Таблица 1

ОПЕРАТОРЫ И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$

	Оператор S	Система координат	Решения с разделенными переменными
1	P_2^2	Декартова $x,\ y$	Произведение экспоненциальных функций
2	M^2	Полярная $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
3	$\{M, P_2\}$	Параболическая $x = {}^1/_2(\xi^2 - \eta^2),\ y = \xi\eta$	Произведение функций параболического цилиндра
4	$M^2 + d^2P_1^2$	Эллиптическая $x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta,$ $y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta$	Произведение функций Матье

1.3. Формулы разложения, связывающие решения с разделенными переменными

Теперь покажем, как можно использовать связь между решениями с разделенными переменными уравнения Гельмгольца и орбитами операторов симметрии для установления свойств решений с разделенными переменными. В этом методе используется преобразование Фурье, чтобы установить структуру гильбертова пространства на пространстве решений уравнения Гельмгольца.

Пусть $\Psi(x, y)$ — решение уравнения $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$, и пусть

$$\Psi(x,\ y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(\omega_1 x_1 + \omega_2 y)\right] \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

где $\tilde{h}$ — преобразование Фурье функции Ψ. Поступая формально, имеем

$$(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = \iint (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) \exp\left[i(\omega_1 x + \omega_2 y)\right] \times$$
$$\times\, \tilde{h}(\omega_1,\ \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2 = 0$$

при условии, что $\tilde{h}(\omega_1, \omega_2) = \omega^{-1}\delta(\omega - s)h(\varphi)$, где $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака, s и φ — полярные координаты в плоскости (ω_1, ω_2), причем $\omega_1 = s\cos\varphi$, $\omega_2 = s\sin\varphi$, и $d\omega_1 d\omega_2 = s\,ds\,d\varphi$.

Интегрируя по s, находим

$$\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]\, h(\varphi)\, d\varphi = I(h). \qquad (3.1)$$

Элементы $g(\theta, a, b)$ группы $E(2)$ действуют на решения Ψ уравнения Гельмгольца посредством операторов $\mathbf{T}(g)$, определяемых выражениями (1.11) и (1.16). Используя (3.1), получаем

$$\mathbf{T}(g)\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos(\varphi+\theta) + y\sin(\varphi+\theta) + a\cos\varphi + b\sin\varphi)]\, h(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)]\, \mathbf{T}(g)\, h(\varphi)\, d\varphi,$$

где

$$\mathbf{T}(g)\, h(\varphi) = \exp[i\omega(a\cos(\varphi-\theta) + b\sin(\varphi-\theta))]\, h(\varphi-\theta). \qquad (3.2)$$

(Чтобы интегрирование в (3.1) выполнялось по единичной окружности, должно выполняться равенство $h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi)$.)

Итак, операторы $\mathbf{T}(g)$, действуя на Ψ, индуцируют операторы (которые мы также обозначаем через $\mathbf{T}(g)$), действующие на h и определяемые в (3.2). Легко видеть, что для операторов (3.2) выполняется свойство гомоморфизма $\mathbf{T}(g_1 g_2) = \mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)$.

Теперь рассмотрим функции h как элементы гильбертова пространства $L_2(S_1)$ функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на единичной окружности S_1: $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$ (т. е. $s = 1$, $-\pi \leqslant \varphi < \pi \pmod{2\pi}$). Таким образом, мы рассмотрим пространство всех измеримых функций h, таких, что $\int_{-\pi}^{\pi} |h(\varphi)|^2\, d\varphi < \infty$. (Читатели, не знакомые с интегрированием по Лебегу, могут в нашем дальнейшем анализе заменить интеграл Лебега интегралом Римана. Практически такая замена почти не влияет на процесс интегрирования.) На $L_2(S^1)$ определено скалярное произведение

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\varphi)\, \bar{h}_2(\varphi)\, d\varphi, \qquad h_j \in L_2(S_1). \qquad (3.3)$$

(Детальный анализ концепций гильбертова пространства см. в [68] и [113].)

Любую функцию $h \in L_2(S_1)$ можно продолжить до некоторой функции, определяемой на вещественной прямой наложением условия периодичности $h(\varphi) = h(\varphi + 2\pi)$. Принимая это условие, мы видим, что операторы $\mathbf{T}(g)$, задаваемые (3.2), корректно определены на $L_2(S_1)$ и отображают это гильбертово пространство в себя. Простое вычисление дает

$$\langle \mathbf{T}(g) h_1, \mathbf{T}(g) h_2 \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle$$

для всех $h_j \in L_2(S_1)$, т. е. операторы $\mathbf{T}(g)$ *унитарны.* (Унитарные операторы в гильбертовом пространстве рассматриваются в [113].) Итак, мы построили унитарное представление (ω) группы $E(2)$ в $L_2(S_1)$, отмеченное положительной константой ω. В [37] и [78] показано, что это представление неприводимо: нет такого собственного подпространства пространства $L_2(S_1)$, которое было бы инвариантно для всех операторов $\mathbf{T}(g)$. Этот факт нас здесь не интересует.

Поступая подобно тому, как в (3.1), (3.2), и интегрируя по частям, можно вычислить на $L_2(S_1)$ алгебру Ли операторов P_1, P_2, M, индуцированную операторами P_1, P_2, M (см. (1.7)), действующими на решения уравнения Гельмгольца. В результате имеем

$$P_1 = i\omega \cos\varphi, \quad P_2 = i\omega \sin\varphi, \quad M = -d/d\varphi. \tag{3.4}$$

Ясно, что эти операторы удовлетворяют соотношениям коммутирования (1.8) и образуют базис алгебры $\mathscr{E}(2)$. В строгом соответствии с (1.16) эти операторы новой алгебры Ли связаны с операторами $\mathbf{T}(g)$ (см. (3.2)) соотношением

$$\mathbf{T}(g) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2).$$

Поскольку операторы $\mathbf{T}(g)$ унитарны, операторы новой алгебры Ли являются косоэрмитовыми, т. е.

$$\langle Lh_1, h_2 \rangle = -\langle h_1, Lh_2 \rangle, \qquad h_j \in L_2(S_1), \tag{3.5}$$

для $L = c_1P_1 + cP_2 + c_3M$, $c_k \in R$, что можно легко проверить. Область определения оператора L должна быть точно установлена. Операторы P_j имеют смысл, если они применяются к любой функции $h \in L_2(S_1)$, оператор же M имеет смысл только в том случае, когда он применяется к некоторой дифференцируемой функции. Для ясности определим все операторы L нашей алгебры Ли на подпространстве $\mathscr{D}$ пространства $L_2(S_1)$, состоящем из всех бесконечно дифференцируемых функций $h(\varphi)$, обращающихся в нуль в окрестности $-\pi$ и π. Для $h_j \in \mathscr{D}$ соотношение (3.5) легко проверить.

