + \omega^2, \tag{2.11}$$

где функции B_{ij}, C_j аналитичны в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Допустим, что L — оператор симметрии, т. е. $L \in \mathscr{E}(2)$; тогда $[L, Q] = 0$. Подставляя в это выражение $L = \partial_u$ и правую часть (2.11) вместо Q и вычисляя коммутатор, находим, что функции B_{ij}, C_j не зависят от u. Уравнение $Q\Psi = 0$ будет иметь решения с разделенными переменными вида $\Psi_k = e^{iku}V(v)$, где V удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$B_{22}V'' + (ikB_{12} + C_2)\,V' + (-k^2B_{11} + ikC_1 + \omega^2)\,V = 0. \tag{2.12}$$

Решения Ψ_k характеризуются уравнением на собственные значения

$$L\Psi_k = ik\Psi_k. \tag{2.13}$$

Таким образом, мы нашли решения с разделенными переменными уравнения (0.1), удовлетворяющие соотношению (2.13), и добились разделения переменных в том смысле, что множители каждого решения с разделенными переменными удовлетворяют некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению.

Следует заметить, что для каждого $g \in E(2)$ функция $\mathbf{T}(g)\Psi_k$, где $\mathbf{T}(g)$ задается соотношением (1.16), является решением уравнения Гельмгольца, которое также удовлетворяет уравнению на собственные значения

$$L^g(\mathbf{T}(g)\Psi_k) = ik\mathbf{T}(g)\Psi_k, \tag{2.14}$$

если Ψ_k удовлетворяет (2.13). Здесь

$$L^g = \mathbf{T}(g)L\mathbf{T}(g^{-1}) \tag{2.15}$$

— оператор симметрии, поскольку он является произведением трех операторов, коммутирующих с Q. Кроме того, L^g — дифференциальный оператор первого порядка. В самом деле, если

$$L = A(\mathbf{x})\partial_x + B(\mathbf{x})\partial_y, \tag{2.16а}$$

то прямым вычислением получаем

$$L^g = A(\mathbf{x}')\partial_{x'} + B(\mathbf{x}')\partial_{y'}, \tag{2.16б}$$

где $(x', y') = \mathbf{x}' = \mathbf{x}g$. (При помощи цепного правила L^g можно представить в исходных переменных x, y.) Итак, $L^g \in \mathscr{E}(2)$. Если Ψ_k — решение с разделенными переменными в системе координат $\mathbf{u} = (u, v)$, то $\mathbf{T}(g)\Psi_k$ будет решением с разделенными переменными в системе координат $\mathbf{u}' = \mathbf{u}g$, получающейся в результате евклидова преобразования координат в плоскости (x, y). Поскольку допускающие разделение переменных координаты $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ могут быть отображены друг в друга преобразованием из группы симметрии $E(2)$, мы считаем эти системы координат *эквивалентными*. Заметим также, что координаты и собственные функции, соответствующие оператору L, тождественны координатам и собственным функциям, соответствующим оператору cL, где c — ненулевая вещественная константа. Таким образом, оператор $L \in \mathscr{E}(2)$ и все операторы cL_g, $g \in E(2)$, приводят к эквивалентным координатам, допускающим разделение переменных.

Действие $L \to L^g$ группы $E(2)$ на $\mathscr{E}(2)$, являющееся *сопряженным представлением*, разбивает $\mathscr{E}(2)$ на *орбиты* одномерных подпространств. Мы говорим, что $K \in \mathscr{E}(2)$ лежит на той же орбите, что и L, если $K = cL^g$ для некоторого ненулевого $c \in R$ и некоторого $g \in E(2)$. (Заметим, что $L^{gg'} = (L^{g'})^g$.)

Для того чтобы при помощи формул (2.12), (2.13) найти все возможные неэквивалентные системы координат, допускающие

разделение переменных, и соответствующие решения с разделенными переменными, мы должны, руководствуясь приведенными выше замечаниями, разбить алгебру $\mathscr{E}(2)$ на орбиты действием группы симметрии $E(2)$. Анализ получаемых орбит выполняется в явном виде при помощи формул (2.16). Другим полезным выражением является

$$\exp(aK)\,L\exp(-aK)=L+a[K,\,L]+\frac{a^2}{2}[K,\,[K,\,L]]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a^n}{n!}[K,\,[\ldots,\,[K,\,L]]\ldots]+\ldots=e^{a\,\mathrm{Ad}\,K}(L), \qquad (2.17)$$

где K — производная Ли на алгебре симметрии $\mathscr{E}(2)$, $a\in R$, а $\mathrm{Ad}\,K$ — линейный оператор на $\mathscr{E}(2)$, определяемый соотношением $\mathrm{Ad}\,K(L)=(K,L)$. Доказательство см. в [134].

