

случаем соотношения (3.44) при  $j = 2$ , так как

$$\Psi_n^{(2)}(r, \theta) = (2\pi)^{1/2} T_{0n}^{(2)}[0, r, \theta].$$

И наконец, заметим, что плоская волна (3.7), (3.24)

$$\bar{H}(x, y, \varphi) = \Psi_\varphi^{(1)}(x, y) = \exp[i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)],$$

которую мы рассматриваем как функцию от  $\varphi$ , принадлежит пространству  $L_2(S_1)$ . Действительно, простое вычисление дает

$$\langle \Psi^{(1)}(x), \Psi^{(1)}(x') \rangle = 2\pi J_0\{\omega[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}\}. \quad (3.55)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{(1)}(x), \Psi^{(2)}(x') \rangle &= \sum_n \langle \Psi^{(1)}(x), f_n^{(j)} \rangle \langle f_n^{(j)}, \Psi^{(1)}(x') \rangle = \\ &= \sum_n \bar{\Psi}_n^{(j)}(-x) \Psi_n^{(j)}(-x'), \end{aligned} \quad (3.56)$$

что следует из формулы (3.7) и свойства полноты базиса  $\{f_n^{(j)}\}$ . (И здесь сумму по  $n$  можно заменить интегралом.) Сравнивая соотношения (3.55) и (3.56), мы получаем для каждого  $j = 1, 2, 3, 4$  билинейное разложение функций  $J_0\{\omega[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}\}$  по решениям уравнения Гельмгольца с разделенными переменными.

Другие примеры разложений по решениям уравнения Гельмгольца см. в работе [95].

#### 1.4. Разделение переменных для уравнения Клейна — Гордона

Метод, рассмотренный в предыдущем разделе, дает совершенно иные результаты, если его применять к уравнению Клейна — Гордона в двумерном пространстве-времени:

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)\Phi(t, x) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь  $x$  и  $t$  — вещественные переменные, а  $\omega$  — положительная константа. Поскольку мы подробно анализировали метод разделения переменных в применении к уравнению Гельмгольца, мы довольно часто будем приводить только конечные результаты, опуская необходимые вычисления.

Отбрасывая тривиальный единичный оператор, находим, что алгебра симметрий уравнения (4.1) трехмерна с базисом

$$P_1 = \partial_t, \quad P_2 = \partial_x, \quad M = -i\partial_x - x\partial_t \quad (4.2)$$

и соотношениями коммутирования

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_2] = P_1. \quad (4.3)$$

В качестве алгебры симметрии уравнения (4.1) мы берем *вещественную* алгебру Ли  $\mathcal{E}(1, 1)$  с базисом (4.2). Используя элементы алгебры  $\mathcal{E}(1, 1)$ , запишем уравнение (4.1) в виде

$$(P_1^2 - P_2^2 + \omega^2)\Phi = 0. \quad (4.4)$$

Следовательно, на пространстве решений уравнения Клейна — Гордона  $P_1^2 - P_2^2 = -\omega^2$ . Легко проверить, что любой элемент  $L \in \mathcal{E}(1, 1)$  коммутирует с  $P_1^2 - P_2^2$ , т. е. этот оператор находится в центре обвертывающей алгебры алгебры  $\mathcal{E}(1, 1)$ .

Группой симметрии уравнения (4.1) является  $E(1, 1)$ , изоморфная группе матриц

$$g(\theta, a, b) = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \quad -\infty < \theta, a, b < \infty. \quad (4.5)$$

Групповое произведение имеет вид

$$\begin{aligned} g(\theta, a, b)g(\theta', a', b') = \\ = g(\theta + \theta', a \cosh \theta' - b \sinh \theta' + a', -a \sinh \theta' + b \cosh \theta' + b'). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Группа симметрии  $E(1, 1)$  действует, как группа преобразований в плоскости  $(t, x)$ : элемент группы  $g(\theta, a, b)$  отображает точку  $x = (t, x)$  в точку

$$xg = (t \cosh \theta - x \sinh \theta + a, -x \sinh \theta + t \cosh \theta + b). \quad (4.7)$$

(Заметим, что группа  $E(1, 1)$  называется также *группой Пуанкаре* для двумерного пространства-времени. Это связная группа преобразований, сохраняющая расстояние  $s$  (специальной теории относительности) между двумя точками  $x$  и  $x'$  пространства-времени

$$s^2 = (t - t')^2 - (x - x')^2.$$

Читатель может легко проверить тот факт, что преобразования (4.7) обладают этим свойством.) Нетрудно проверить, что  $x(g_1g_2) = (xg_1)g_2$  для  $g_1, g_2 \in E(1, 1)$  и что  $xg(0, 0, 0) = x$ .