Теперь рассмотрим пространство $\mathscr{H}$, состоящее из решений уравнения Гельмгольца Ψ, определяемых формулой (3.1): $\Psi =$

$= I(h)$ для некоторого $h \in L_2(S_1)$. Пространство $\mathscr{H}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \quad \Psi_j = I(h_j). \tag{3.6}$$

Заметим, что каждую функцию $\Psi(x, y)$ в $\mathscr{H}$ можно представить в виде скалярного произведения

$$\begin{gathered} \Psi(x, y) = I(h) = \langle h, H(x, y, \cdot) \rangle, \\ H(x, y, \varphi) = \exp[-i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)] \in L_2(S_1). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Можно проверить, что нет такой отличной от нуля функции $h \in L_2(S_1)$ (отличие от нуля означает, что $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle > 0$), которая обладала бы тем свойством, что $\Psi = I(h)$ является тождественно нулевым решением уравнения Гельмгольца. Таким образом, различные функции h_1 и h_2 в $L_2(S_1)$ определяют различные решения Ψ_1 и Ψ_2 уравнения Гельмгольца. Следовательно, наше формальное введение структуры гильбертова пространства в $\mathscr{H}$ при помощи определения (3.6) корректно. Далее, операторы $\mathbf{T}(g)$ на $\mathscr{H}$, определенные в (1.16), унитарны, а операторы (1.7) алгебры Ли на пространстве $\mathscr{H}$ косоэрмитовы.

И наконец, линейное преобразование I является взаимно однозначным отображением $L_2(S_1)$ на $\mathscr{H}$, сохраняющим скалярное произведение, т. е. I — *унитарное преобразование* из $L_2(S_1)$ на $\mathscr{H}$. Существование этого обратимого отображения дает нам возможность перейти от задач в пространстве $\mathscr{H}$ к задачам в пространстве $L_2(S_1)$. Мы показали, в частности, что представление группы симметрии $E(2)$ в $\mathscr{H}$, определяемое операторами (1.16), является унитарно эквивалентным посредством I унитарному представлению $E(2)$ в $L_2(S_1)$, определенному операторами (3.2). Поскольку второе гильбертово пространство со многих точек зрения значительно проще первого, этот факт будет очень полезен в наших дальнейших вычислениях.

Мы уже показали, что решения уравнения Гельмгольца с разделенными переменными, соответствующие ортогональной системе координат $\{u, v\}$, являются собственными функциями некоторого оператора $S \in \mathscr{P}^{(2)}$, причем S — симметрический многочлен второго порядка от элементов алгебры $\mathscr{E}(2)$. Очевидно, что оператор S можно определить на области $D = I(\mathscr{D})$ в пространстве $\mathscr{H}$ или как эквивалентный оператор на области $\mathscr{D}$ в пространстве $L_2(S_1)$. Более того, S в области определения является симметрическим оператором. (Напомним, что некоторый оператор A, определенный на плотной области D гильбертова пространства $\mathscr{H}$, называется *симметрическим*, если $(A\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, A\Psi_2)$ для всех $\Psi_1, \Psi_2 \in D$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathscr{H}$.) В самом деле, если $S = \{L_1, L_2\} =$

$= L_1L_2 + L_2L_1$, $L_j \in \mathscr{E}(2)$, то, поскольку L_j косоэрмитовы и отображают D в себя, мы имеем

$$(S\Psi_1, \Psi_2) = (L_1L_2\Psi_1, \Psi_2) + (L_2L_1\Psi_1, \Psi_2) = \\ = -(L_2\Psi_1, L_1\Psi_2) - (L_1\Psi_1, L_2\Psi_2) = (\Psi_1, S\Psi_2).$$

Следовательно, каждый оператор S, характеризующий систему координат, допускающую разделение переменных, можно определить как симметрический оператор на D.

Симметрические операторы обладают целым рядом приятных свойств, из которых далеко не последнее место занимает тот факт, что их собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, а их собственные значения вещественны. Так, если $S\Psi_j = \lambda_j\Psi_j$, $j = 1, 2$, где Ψ_j — отличные от нуля элементы области D и $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то

$$\lambda_1(\Psi_1, \Psi_2) = (S\Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, S\Psi_2) = \bar{\lambda}_2(\Psi_1, \Psi_2). \tag{3.8}$$

Полагая $\Psi_1 = \Psi_2$ и сравнивая левую и правую части соотношения (3.8), мы видим, что $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ и поэтому λ_1 (а следовательно, и λ_2) — вещественная величина. Далее, если $\Psi_1 \neq \Psi_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то сравнение правой и левой частей соотношения (3.8) дает $(\Psi_1, \Psi_2) = 0$, т. е. Ψ_1 *ортогонально* Ψ_2.

Из сказанного выше и известного процесса ортогонализации Грама — Шмидта вытекает, что S имеет счетное множество взаимно ортогональных собственных векторов $\{\Psi_j\}$, причем каждый собственный вектор можно нормировать таким образом, что он будет иметь единичную длину: $(\Psi_j, \Psi_j) = 1$, $S\Psi_j = \lambda_j\Psi_j$, $(\Psi_j, \Psi_l) = 0$ для $j \neq l$.

Теперь предположим, что $\Psi \in \mathscr{H}$ можно представить в виде бесконечной линейной комбинации нашей ортогональной последовательности собственных векторов:

$$\Psi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\Psi_j, \qquad a_j \in \mathbb{C}. \tag{3.9}$$

Используя соотношения ортонормальности $(\Psi_j, \Psi_l) = \delta_{jl}$, получаем равенство Парсеваля

$$(\Psi, \Psi) = \sum_{j,\, l=0}^{\infty} a_j\bar{a}_l(\Psi_j, \Psi_l) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\bar{a}_j. \tag{3.10}$$

Коэффициенты a_j определяются однозначно:

$$(\Psi, \Psi_l) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\Psi_j, \Psi_l) = a_l. \tag{3.11}$$

Теперь возникает вопрос, является ли ортонормальное[1]) мно-

[1]) В дальнейшем будет применяться сокращение о. н.