Теперь определим сопряженное действие группы симметрии $E(2)$ на базис P_1, P_2, M алгебры $\mathscr{E}(2)$. Если $g_1=\exp(aP_1)$ (перенос), мы имеем

$$P_1^{g_1}=P_1,\quad P_2^{g_1}=P_2,\quad M^{g_1}=M-aP_2; \qquad (2.18)$$

если $g_2=\exp(bP_2)$ (перенос), мы имеем

$$P_1^{g_2}=P_1,\quad P_2^{g_2}=P_2,\quad M^{g_2}=M+bP_1; \qquad (2.19)$$

если $g_3=\exp(\alpha M)$ (поворот), мы имеем

$$P_1^{g_3}=\cos(\alpha)\,P_1+\sin(\alpha)\,P_2,$$

$$P_2^{g_3}=-\sin(\alpha)\,P_1+\cos(\alpha)\,P_2,\quad M^{g_3}=M \qquad (2.20)$$

Пусть

$$L=c_1P_1+c_2P_2+c_3M\in\mathscr{E}(2), \qquad (2.21)$$

и пусть $c_3\neq 0$. Тогда из (2.18) и (2.19) следует, что $L^{g_1g_2}=c_3M$, если a и b выбираются так, что $a=c_2/c_3$, $b=-c_1/c_3$. Следовательно, L лежит на той же орбите, что и M. С другой стороны, если $c_3=0$ и $c_1^2+c_2^2>0$, то легко видеть, что g_3 можно выбрать так, что $L^{g_3}=(c_1^2+c_2^2)^{1/2}P_2$. Следовательно, L будет лежать на той же орбите, что и P_2.

В заключение заметим, что при сопряженном действии группы симметрии $E(2)$ на $\mathscr{E}(2)$ имеются только две орбиты, а именно орбиты, содержащие операторы

$$M,\quad P_2 \qquad (2.22)$$

соответственно. Ненулевой оператор $L\in\mathscr{E}(2)$, определяемый формулой (2.21), лежит либо на первой, либо на второй орбите в зависимости от того, какое из соотношений $c_3\neq 0$ или $c_3=0$ имеет место. Таким образом, при помощи формул (2.12), (2.13)

для уравнения Гельмгольца можно получить только две системы координат, допускающие разделение переменных, а именно полярную и декартову системы координат. Эти системы называются *координатами подгрупп*, так как они соответствуют диагонализации образующих для подгруппы поворота и подгруппы переноса группы симметрии $E(2)$.

А теперь найдем в явном виде системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2)\Psi = 0, \tag{2.23}$$

и покажем, что, кроме систем координат, называемых координатами подгрупп, существуют и другие системы. Пусть $\{u, v\}$ — некоторая система координат, допускающая разделение переменных. Тогда $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$; следовательно, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и якобиан $J = v_x u_y - u_x v_y = (y_u x_v - x_u y_v)^{-1}$ отличен от нуля. Записывая (2.23) в системе $\{u, v\}$, получаем

$$\{(u_x^2 + u_y^2)\partial_{uu} + (u_{xx} + u_{yy})\partial_u + 2(u_x v_x + u_y v_y)\partial_{uv} + \\ + (v_x^2 + v_y^2)\partial_{vv} + (v_{xx} + v_{yy})\partial_v + \omega^2\}\Psi = 0. \tag{2.24}$$

Теперь требуется выполнить разделение переменных в уравнении (2.24) в системе координат $\{u, v\}$. Необходимо рассмотреть два случая в зависимости от того, будет ли коэффициент при ∂_{uv} равен нулю или нет.