жество $\{\Psi_i\}$ о. н. *базисом* в $\mathscr{H}$, т. е. можно ли представить произвольный элемент $\Psi \in \mathscr{H}$ в виде суммы (3.9). Вообще говоря, это сделать нельзя, поскольку область D обычно слишком ограничена, чтобы обеспечить достаточное количество собственных векторов Ψ_i, необходимое для образования базиса. Однако существует хорошо разработанная теория расширений симметрических операторов, дающая возможность в значительной степени преодолеть эту трудность. (Симметрический оператор S' называется *расширением* оператора S, если область, на которой определен оператор S', строго содержит область, на которой определен оператор S, и оба оператора совпадают на общей области определения.) Мы не собираемся здесь входить в детали этой теории; она излагается во многих учебниках (см., например, [48, 113]).

Один из основных выводов этой теории состоит в том, что многие симметрические операторы (имеющие равные индексы дефекта) можно расширить до особых симметрических операторов, называемых *самосопряженными* (не единственным образом, если только индексы дефекта не равны (0, 0)), которые обладают тем свойством, что их собственные функции образуют базис в $\mathscr{H}$. Но за это свойство приходится расплачиваться, а именно мы должны рассматривать не только собственные векторы самосопряженного расширения, но и обобщенные собственные векторы. (Ниже мы приведем несколько примеров обобщенных собственных векторов.)

Бóльшую часть симметрических операторов, рассматриваемых в настоящей книге при описании процесса разделения переменных, можно расширить до самосопряженных операторов при помощи классических приемов. Для небольшого числа операторов, которые не поддаются расширению при помощи классических приемов, можно все-таки найти базисы собственных функций, но процесс нахождения базисов оказывается не стандартным и не единственным.

Установим связь между упомянутой выше теорией и разделением переменных чисто формально. Пусть S — симметрический оператор в D, соответствующий системе координат, допускающей разделение переменных для уравнения Гельмгольца. Мы скоро увидим, что любой такой оператор можно расширить до самосопряженного оператора S', определенного в области $D' \supseteq D$. Таким образом, каждое решение уравнения Гельмгольца $\Psi \in \mathscr{H}$ можно единственным образом разложить по собственным функциям оператора S'. Но собственные функции оператора S' — обязательно решения уравнения Гельмгольца с разделяющимися переменными в системе координат, соответствующей оператору S. Собственные значения оператора S' являются просто значениями константы разделения.

Использование технических возможностей нашего гильбертова пространства позволяет нам выполнять разложение произвольного решения уравнения Гельмгольца по элементам собственного базиса, составленного из решений с разделяющимися переменными. В действительности же все вычисления, необходимые для получения этих разложений, будут выполняться не в $\mathscr{H}$, а в более подходящем пространстве $L_2(S_1)$.

А теперь найдем спектральное разложение для каждого из четырех операторов S, перечисленных в табл. 1.

Орбита 2. $S = M^2$

Чтобы найти спектральное разложение для M^2, достаточно найти разложение для iM, $i = \sqrt{-1}$, и возвести в квадрат полученные собственные значения. (Заметим, что оператор iM — симметрический в области $\mathscr{D}$, поскольку оператор M косоэрмитов.) Оператор M на $L_2(S_1)$ имеет вид $M = -d/d\varphi$, и, следовательно, уравнение на собственные значения $iMf_\lambda = \lambda f_\lambda$ принимает вид

$$-i\frac{df_\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \lambda f_\lambda(\varphi). \tag{3.12}$$

Для $f_\lambda \in \mathscr{D}$ это уравнение не имеет решений, отличных от нуля. Если же iM расширен на область $\mathscr{D}'$, состоящую из всех функций $f \in L_2(S_1)$, первые производные которых существуют и являются непрерывными на S_1, то легко проверить, что iM является симметрическим на $\mathscr{D}'$ и имеет нормированные собственные функции $\{f_n^{(2)}(\varphi)\}$:

$$f_n^{(2)}(\varphi) = e^{in\varphi}/(2\pi)^{1/2}, \quad iMf_n^{(2)} = nf_n^{(2)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.13}$$

(Заметим, что для $f \in \mathscr{D}'$ имеет место условие периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$, откуда вытекает, что решения $f_\lambda(\varphi) = ce^{i\lambda\varphi}$ уравнения (3.12) принадлежат области $\mathscr{D}'$ тогда и только тогда, когда $\lambda = n$.) Легко проверить, что

$$\langle f_n^{(2)}, f_m^{(2)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\varphi}\,d\varphi = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \tag{3.14}$$

Из теории рядов Фурье известно, что множество $\{f_n^{(2)}\}$ является фактически о. н. базисом для пространства $L_2(S_1)$ [103]. Таким образом, любую функцию $f \in L_2(S_1)$ можно однозначно представить в виде

$$f(\varphi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n^{(2)}(\varphi), \quad c_n = \langle f, f_n^{(2)}\rangle, \tag{3.15}$$

где $\sim$ означает, что сумма сходится к f в смысле сходимости в гильбертовом пространстве

$$\lim_{m\to\infty}\left\langle f-\sum_{n=-m}^{m} c_n f_n^{(2)},\ f-\sum_{n=-m}^{m} c_n f_n^{(2)}\right\rangle=0$$

и необязательно сходится поточечно.

(В действительности iM не является самосопряженным на $\mathscr{D}'$, но легко показать, что дальнейшее расширение iM на область, где он будет самосопряженным, не дает новых собственных значений и собственных векторов. В дальнейшем мы будем сразу давать базис собственных функций, не всегда касаясь вопросов, связанных с областью определения оператора.)

Оператор $iM'=i(y\partial_x-x\partial_y)$ в $\mathscr{H}$, соответствующий оператору $iM=-id/d\varphi$ в $L_2(S_1)$, определен соотношением $M'=IMI^{-1}$, где унитарное преобразование I задано в (3.1). Следовательно, iM' унитарно эквивалентен iM, и поэтому iM' имеет тот же спектр, что и iM, а о. н. базис $\{f_n^{(2)}\}$ собственных функций оператора iM отображается посредством унитарного преобразования I в о. н. базис $\{\Psi_n^{(2)}\}$:

$$\Psi_n^{(2)}=I\left(f_n^{(2)}\right),\qquad n=0,\ \pm1,\ \ldots, \tag{3.16}$$

собственных функций оператора iM'. Таким образом, переходя к полярным координатам, получаем

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=I\left[\exp(in\varphi)/(2\pi)^{1/2}\right]=$$
$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[i\omega r\cos(\varphi-\theta)\right]\exp(in\varphi)\,d\varphi. \tag{3.17}$$

Замена переменных $\alpha=\varphi-\theta$ дает

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=\exp(in\theta)\,R_n(r),$$
$$R_n(r)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\omega r\cos\alpha)\exp(in\alpha)\,d\alpha. \tag{3.18}$$

Хотя интеграл, входящий в $R_n(r)$, известен, мы проанализируем процесс его вычисления с самого начала, с тем чтобы продемонстрировать связь между теорией Ли и разделением переменных. Поскольку $\Psi_n^{(2)}$ — собственная функция оператора iM', отвечающая собственному значению n, то $\Psi_n^{(2)}$ — решение с разделенными переменными в полярных координатах и $R_n(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (2.9) при $k=n$. Так как $R_n(0)$ конечно, $R_n(r)=c_nJ_n(\omega r)$, где c_n — постоянная величина (см.

приложение Б, разд. 5). Чтобы вычислить c_n, воспользуемся тем фактом, что коэффициент при r^n в разложении (Б.14) для $J_n(\omega r)$ имеет вид $(\omega/2)^n/n!$. Разлагая $\exp(i\omega r\cos\alpha)$ в степенной ряд по r, мы видим, что коэффициент при r^n в интегральном выражении (3.18) для $R_n(r)$ имеет вид

$$\frac{(i\omega)^n}{(2\pi)^{1/2}\,n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^n\alpha\exp(in\alpha)\,d\alpha=\frac{(2\pi)^{1/2}}{n!}\left(\frac{i\omega}{2}\right)^n.$$

(Это легко получается из соотношения $\cos\alpha=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})/2$ и соотношений ортогональности (3.14).) Таким образом,

$$\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)=i^n(2\pi)^{1/2}J_n(\omega r)\exp(in\theta). \tag{3.19}$$

Следует также заметить, что $\Psi_{-n}^{(2)}$, согласно (3.17), является n-м коэффициентом разложения Фурье функции

$$\exp[i\omega r\cos(\varphi-\theta)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi_n^{(2)}(r,\ \theta)\,\bar f_n^{(2)}(\varphi)=$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(\omega r)\exp[in(\theta-\varphi)]. \tag{3.20}$$

Орбита 1. $S=P_2^2$

Здесь так же, как и в предыдущем случае, достаточно найти спектральное разложение для симметрического оператора iP_2. Оператор $iP_2=-\omega\sin\varphi$ определен и является самосопряженным во всем гильбертовом пространстве $L_2(S_1)$. Ясно, что iP_2 не имеет ни собственных значений, ни собственных функций в обычном смысле, так как если $iP_2f=\lambda f$, то $f(\varphi)=0$, за исключением самое большее двух значений φ_1,φ_2, где $\lambda=-\omega\sin\varphi_j$. Следовательно, $\langle f,\ f\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}|f(\varphi)|^2d\varphi=0$, и f не является собственной функцией. Но тем не менее iP_2 имеет обобщенные собственные функции $f_\alpha^{(1)}(\varphi)=\delta(\varphi-\alpha)$, $-\pi\leqslant\alpha<\pi$, где $\delta(\varphi-\alpha)=\delta_\alpha(\varphi)$ — *дельта-функция Дирака* (совсем и не функция), формально определяемая соотношением

$$\langle h,\ \delta_\alpha\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\,\delta(\varphi-\alpha)\,d\varphi=h(\alpha), \tag{3.21}$$

причем h — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, принадлежащая $L_2(S_1)$. (Точные определения обобщенных

собственных функций и анализ их связи со спектральной теорией см. в [42, 98].) Итак, мы имеем формальные соотношения

$$iP_2 f_\alpha^{(1)} = -\omega \sin \alpha f_\alpha^{(1)}, \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi,$$
$$\langle f_\alpha^{(1)}, f_{\alpha'}^{(1)} \rangle = \delta(\alpha - \alpha'). \tag{3.22}$$

Когда α пробегает полуинтервал $[-\pi, \pi)$, обобщенные собственные значения пробегают полуинтервал $(-\omega, \omega]$, покрывая дважды почти каждую точку. Мы говорим, что спектр оператора iP_2 непрерывен и покрывает полуинтервал $(-\omega, \omega]$ *с кратностью*, равной двум. Разложение произвольной функции $h \in L_2(S_1)$ по собственному базису $\{f_\alpha^{(1)}\}$ представляется интегралом

$$h = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha f_\alpha^{(1)} d\alpha, \quad c_\alpha = \langle h, f_\alpha^{(1)} \rangle = h(\alpha). \tag{3.23}$$

Равенство Парсеваля принимает вид

$$\langle h, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \bar{c}_\alpha \, d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} |h(\alpha)|^2 d\alpha.$$

(Тривиальность этих формул объясняется тем, что оператор iP_2 получен нами в таком виде, что его спектральное разложение очевидно.)

Соответствующий оператор iP_2 в $\mathscr{H}$ определяется соотношением $iP_2 = i\partial_y$ и унитарно эквивалентен оператору (3.22) в $L_2(S_1)$. Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Psi_\alpha^{(1)}\}$ имеет следующий вид:

$$\Psi_\alpha^{(1)}(x, y) = I(f_\alpha^{(1)}) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \delta(\varphi - \alpha) d\varphi =$$
$$= \exp[i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi. \tag{3.24}$$

Унитарная эквивалентность дает следующие соотношения:

$$iP_2 \Psi_\alpha^{(1)} = -\omega \sin \alpha \Psi_\alpha^{(1)}, \quad (\Psi_\alpha^{(1)}, \Psi_{\alpha'}^{(1)}) = \delta(\alpha - \alpha'), \tag{3.25}$$

а теорема разложения,

$$\Psi(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \Psi_\alpha^{(1)}(x, y) d\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} c_\alpha \exp[i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] d\alpha,$$
$$c_\alpha(\Psi, \Psi_\alpha^{(1)}) = \langle h, f_\alpha^{(1)} \rangle = h(\alpha), \tag{3.26}$$

где $\Psi \in \mathscr{H}$ соответствует функции $h \in L_2(S_1)$, сводится к формуле (3.1).