Случай I. $u_x v_x + u_y v_y = 0$

Взаимозаменяя по мере необходимости u и v и используя тот факт, что $J \neq 0$, будем полагать, что существует ненулевая функция $\mathcal{R}$, такая, что $v_y = \mathcal{R} u_x$, $v_x = -\mathcal{R} u_y$. Поскольку в (2.24) входит член ω^2, для разделения переменных необходимо, чтобы

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{\mathcal{U}(u)}{\mathcal{U}_1(u) + \mathcal{V}_1(v)}, \qquad v_x^2 + v_y^2 = \frac{\mathcal{V}(v)}{\mathcal{U}_1(u) + \mathcal{V}_1(v)}, \tag{2.25}$$

где $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1 + \mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}$ —ненулевые функции. Кроме того, поскольку $v_x^2 + v_y^2 = \mathcal{R}^2(u_x^2 + u_y^2)$, мы имеем $\mathcal{R}^2 = \mathcal{V}/\mathcal{U}$, т. е. $\mathcal{R}$ — отношение функции от u к функции от v.

Предположим, что $\tilde{u} = \tilde{u}(u)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(v)$ — вещественные аналитические функции от u и v соответственно, причем $d\tilde{u}/du \neq 0$, $d\tilde{v}/dv \neq 0$. Тогда $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ будет определять некоторую систему координат, которую мы по вполне понятным причинам считаем эквивалентной первоначальной системе $\{u, v\}$. Если в (2.24) выбрать координаты $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ так, чтобы

$$d\tilde{u}/du = \mathcal{U}^{-1/2}, \quad d\tilde{v}/dv = \mathcal{V}^{-1/2},$$

то соотношения (2.25) будут выполняться для системы координат $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ в плоскости $\{u, v\}$, причем в числителях справа мы будем иметь $\tilde{\mathcal{U}} = 1$, $\tilde{\mathcal{V}} = 1$ соответственно. Следовательно, можно без потери общности опустить знаки тильды и полагать, что координаты $\{u, v\}$ удовлетворяют (2.25), причем $\mathcal{U}(u) \equiv \mathcal{V}(v) \equiv 1$. Поэтому можно положить $\mathcal{R} \equiv 1$; тогда

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{2.26}$$

и функции u, v удовлетворяют уравнениям Коши — Римана [2]. Это означает, что если комплексные переменные z, w определить соотношениями

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \tag{2.27}$$

то $w = f(z)$, где f — комплексная аналитическая функция. Более того, соотношения (2.25) принимают вид $|dw/dz|^2 = (\mathcal{U}_1(u) + \mathcal{V}_1(u))^{-1}$, или

$$|dz/dw|^2 = \mathcal{U}_1(u) + \mathcal{V}_1(v), \tag{2.28}$$

или, наконец,

$$\partial_{uv}(|dz/dw|^2) = 0. \tag{2.29}$$

Воспользуемся соображениями, приведенными в [99]. Запишем уравнение (2.29) не в переменных u, v, а в переменных w и $\bar{w} = u - iv$. Используя тот факт, что $\partial_{uv} = i\partial_{ww} - i\partial_{\bar{w}\bar{w}}$ и $|dz/dw|^2 = (dz/dw)(d\bar{z}/d\bar{w})$, где первый множитель — функция только от w, а второй — функция только от $\bar{w}$, находим, что

$$\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right)\frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{dz}{dw}\right) = \left(\frac{dz}{dw}\right)\frac{d^2}{d\bar{w}^2}\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)^{-1}\frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{dz}{dw}\right) = \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right)^{-1}\frac{d^2}{d\bar{w}^2}\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right),$$

где левая часть зависит только от w, а правая — только от $\bar{w}$. Следовательно, существует некоторая комплексная константа λ, такая, что

$$\frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{dz}{dw}\right) = \lambda\frac{dz}{dw}, \quad \frac{d^2}{d\bar{w}^2}\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}\right) = \lambda\frac{d\bar{z}}{d\bar{w}}. \tag{2.30}$$

Решения этих дифференциальных уравнений третьего порядка дают в случае I те системы координат, в которых уравнение Гельмгольца имеет решения с разделенными переменными.