Орбита 3. $S = \{M, P_2\}$

Здесь оператор $\{M, P_2\} = -2i\omega \sin\varphi (d/d\varphi) - i\omega\cos\varphi$ определен на множестве бесконечно дифференцируемых функций из $L_2(S_1)$, обращающихся в нуль в окрестности $\varphi = 0$, $-\pi$ и π. Легко проверить, что оператор S в этой области симметрический (и самосопряженный). Чтобы найти его самосопряженное расширение, определим унитарное отображение $\mathbf{U}$ из $L_2(S_1)$ в $L_2(R) \oplus L_2(R)$ следующим соотношением:

$$\mathbf{U}f(\nu) = \mathbf{F}(\nu) = \begin{pmatrix} F_+(\nu) \\ F_-(\nu) \end{pmatrix} = |\sin\varphi|^{1/2} \begin{pmatrix} f_+(\cos\varphi) \\ f_-(\cos\varphi) \end{pmatrix}, \quad \cos\varphi = \operatorname{th}\nu. \quad (3.27)$$

Таким образом, каждая функция $f \in L_2(S_1)$ ассоциируется с двумерным вектором-столбцом с компонентами $F_\pm(\nu) = |\sin\varphi|^{1/2} f_\pm(\cos\varphi) \in L_2(R)$. В данном случае

$$f_-(\cos\varphi) = f(\varphi), \qquad -\pi \leqslant \varphi < 0,$$
$$f_+(\cos\varphi) = f(\varphi), \qquad 0 < \varphi \leqslant \pi,$$

и $L_2(R)$ — гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на вещественной прямой R, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 dx < \infty$, со скалярным произведением $\langle F, G\rangle' = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\bar{G}(x)\,dx$. (Мы рассматриваем только те функции, которые в окрестности $\varphi = 0$ обращаются в нуль, так как коэффициент при производной в выражении для S при $\varphi = 0$ обращается в нуль, т. е. S в $\varphi = 0$ имеет особую точку.)

Введем

$$\mathscr{L} = L_2(R) \oplus L_2(R)$$

— гильбертово пространство векторнозначных функций $\mathbf{F}(\nu)$, интегрируемых с квадратом по Лебегу,

$$\mathbf{F}(\nu): \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|F_+(\nu)|^2 + |F_-(\nu)|^2)\,d\nu < \infty;$$

при этом скалярное произведение определяется соотношением

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G}\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_+(\nu)\bar{G}_+(\nu) + F_-(\nu)\bar{G}_-(\nu))\,d\nu, \qquad \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \mathscr{L}.$$

Легко проверить, что если $\mathbf{F}_j = \mathbf{U}f_j$, то

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\rangle;$$

следовательно, $\mathbf{U}$ — несомненно унитарное преобразование из $L_2(S_1)$ в $\mathscr{L}$. Оператор $\mathbf{U}S\mathbf{U}^{-1}$ в $\mathscr{L}$, который мы также обозначим через S, принимает вид $S\mathbf{F}(\nu) = 2i\omega(d/d\nu)\mathbf{F}(\nu)$. (Теперь становится ясно, что, согласно квантовой теории, S унитарно эквивалентен двум экземплярам оператора импульса.) Чтобы сделать очевидным вычисление спектра оператора S, применим векторное преобразование Фурье

$$\mathscr{F}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathscr{F}_+(\lambda) \\ \mathscr{F}_-(\lambda) \end{pmatrix} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\nu) e^{i\nu\lambda} d\nu; \tag{3.28}$$

обратное преобразование дается формулой

$$\mathbf{F}(\nu) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(\lambda) e^{-i\nu\lambda} d\lambda. \tag{3.29}$$

(О преобразовании Фурье см. [113].) Тогда, вводя скалярное произведение

$$(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F}_+(\lambda)\overline{\mathscr{G}}_+(\lambda) + \mathscr{F}_-(\lambda)\overline{\mathscr{G}}_-(\lambda))\, d\lambda, \tag{3.30}$$

мы получаем гильбертово пространство $\mathscr{L}'$ векторнозначных функций $\mathscr{F}$, таких, что

$$(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \langle f, g \rangle,$$

и S в $\mathscr{L}'$ принимает вид

$$S(\mathscr{F}(\lambda) = 2\lambda\omega\mathscr{F}(\lambda).$$

В заключение следует сказать, что оператор $S = \{M, P_2\}$ можно расширить до однозначно определенного самосопряженного оператора с непрерывным спектром, двукратно покрывающим вещественную ось. Обобщенные собственные функции оператора S в $\mathscr{L}'$ имеют вид

$$\mathscr{F}_\mu^+(\lambda) = \begin{pmatrix} \delta(\lambda - \mu) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{F}_\mu^-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(\lambda - \mu) \end{pmatrix}.$$

Переходя обратно в $L_2(S_1)$, мы получаем обобщенные собственные функции

$$f_{\mu+}^{(3)}(\varphi) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}(1 + \cos\varphi)^{-i\mu/2-1/4}(1 - \cos\varphi)^{i\mu/2-1/4}, & 0 < \varphi \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi \leqslant \varphi < 0, \end{cases}$$

$$f_{\mu-}^{(3)}(\varphi) = f_{\mu+}^{(3)}(-\varphi), \quad \{M, P_2\} f_{\mu\pm}^{(3)} = 2\mu\omega f_{\mu\pm}^{(3)}, \quad -\infty < \mu < \infty,$$

$$\langle f_{\mu\pm}^{(3)}, f_{\mu'\pm}^{(3)} \rangle = \delta(\mu - \mu'), \quad \langle f_{\mu\pm}^{(3)}, f_{\mu'\mp}^{(3)} \rangle = 0. \tag{3.31}$$

Решение уравнения Гельмгольца, соответствующее $f^{(3)}_{\mu+}$, имеет вид

$$\Psi^{(3)}_{\mu+}(x, y) = I\left(f^{(3)}_{\mu+}\right) = \int_0^{\pi} \exp\left[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right] f^{(3)}_{\mu+}(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{i\mu-1/2}}{(1+t^2)^{1/2}} \exp\left\{ i\omega\left[x\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2yt}{1+t^2}\right]\right\} dt, \quad (3.32)$$

$$\cos\varphi = (t^{-1} - t)/(t^{-1} + t).$$

Поскольку $\Psi^{(3)}_{\mu+}$ — собственная функция оператора $\{M, P_2\}$ в пространстве $\mathscr{H}$ с собственным значением $2\mu\omega$, в параболических координатах

$$x = {}^1/_2(\xi^2 - \eta^2), \quad y = \xi\eta$$

она должна быть решением с разделенными переменными или, точнее, должна выражаться в виде суммы не более четырех линейно независимых решений с разделенными переменными. Эти четыре решения кратны $U_j(\xi)V_l(\eta)$, $j, l = 1, 2$, где U_j и V_l образуют базисы решений для уравнений параболического цилиндра (2.37) при $k^2 = 2\mu\omega$. Таким образом, интеграл (3.32) определяется с точностью до четырех констант, и эти константы можно найти, вычисляя интеграл для различных частных случаев (например, для $x = 0$). Подробное вычисление дает

$$\Psi^{(3)}_{\mu+}(\xi, \eta) = \left[\sqrt{2}\cos(i\mu\pi)\right]^{-1} \left[D_{i\mu-1/2}(\sigma\xi)\, D_{-i\mu-1/2}(\sigma\eta) + \right.$$
$$\left. + D_{i\mu-1/2}(-\sigma\xi)\, D_{-i\mu-1/2}(-\sigma\eta)\right], \quad (3.33)$$

где $\sigma = \exp(\pi i/4)(2\omega)^{1/2}$, а $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра (Б.9). Кроме того, имеем

$$\Psi^{(3)}_{\mu-}(\xi, \eta) = \Psi^{(3)}_{\mu+}(\xi, -\eta). \quad (3.34)$$

Орбита 4. $S = M^2 + d^2P_1^2$

В этом случае $S = (d^2/d\varphi^2) - d^2\omega^2\cos^2\varphi$ на множестве $\mathscr{D} \subset \subset L_2(S_1)$. Уравнение на собственные значения можно представить в виде $Sf = \lambda f$, или

$$d^2f/d\varphi^2 + (a - 2q\cos 2\varphi)f = 0, \qquad a = -\lambda - d^2\omega^2/2, \quad q = d^2\omega^2/4. \quad (3.35)$$

Уравнение (3.35) является уравнением Матье (Б.25). В этом случае S не имеет собственных функций в $\mathscr{D}$, но S можно единственным образом расширить до некоторого симметрического оператора в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций f на S_1. Тогда задача на собственные значения для S сводится к обычной задаче Штурма — Лиувилля

[75, 103], и, как видно из приложения Б (разд. 8), имеется бесконечная счетная последовательность собственных значений λ_n, стремящихся к $-\infty$, причем кратность каждого собственного значения равна единице. Соответствующие собственные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} f_{nc}^{(4)}(\varphi) &= \pi^{-1/2}\mathrm{ce}_n(\varphi, q), \qquad n=0, 1, 2, \ldots, \\ f_{ns}^{(4)}(\varphi) &= \pi^{-1/2}\mathrm{se}_n(\varphi, q), \qquad n=1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{3.36}$$

Множество $\{f_{nc}^{(4)}, f_{ns}^{(4)}\}$ образует о. н. базис в $L_2(S_1)$:

$$\langle f_{nt}^{(4)}, f_{mt}^{(4)}\rangle = \delta_{mn}, \quad t=s, c, \qquad \langle f_{nc}^{(4)}, f_{ms}^{(4)}\rangle = 0. \tag{3.37}$$

Решение уравнения Гельмгольца, соответствующее $f_{nc}^{(4)}$, имеет вид

$$\Psi_{nc}^{(4)}(x, y) = I\left(f_{nc}^{(4)}\right) = \pi^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right]\mathrm{ce}_n(\varphi, q)\,d\varphi. \tag{3.38}$$

При вычислении этого интеграла мы используем тот факт, что $\Psi_{nc}^{(4)}$ — собственная функция оператора $M^2 + d^2P_1^2$ в $\mathscr{H}$. Следовательно, этот интеграл можно представить в виде суммы не более чем четырех членов, каждый из которых является решением с разделенными переменными в эллиптических координатах

$$x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta, \qquad y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta.$$

Далее, сравнивая (2.43) и (Б.25), мы находим при $k^2 = \lambda = -a - d^2\omega^2/2$, что $\Psi_{nc}^{(4)}$ удовлетворяет уравнению Матье по переменной β. Исследование интеграла (3.38) показывает, что функция $\Psi_{nc}^{(4)}$ — периодическая по β с периодом, равным 2π; следовательно,

$$\Psi_{nc}^{(4)}(\alpha, \beta) = U(\alpha)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q), \tag{3.39}$$

где $U(\alpha)$ удовлетворяет *модифицированному уравнению Матье*

$$d^2U/d\alpha^2 + (-a + 2q\,\mathrm{ch}\,2\alpha)U = 0, \tag{3.40}$$

которое получается из уравнения Матье (Б.25) подстановкой $x = i\alpha$. В зависимости от того, будет в (3.40) $a = a_n$ или $a = b_n$, это уравнение имеет либо решение $\mathrm{Ce}_n(\alpha, q) = \mathrm{ce}_n(i\alpha, q)$, либо решение $\mathrm{Se}_n(\alpha, q) = i\,\mathrm{se}_n(i\alpha, q)$ (см. (Б.26)), которые являются соответственно четной и нечетной функциями от α и отличаются этим свойством симметрии. Исследование интеграла (3.38) показывает, что он является четным по α; следовательно,

$$\Psi_{nc}^{(4)}(\alpha, \beta) = C_n\mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q), \qquad n=0, 1, \ldots, \tag{3.41a}$$

где C_n — константа, определяемая по значению интеграла (3.38) при частных значениях аргументов. Рассуждая подобным же образом, получаем

$$\Psi_{ns}^{(4)}(\alpha, \beta) = S_n \mathrm{Se}_n(\alpha, q)\,\mathrm{se}_n(\beta, q), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.41б}$$

где S_n — некоторая константа. Заметим, что формулу (3.38) можно теперь рассматривать как интегральное представление произведения функции Матье и модифицированной функции Матье. (Функции Ce_n и Se_n называются *модифицированными функциями Матье первого рода.*)

Мы определили спектры и собственные базисы для четырех операторов, характеризующих разделение переменных в уравнении (0.1), и, произведя их расширение, найдем спектры всех операторов в $\mathscr{P}^{(2)}$. Если два оператора в этом пространстве унитарно эквивалентны под сопряженным действием группы $E(2)$, то они имеют один и тот же спектр. Если один оператор является вещественным кратным другого оператора, то спектр первого оператора является тем же самым вещественным кратным спектра второго оператора. Таким образом, вычисляя спектр одного из четырех вышеуказанных операторов, мы фактически вычисляем спектр для всех операторов, находящихся на одной орбите с заданным оператором.