Прежде чем решать эти уравнения, рассмотрим

Случай II. $u_x v_x + u_y v_y \neq 0$

Единственный способ разделения переменных в этом случае состоит в том, что мы должны потребовать (выполняя, если

необходимо, замену одной из переменных, скажем u, на функцию от нее самой), чтобы все коэффициенты при частных производных ∂_{uu}, ∂_u, ∂_{uv}, ∂_{vv}, ∂_v в (2.24) были функциями только от v. Тогда, подставляя в (2.24) $\Psi(u, v) = e^{iku}\Phi(v)$, мы видим, что члены, зависящие от u, выносятся за скобки, а в скобках остается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от k) для функции Φ. Ясно, что оператор ∂_u является оператором симметрии для уравнения Гельмгольца, и, следовательно, мы пришли к способу разделения переменных, описанному в (2.12) и (2.13). Как мы видели раньше, по модулю группы движений в евклидовой плоскости можно взять либо $\partial_u = P_2$, либо $\partial_u = M$, где P_2 и M заданы равенствами (1.7).

В первом случае мы имеем систему координат $\{u, v\}$, связанную с системой координат $\{x, y\}$ соотношением

$$\partial_y = u_y\partial_u + v_y\partial_v = \partial_u.$$

Таким образом, $u_y = 1$, $v_y = 0$ и $v(x, y)$ зависит только от x. Заменяя (в случае необходимости) v новой переменной $\tilde{v}(v)$, можно положить $v = x$. Интегрируя уравнение $u_y = 1$, мы получаем явные выражения для координат u, v:

$$u = y + h(x), \quad v = x, \tag{2.31}$$

в которых переменные в (2.24) разделяются; для выполнения условия случая II необходимо потребовать, чтобы $h'(x) \neq 0$. Заметим, что эти координаты неортогональны, т. е. кривые $u = \text{const}$ не ортогональны кривым $v = \text{const}$ в смысле обычного евклидова скалярного произведения. Строя решения с разделенными переменными уравнения (0.1), соответствующие системе координат (2.31), читатель может легко проверить, что отличие между этими решениями и решениями в декартовых координатах незначительно.

Аналогичным образом, если $\partial_u = M$, то система координат, допускающая разделение переменных, имеет вид

$$u = \theta + h(r), \quad v = r, \quad h'(r) \neq 0, \tag{2.32}$$

где r, θ — полярные координаты. В этом случае координаты также неортогональны и лишь слегка отличаются от решений с разделенными переменными в полярных координатах.

Заметим, что в случае II имеется бесконечное множество систем координат, допускающих разделение переменных и соответствующих единственному оператору симметрии L, но все эти системы по существу идентичны. Некоторые авторы не считают эти системы по-настоящему допускающими разделение переменных и сохраняют термин «допускающие разделение переменных» для систем координат случая I. Однако

с теоретико-групповой точки зрения я не вижу никаких причин, по которым такие системы следовало бы исключить из семейства систем координат, допускающих решения с разделенными переменными, хотя они могут и не представлять никакого интереса.

Прежде чем возвратиться к подробному исследованию систем координат для случая I, следует заметить, что все эти системы ортогональны. В самом деле, как читатель может легко проверить, ортогональность следует сразу же из соотношения $u_x v_x + u_y v_y = 0$.

Решим уравнения (2.30) для частного случая, когда $\lambda = 0$. Решение для dz/dw имеет вид

$$dz/dw = \beta + \gamma w, \qquad \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}. \tag{2.33}$$

Если $\gamma = 0$, $\beta = c + id$, находим, что $z = \beta w + \alpha$, или

$$x = a + cu - dv, \quad y = b + du + cv, \quad \alpha = a + ib, \tag{2.34}$$

где $a, b, c, d \in R$. Легко видеть, что координаты u, v получаются из декартовых координат при помощи евклидовой группы движений и растяжения $x, y \to (c^2 + d^2)^{1/2} x$, $(c^2 + d^2)^{1/2} y$. Поскольку мы не различаем системы координат $\{u, v\}$ и $\{h(u), k(v)\}$ и поскольку системы, получаемые одна из другой при помощи евклидовой группы движений, мы считаем эквивалентными, можно видеть, что все системы, определенные в (2.34), эквивалентны декартовой системе координат.