В задачах, связанных с решением уравнения Гельмгольца, большое значение имеет получение формул, дающих разложение базисной функции с разделяющимися переменными $\Psi_n^{(l)}$ в виде суммы или интеграла от базисных функций $\Psi_m^{(l)}$. Более общо, нам часто бывает необходимо применить евклидово преобразование к $\Psi_n^{(l)}$ и затем осуществить разложение по базису $\{\Psi_m^{(l)}\}$. Поскольку $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, мы имеем

$$\mathbf{T}(g)\Psi_n^{(l)} = \sum_m \left(\mathbf{T}(g)\Psi_n^{(l)}, \Psi_m^{(l)}\right)\Psi_m^{(l)}, \tag{3.42}$$

где сумма заменяется интегралом, если $\Psi_m^{(l)}$ — собственные функции непрерывного спектра. Но по определению

$$\left(\mathbf{T}(g)\Psi_n^{(l)}, \Psi_m^{(l)}\right) = \left\langle \mathbf{T}(g) f_n^{(l)}, f_m^{(l)}\right\rangle, \tag{3.43}$$

и, следовательно, мы можем найти коэффициенты разложения в пространстве $L_2(S_1)$ вместо того, чтобы искать их в пространстве $\mathscr{H}$. Это в значительной мере упрощает задачу. Далее, поскольку операторы $\mathbf{T}(g)$ в (3.43) определяют унитарное представление группы $E(2)$, их можно перенести из левой части в правую часть скалярного произведения или разложить любым способом, упрощающим вычисление интеграла в $L_2(S_1)$; например,

$$\left\langle \mathbf{T}(g) f_n^{(l)}, f_m^{(l)}\right\rangle = \left\langle f_n^{(l)}, \mathbf{T}(g^{-1}) f_m^{(l)}\right\rangle.$$

При анализе выражений вида (3.42) полезно ввести новую терминологию (которая будет принята в дальнейшем тексте настоящей книги). Для $g = g(0, 0, 0)$ оператор $\mathbf{T}(g)$ является единичным оператором, а коэффициенты разложения $\langle f_n^{(j)}, f_m^{(l)} \rangle$ условимся называть *матричными элементами смешанных базисов* или сокращенно м. э. с. б.[1]). Для $j = l$ и произвольного $g \in E(2)$ формула (3.42) дает так называемую *теорему сложения* для базиса $\{\Psi_n^{(j)}\}$, а коэффициенты $T_{mn}^{(j)} = \langle \mathbf{T}(g) f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle$ называются *матричными элементами* оператора $\mathbf{T}(g)$ в базисе $\{\Psi_n^{(j)}\}$. Из соотношения $\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g')$ сразу вытекает тот факт, что матричные элементы удовлетворяют тождествам

$$T_{mn}^{(j)}(gg') = \sum_k T_{mk}^{(j)}(g) T_{kn}^{(j)}(g'). \tag{3.44}$$

Из унитарности оператора $\mathbf{T}(g)$ следует соотношение

$$T_{mn}^{(j)}(g^{-1}) = \overline{T}_{nm}^{(j)}(g), \tag{3.45}$$

и наконец, для $g(0, 0, 0) = e$ имеем

$$T_{mn}^{(j)}(e) = \delta_{mn}. \tag{3.46}$$

Если в (3.42) $j \neq l$ и g — произвольный элемент группы, то коэффициенты разложения (3.43) будут также называться матричными элементами смешанных базисов (для отличия общего случая от частного, когда $g = e$, мы не будем пользоваться сокращением. — *Ред.*).

А теперь перейдем к рассмотрению некоторых разложений, представляющих особый интерес. Из (3.22) имеем

$$\langle f_n^{(j)}, f_\alpha^{(1)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f_n^{(j)}(\varphi)\, \delta(\varphi - \alpha)\, d\varphi = f_n^{(j)}(\alpha), \qquad j = 2,\ 3,\ 4,$$

откуда

$$\Psi_n^{(j)}(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} f_n^{(j)}(\alpha)\, \Psi_\alpha^{(1)}(x, y)\, d\alpha, \tag{3.47}$$

где $\Psi_\alpha^{(1)}$ — так называемое решение уравнения Гельмгольца типа *плоской волны*, определяемое формулой (3.24). Заметим, что разложение по этим плоским волнам есть не что иное, как

---

[1]) В оригинале overlap functions. Фактически величины $\langle f_n^{(j)}, f_m^{(l)} \rangle$ являются матричными элементами оператора перехода от базиса $\{\Psi_n^{(j)}\}$ к базису $\{\Psi_m^{(l)}\}$. Однако, чтобы различать эти величины и величины $\langle T(g) f_n^{(j)}, f_m^{(j)} \rangle$, за которыми закреплен термин «матричные элементы», мы предлагаем термин м. э. с. б. — *Прим. ред.*

соотношение (3.1), выписанное в базисе собственных функций $\{\Psi_n^{(j)}\}$.

Кроме того, имеем разложение

$$\Psi_\alpha^{(1)}(x, y) = \sum_n \langle f_\alpha^{(1)}, f_n^{(j)} \rangle \Psi_n^{(j)} = \sum_n \bar{f}_n^{(j)}(\alpha) \Psi_n^{(j)}, \tag{3.48}$$

где сумма заменяется интегралом, если $\{\Psi_n^{(j)}\}$ — континуальный собственный базис. Теперь имеем разложение решения типа плоской волны по элементам иного собственного базиса. Например, решения (3.19), выраженные через функции Бесселя ($j = 2$) и называемые решениями типа *цилиндрической волны*, при подстановке в (3.48) дают тождество (3.20). Для $j = 3$ находим, что

$$\exp[i\omega(x\cos\alpha + y\sin\alpha)] =$$
$$= (2\pi\sin\alpha)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{ctg}(\alpha/2))^{i\mu} \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y)\, d\mu, \qquad 0 < \alpha < \pi; \tag{3.49}$$

сходный результат мы имеем и при $-\pi < \alpha < 0$. В результате несложного (но довольно утомительного) интегрирования мы получаем следующее соотношение:

$$\langle f_n^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{\pi} e^{in\varphi} (1 + \cos\varphi)^{i\mu/2 - 1/4} (1 - \cos\varphi)^{-i\mu/2 - 1/4} d\varphi =$$
$$= \frac{\exp[(\pi/2)(i/2 - \mu)]}{\pi\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \times$$
$$\times \left[\frac{(-1)^n \Gamma(1/2 + i\mu)}{\Gamma(1/2 + i\mu - n)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2 + i\mu, & 1/2 - n \\ 1 + i\mu - n & \end{matrix} \middle| -1 \right) - \right.$$
$$\left. - i \frac{\Gamma(1/2 - i\mu)}{\Gamma(1 - i\mu - n)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2 - i\mu, & 1/2 - n \\ 1 - i\mu - n & \end{matrix} \middle| -1 \right) \right],$$
$$\langle f_n^{(2)}, f_{\mu-}^{(3)} \rangle = \langle f_{-n}^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle, \tag{3.50}$$