Если в (2.33) $\gamma \neq 0$, то мы имеем решение

$$z = (\gamma/2)\, w^2 + \beta w + \alpha, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}.$$

Так же как и в предыдущем случае, выбирая подходящие коэффициенты растяжения и преобразования евклидовой группы, можно показать, что эта система эквивалентна системе, для которой $\gamma = 1$, $\beta = \alpha = 0$; следовательно,

$$x = {}^1/_2 (u^2 - v^2), \quad y = uv. \tag{2.35}$$

Координаты u, v называются *параболическими*, так как координатные линии $u = [(x^2 + y^2)^{1/2} + x]^{1/2} = \text{const}$ и $v = \pm [(x^2 + y^2)^{1/2} - x]^{1/2} = \text{const}$ образуют два ортогональных семейства софокусных парабол. (По условию u может принимать только положительные значения, а v может быть как положительным, так и отрицательным. Поскольку обратная функция $w = (2z)^{1/2}$ неоднозначно определена на всей плоскости (x, y), мы делаем разрез по отрицательной части оси x (см. [99]).)

Подставляя выражения (2.35) в (2.24), мы получаем уравнение

$$\partial_{uu}\Psi + \partial_{vv}\Psi + (u^2 + v^2)\,\omega^2 \Psi = 0, \tag{2.36}$$

в котором переменные, очевидно, разделяются. Действительно, полагая $\Psi = U(u)V(v)$, мы находим, что

$$U'' + (\omega^2 u^2 - k^2)U = 0, \quad V'' + (\omega^2 v^2 + k^2)V = 0, \tag{2.37}$$

где k^2 — константа разделения. Оба уравнения (2.37) являются слегка видоизмененными формами уравнения параболического цилиндра, а решения с разделяющимися переменными Ψ_k являются произведениями функций параболического цилиндра (см. приложение В).

Умножая первое уравнение (2.37) на v^2V, а второе на u^2U и вычитая затем второе уравнение из первого, мы получаем следующее уравнение на собственные значения:

$$(u^2 + v^2)^{-1}(v^2\partial_{uu} - u^2\partial_{vv})\Psi_k = k^2\Psi_k.$$

Обозначим через S оператор в левой части этого выражения; решения Ψ_k уравнения Гельмгольца отображаются оператором S в другие решения, а именно в $k^2\Psi_k$. Поэтому можно предполагать, что $S \in \mathcal{S}/\mathfrak{q}$, т. е. S — оператор симметрии второго порядка. В самом деле, прямое вычисление дает

$$\{M, P_2\}\Psi_k = k^2\Psi_k, \tag{2.38}$$

откуда $S = \{M, P_2\}$. Итак, мы охарактеризовали решения с разделяющимися переменными в параболических координатах как собственные функции оператора симметрии $\{M, P_2\}$. Константа разделения k^2 является собственным значением этого оператора. Подобным образом решения с разделяющимися переменными в декартовых координатах суть собственные функции оператора симметрии P_2^2.

Теперь найдем решения уравнений (2.30), когда $\lambda \neq 0$. Поскольку первое из этих уравнений является комплексным сопряжением второго, λ — вещественная величина. Больше того, выполняя, если необходимо, растяжение координат, можно положить $\lambda = 1$. Решение для dz/dw имеет вид

$$dz/dw = \alpha e^{w} - \beta e^{-w}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

следовательно,

$$z = \alpha e^{w} + \beta e^{-w} + \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{C}. \tag{2.39}$$

Осуществляя (в случае необходимости) перенос и поворот координат в плоскости (x, y), можно положить $\gamma = 0$ и $\alpha \geqslant 0$. Если $\beta = 0$, $\alpha > 0$, мы полагаем $r = \alpha e^{u}$, $\theta = v$, с тем чтобы получить *полярную* систему координат

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{2.40}$$

(Ясно, что если координаты $\{u, v\}$ допускают решения уравнения Гельмгольца с разделяющимися переменными, то координаты $\{r, \theta\}$ также допускают такие решения.)

Если $\alpha\beta \neq 0$, то нашу систему координат можно повернуть в плоскости (x, y), с тем чтобы имело место неравенство $\alpha\beta > 0$. Таким образом,

$$2\alpha = \exp(a - b + i\varphi), \qquad 2\beta = \exp(a + b - i\varphi),$$

и, полагая $d = e^a$, $\xi = u - b$, $\eta = v + \varphi$, мы получаем допускающие решения с разделяющимися переменными *эллиптические* координаты $\{\xi, \eta\}$:

$$x = d \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = d \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \tag{2.41}$$