которые дают м. э. с. б. для базиса Бесселя и базиса функций параболического цилиндра. Итак, мы имеем разложение

$$(2\pi)^{1/2} i^n J_n(\omega r) e^{in\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} [\langle f_n^{(2)}, f_{\mu+}^{(3)} \rangle \Psi_{\mu+}^{(3)}(x, y) +$$
$$+ \langle f_n^{(2)}, f_{\mu-}^{(3)} \rangle \Psi_{\mu-}^{(3)}(x, y)]\, d\mu \tag{3.51}$$

цилиндрической волны по базису из параболических цилиндрических волн. М. э. с. б. для базиса Матье ($j = 4$) и базиса Бесселя находятся очень легко, так как функции Матье $\mathrm{ce}_n(\varphi, q)$,

$\mathrm{se}_n(\varphi, q)$ определяются своими коэффициентами A_m^n, B_m^n разложения в ряд Фурье на единичной окружности. Например, из (Б.26)

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(\varphi, q) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(2n+1)} \{\exp[i(2m+1)\varphi] + \exp[-i(2m+1)\varphi]\}.$$

Поскольку $f_{2n+1,c}^{(4)}(\varphi) = \pi^{-1/2}\mathrm{ce}_{2n+1}(\varphi, q)$, мы имеем

$$\langle f_{2n+1,c}^{(4)}, f_p^{(2)}\rangle = \begin{cases} A_{2m+1}^{(2n+1)}, & \text{если } |p| = 2m+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.52}$$

Остальные м. э. с. б. так же просты. Зная эти м. э. с. б., можно решение типа цилиндрической волны записать в виде бесконечной суммы решений Матье (3.41а), (3.41б) или решение Матье представить в виде бесконечной суммы цилиндрических волн (см. также [128]).

Теперь дадим пример теоремы сложения. Матричные элементы оператора $\mathbf{T}(g)$, определенного формулой (3.2), относительно базиса Бесселя $\{f_n^{(2)}\}$, заданного формулой (3.13), имеют вид

$$\mathbf{T}_{mn}^{(2)}(\theta, a, b) = \langle \mathbf{T}(g) f_n^{(2)}, f_m^{(2)}\rangle =$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega(a\cos(\varphi-\theta) + b\sin(\varphi-\theta)) - in\theta + i(n-m)\varphi]\, d\varphi,$$

$$g = g(\theta, a, b). \tag{3.53}$$

Полагая $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$ и вводя новую переменную $\beta = \varphi - \theta - \alpha$, находим

$$T_{mn}^{(2)}(\theta, a, b) =$$

$$= (2\pi)^{-1}\exp[i(n-m)\alpha - im\theta] \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\omega r\cos\beta + i(n-m)\beta]\, d\beta.$$

Сравнивая этот интеграл с соотношениями (3.18), (3.19), мы в конечном счете получаем

$$\begin{gathered} T_{mn}^{(2)}[\theta, r, \alpha] = i^{n-m}\exp[i(n-m)\alpha - im\theta] J_{n-m}(\omega r), \\ a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\alpha, \quad n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{gathered} \tag{3.54}$$

Подставляя эти матричные элементы в формулы (3.44)—(3.46), мы получаем ряд тождеств для функций Бесселя. (Более подробный анализ этих результатов см. в [37, 83, 122].) Оказывается, теорема сложения для базиса Бесселя является частным

случаем соотношения (3.44) при $j=2$, так как

$$\Psi_n^{(2)}(r, \theta) = (2\pi)^{1/2} T_{0n}^{(2)}[0, r, \theta].$$

И наконец, заметим, что плоская волна (3.7), (3.24)

$$\bar{H}(x, y, \varphi) = \Psi_\varphi^{(1)}(x, y) = \exp[i\omega(x\cos\varphi + y\sin\varphi)],$$

которую мы рассматриваем как функцию от φ, принадлежит пространству $L_2(S_1)$. Действительно, простое вычисление дает

$$\langle \Psi^{(1)}(\mathbf{x}), \Psi^{(1)}(\mathbf{x}')\rangle = 2\pi J_0\{\omega[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}\}. \quad (3.55)$$

С другой стороны,

$$\langle \Psi^{(1)}(\mathbf{x}), \Psi^{(2)}(\mathbf{x}')\rangle = \sum_n \langle \Psi^{(1)}(\mathbf{x}), f_n^{(j)}\rangle \langle f_n^{(j)}, \Psi^{(1)}(\mathbf{x}')\rangle =$$

$$= \sum_n \bar{\Psi}_n^{(j)}(-\mathbf{x})\Psi_n^{(j)}(-\mathbf{x}'), \quad (3.56)$$

что следует из формулы (3.7) и свойства полноты базиса $\{f_n^{(j)}\}$. (И здесь сумму по n можно заменить интегралом.) Сравнивая соотношения (3.55) и (3.56), мы получаем для каждого $j = 1, 2, 3, 4$ билинейное разложение функций $J_0\{\omega[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}\}$ по решениям уравнения Гельмгольца с разделенными переменными.

Другие примеры разложений по решениям уравнения Гельмгольца см. в работе [95].

1.4. Разделение переменных для уравнения Клейна — Гордона

Метод, рассмотренный в предыдущем разделе, дает совершенно иные результаты, если его применять к уравнению Клейна — Гордона в двумерном пространстве-времени:

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)\Phi(t, x) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь x и t — вещественные переменные, а ω — положительная константа. Поскольку мы подробно анализировали метод разделения переменных в применении к уравнению Гельмгольца, мы довольно часто будем приводить только конечные результаты, опуская необходимые вычисления.

Отбрасывая тривиальный единичный оператор, находим, что алгебра симметрии уравнения (4.1) трехмерна с базисом

$$P_1 = \partial_t, \quad P_2 = \partial_x, \quad M = -t\partial_x - x\partial_t \quad (4.2)$$

и соотношениями коммутирования

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_2] = P_1. \quad (4.3)$$