(Можно было бы положительную константу d положить равной 1, но мы сохраняем величину d такой, чтобы она отвечала принятому выше условию.) Координатные линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ описываются уравнениями

$$\frac{x^2}{d^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{y^2}{d^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \quad \frac{x^2}{d^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{d^2 \sin^2 \eta} = 1$$

и являются софокусными эллипсами и гиперболами соответственно с фокусами в точках $(x, y) = (\pm d, 0)$. Позволяя ξ, η меняться в интервале $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant \eta < 2\pi$, мы можем получить любую точку в плоскости (x, y). Подставляя выражения (2.41) в (2.24), получаем

$$\partial_{\xi\xi}\Psi + \partial_{\eta\eta}\Psi + d^2\omega^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\Psi = 0. \tag{2.42}$$

Полагая далее $\Psi = U(\xi) V(\eta)$, находим уравнения, имеющие решения с разделенными переменными:

$$U'' + (d^2\omega^2 \operatorname{ch}^2 \xi + k^2) U = 0, \quad V'' - (d^2\omega^2 \cos^2 \eta + k^2) V = 0; \tag{2.43}$$

здесь k^2 — константа разделения. Эти уравнения являются вариантами уравнения Матье, а решения с разделенными переменными суть произведения функций Матье (см. приложение Б).

Умножая первое уравнение (2.43) на $V \cos^2 \eta$, а второе на $U \operatorname{ch}^2 \xi$ и складывая результаты, получаем следующее уравнение на собственные значения:

$$(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^{-1} (\cos^2 \eta \partial_{\xi\xi} + \operatorname{ch}^2 \xi \partial_{\eta\eta}) \Psi_k = k^2 \Psi_k,$$

где $\Psi_k = UV$. По аналогии с соответствующими результатами для декартовых и параболических координат можно предположить, что оператор S в левой части этого уравнения принадлежит $\mathscr{P}/\mathfrak{q}$. Прямое (но довольно утомительное) вычисление дает результат

$$(M^2 + d^2 P_1^2) \Psi_k = k^2 \Psi_k, \tag{2.44}$$

подтверждающий наше предположение. Итак, решения с разделенными переменными в эллиптических координатах являются собственными функциями оператора симметрии $M^2+d^2P_1^2$ (или $M^2-d^2P_2^2$), а константа разделения k^2 представляет собой соответствующее собственное значение. Подобным, но более простым вычислением можно показать, что решения с разделенными переменными в полярных координатах являются собственными функциями оператора симметрии M^2.

Итак, мы связали каждую из четырех ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца, с оператором симметрии второго порядка. Кроме того, мы увидели, что под действием $E(2)$ системы, допускающие разделение переменных, распадаются на классы эквивалентности. Действительно, если Ψ_k — решение с разделенными переменными в переменных $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, то $\mathbf{T}(g)\Psi_k$ — решение с разделенными переменными в переменных $\mathbf{u}'=\mathbf{u}g$, получаемых в результате преобразования координат при помощи евклидовой группы. Мы считаем системы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ эквивалентными. Рассмотрим эквивалентность на уровне операторов. Предположим, что $S\in\mathcal{P}/\mathfrak{q}$ — оператор симметрии второго порядка, связанный с координатами $\mathbf{u}$, $S\Psi_k=k^2\Psi_k$. Тогда $S^g=\mathbf{T}(g)S\mathbf{T}(g)^{-1}$ — соответствующий оператор, связанный с решением $\Psi_k^g=\mathbf{T}(g)\Psi_k$. Действительно, $S^g\Psi_k^g=k^2\Psi_k^g$. Более того, легко показать, что S^g представляет собой оператор симметрии второго порядка. Так, если $S=L_1L_2$, где L_j — операторы симметрии первого порядка, то $S^g=L_1^gL_2^g$, где L_j^g определено в (2.15).

Поскольку $S^{gg'}=(S^{g'})^g$, $g, g'\in E(2)$, действие $E(2)$ на $\mathcal{P}$, называемое *сопряженным представлением*, приводит к разбиению $\mathcal{P}$ на орбиты одномерных подпространств. Мы говорим, что S лежит на той же орбите, что и S', если $S=c(S')^g$ для некоторого ненулевого $c\in R$ и некоторого $g\in E(2)$. Далее, оператор $P_1^2+P_2^2$ коммутирует со всеми элементами $\mathcal{E}(2)$, а следовательно, и со всеми операторами $\mathbf{T}(g)$. Таким образом, оператор $R(\mathbf{x})(P_1^2+P_2^2)=W\in\mathfrak{q}$ удовлетворяет условию $W^g=R(\mathbf{x}g)(P_1^2+P_2^2)\in\mathfrak{q}$ для $R\in\mathcal{F}$. Этим показано, что действие $E(2)$ на пространстве $\mathcal{P}/\mathfrak{q}$ определяется сопряженным представлением, в результате чего это пространство разбивается на орбиты.

Пусть $\mathcal{P}^{(2)}$ — пространство элементов чисто второго порядка в $\mathcal{P}/\mathfrak{q}$, т. е. пятимерное векторное пространство симметричных операторов второго порядка с базисом (1.22б). (Мы можем включить в это пространство также оператор P_2^2 при условии, что имеет место тождество $P_2^2\equiv-P_1^2$, так как $P_1^2+P_2^2$

соответствует нулевому оператору в $\mathscr{P}^{(2)}/\mathfrak{q}$.) На основании сказанного выше мы видим, что $E(2)$ действует на пространстве $\mathscr{P}^{(2)}$ при помощи сопряженного представления и в результате этого действия $\mathscr{P}^{(2)}$ разбивается на орбиты одномерных подпространств. Поскольку $\{L_1, L_2\}^g = \{L_1^g, L_2^g\}$, симметричные операторы второго порядка отображаются в симметричные операторы второго порядка.

Мы уже видели, что каждая из четырех ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных для уравнения Гельмгольца, связана с оператором симметрии S вида

$$S = aP_1^2 + bP_1P_2 + cP_2^2 + dM^2 + e\{M, P_1\} + f(M, P_2),$$
$$a, \ldots, f \in R,$$

а следовательно, и с $\hat{S} \in \mathscr{P}^{(2)}$, где

$$\hat{S} = (a-c)P_1^2 + bP_1P_2 + dM^2 + e\{M, P_1\} + f\{M, P_2\}. \quad (2.45)$$

Если одна из систем координат $\{u, v\}$ подвергается евклидову преобразованию g, то она преобразуется в другую (эквивалентную) ортогональную систему координат, допускающую разделение переменных и связанную с оператором симметрии S^g. Далее, если две системы координат связаны с операторами S и S' соответственно, где $\hat{S} = (\hat{S})'$, то возникающая при разделении координат собственная функция Ψ_k, $S\Psi_k = k^2\Psi_k$, оператора S удовлетворяет соотношению $S'\Psi_k = [k^2 + (a-a')\omega^2]\Psi_k$. (Замечание: $(P_1^2 + P_2^2)\Psi_k = -\omega^2\Psi_k$.) Таким образом, операторы S и S' имеют одни и те же собственные функции, но спектр оператора S' получается сдвигом спектра оператора S на фиксированное расстояние $(a-a')\omega^2$. Ясно, что системы координат, допускающие разделение переменных для S и S', эквивалентны. Из этих замечаний и вычислений, выполненных нами ранее, видно, что каждая ортогональная система координат, допускающая разделение переменных, должна быть связана с одномерным подпространством операторов $\{c\hat{S}\}$ в $\mathscr{P}^{(2)}$ (поскольку $c\hat{S}$ и $\hat{S}$ при $c \neq 0$, $c \in R$ соответствуют одним и тем же координатам). Множество всех систем координат, получаемых из заданной системы координат в результате действия группы $E(2)$, должно быть ассоциировано с некоторой орбитой в $\mathscr{P}^{(2)}$.

Сделанные выше замечания подводят нас к задаче определения структуры орбит пространства $\mathscr{P}^{(2)}$. Предположим, что операторы симметрии первого порядка L_1, L_2, L_3 образуют базис в $\mathscr{E}(2)$. Для каждого $g \in E(2)$ можно найти (3×3)-матрицу G, такую, что

$$L_j^g = \sum_{k=1}^{3} G_{kj}L_k, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\{L_{j_1}, L_{j_2}\}^g = \{L_{j_1}^g, L_{j_2}^g\} = \sum_{k_1, k_2=1}^{3} G_{k_1 j_1} G_{k_2 j_2} \{L_{k_1}, L_{k_2}\} \qquad (2.47)$$

является элементом множества $\mathscr{S}$. (Заметим, что $L_j^2 = {}^1/_2\{L_j, L_j\}$.) Теперь, используя (2.46) и (2.18)—(2.20), можно найти по одному представителю для каждой орбиты множества $\mathscr{S}^{(2)}$.

Любой оператор $\hat{S} \in \mathscr{S}^{(2)}$ можно единственным образом представить в виде (2.45), принимая $c = 0$. Предположим, что $d \neq 0$. Применяя переносы (2.18) и (2.19), можно $\hat{S}$ преобразовать к виду

$$a'P_1^2 + b'P_1P_2 + c'P_2^2 + dM^2,$$

т. е. можно выбрать эти переносы так, что коэффициенты при $\{M, P_1\}$ и $\{M, P_2\}$ обратятся в нуль. Далее, применяя соответствующий поворот (2.20), можно диагонализировать квадратичную форму P_jP_k, с тем чтобы получить

$$a''P_1^2 + c''P_2^2 + dM^2 \equiv (a'' - c'')P_1^2 + dM^2.$$

Возможны два случая: если $a'' = c''$, то $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и M^2; если же $a'' \neq c''$, то $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и $M^2 + r^2P_1^2$, $r > 0$.

Теперь предположим, что $d = 0$, а $e^2 + f^2 > 0$. Применяя подходящий поворот (2.20), можно допустить, что $e = 0$, $f \neq 0$. Выбирая затем надлежащие переносы (2.18) и (2.19), можно преобразовать $\hat{S}$ к виду $c\{M, P_2\}$. Таким образом, $\hat{S}$ будет находиться на той же орбите, что и $\{M, P_2\}$.

Предположим, наконец, что $d = e = f = 0$, $a^2 + b^2 > 0$. Тогда, выполнив соответствующий поворот, можно диагонализировать квадратичную форму $aP_1^2 + bP_1P_2$, с тем чтобы получить для $\hat{S}$ выражение

$$a'P_1^2 + b'P_2^2 \equiv (a' - b')P_1^2,$$

откуда следует, что $\hat{S}$ находится на той же орбите, что и P_1^2 (или P_2^2).

Мы показали, что $\mathscr{S}^2$ содержит точно четыре орбиты с представителями

$$M^2, \quad M^2 + r^2P_1^2, \quad \{M, P_2\}, \quad P_1^2. \qquad (2.48)$$

Следовательно, между ортогональными системами координат, позволяющими получить решения с разделенными переменными для уравнения Гельмгольца, и орбитами в $\mathscr{S}^{(2)}$ существует взаимно однозначное соответствие (см. табл. 1).

Таблица 1

ОПЕРАТОРЫ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$

	Оператор S	Система координат	Решения с разделенными переменными
1	P_2^2	Декартова $x,\ y$	Произведение экспоненциальных функций
2	M^2	Полярная $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
3	$\{M, P_2\}$	Параболическая $x = {}^1/_2(\xi^2 - \eta^2),\ y = \xi\eta$	Произведение функций параболического цилиндра
4	$M^2 + d^2P_1^2$	Эллиптическая $x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$ $y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta$	Произведение функций Матье

1.3. Формулы разложения, связывающие решения с разделенными переменными

Теперь покажем, как можно использовать связь между решениями с разделенными переменными уравнения Гельмгольца и орбитами операторов симметрии для установления свойств решений с разделенными переменными. В этом методе используется преобразование Фурье, чтобы установить структуру гильбертова пространства на пространстве решений уравнения Гельмгольца.

Пусть $\Psi(x, y)$ — решение уравнения $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$, и пусть

$$\Psi(x,\ y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(\omega_1 x_1 + \omega_2 y)\right] \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

где $\tilde{h}$ — преобразование Фурье функции Ψ. Поступая формально, имеем

$$(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = \iint (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \exp\left[i(\omega_1 x + \omega_2 y)\right] \times$$
$$\times\, \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 = 0$$

при условии, что $\tilde{h}(\omega_1, \omega_2) = \omega^{-1}\delta(\omega - s)h(\varphi)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, s и φ — полярные координаты в плоскости (ω_1, ω_2), причем $\omega_1 = s\cos\varphi$, $\omega_2 = s\sin\varphi$, и $d\omega_1 d\omega_2 = s\,ds\,d\varphi$.