Базис алгебры Ли матричной группы  $E(1, 1)$  задается матрицами

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

причем соотношения коммутирования идентичны (4.3). Образующие алгебры Ли и матрицы (4.5) связаны (при помощи матричной экспоненты) следующим соотношением:

$$g(\theta, a, b) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2). \quad (4.9)$$

Соответствующее действие группы  $E(1, 1)$  на пространство  $\mathcal{F}$  аналитических функций  $f$  от  $t, x$  определяется соотношением

$$\mathbf{T}(g)f(x) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2)f(x),$$

где  $P_1, P_2, M$  даются (4.2). Взяв экспоненту производных Ли, как в приложении A, мы получим

$$\mathbf{T}(g)f(x) = f(xg), \quad (4.10)$$

где  $xg$  определяется (4.7). Легко проверить, что

$$\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g'), \quad g, g' \in E(1, 1), \quad \mathbf{T}(g(0, 0, 0)) = E, \quad (4.11)$$

где  $E$  — единичный оператор на  $\mathcal{F}$ .

Способ вычисления пространства  $\mathcal{S}$  операторов симметрии второго порядка аналогичен способу, рассмотренному в разд. 1.1. Факторизуя по пространству  $\mathfrak{q}$  тривиальных симметрий  $f(x)(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , мы находим, что  $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$  девятимерно и имеет базис

- (а)  $P_1, P_2, M, E,$
  - (б)  $P_1^2, P_1P_2, M^2, \{M, P_1\}, \{M, P_2\}.$
- (4.12)

В части (а) представлены операторы симметрии первого порядка, в части (б) — операторы симметрии чисто второго порядка. Следовательно, уравнение Клейна — Гордона принадлежит классу I.

По аналогии с выражением (2.15) для уравнения Гельмгольца группа  $E(1, 1)$  действует на алгебру Ли  $\mathcal{E}(1, 1)$  операторов симметрии через *сопряженное представление*

$$L \rightarrow L^g = \mathbf{T}(g)L\mathbf{T}(g^{-1}), \quad L \in \mathcal{E}(1, 1). \quad (4.13)$$

В результате этого действия  $\mathcal{E}(1, 1)$  разбивается на орбиты. Чтобы установить структуру этих орбит, мы должны прежде всего определить сопряженное действие на базис  $P_1, M$ . Если  $g_1 = \exp(aP_1)$ , мы имеем

$$P_1^{g_1} = P_1, \quad P_2^{g_1} = P_2, \quad M^{g_1} = M - aP_2. \quad (4.14)$$

Если  $g_2 = \exp(bP_2)$ , то

$$P_1^{g_2} = P_1, \quad P_2^{g_2} = P_2, \quad M^{g_2} = M - bP_1, \quad (4.15)$$

и, наконец, если  $g_3 = \exp(\alpha M)$ , то

$$\begin{aligned} P_1^{g_3} &= \operatorname{ch} \alpha P_1 + \operatorname{sh} \alpha P_2, \\ P_2^{g_3} &= \operatorname{sh} \alpha P_1 + \operatorname{ch} \alpha P_2, \quad M^{g_3} = M. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Пусть  $L = c_1P_1 + c_2P_2 + c_3M \in \mathcal{E}(1, 1)$ ,  $L \neq 0$ . Рассуждая так же, как в разд. 1.2, можно показать, что если  $c_3 \neq 0$ , то  $L$

находится на той же орбите, что и  $M$ ; если  $c_3 = 0$ ,  $c_1^2 > c_2^2$ , то  $L$  находится на той же орбите, что и  $P_1$ ; если  $c_3 = 0$ ,  $c_1^2 < c_2^2$ , то  $L$  находится на одной орбите с  $P_2$ ; если  $c_3 = 0$ ,  $c_1 = c_2$ , то  $L$  находится на одной орбите с  $P_1 + P_2$ ; если  $c_3 = 0$ ,  $c_1 = -c_2$ , то  $L$  находится на одной орбите с  $P_1 - P_2$ .

Чтобы упростить эти результаты, заметим, что операторы  $I_1, I_2$  инверсии пространства и времени

$$I_1 \Phi(t, x) = \Phi(t, -x), \quad I_2 \Phi(t, x) = \Phi(-t, x) \quad \Phi = \mathcal{F}, \quad (4.17)$$

отображают решения уравнения Клейна — Гордона в решения, и эти операторы симметрии нельзя представить в виде (4.10), т. е.  $I_j$  нельзя получить при помощи вычисления экспоненты операторов алгебры симметрии; то, что функции (4.17) являются решениями, устанавливается простой проверкой. Операторы  $I_1$  и  $T(g)$ ,  $g \in E(1, 1)$ , порождают большую группу симметрии  $\tilde{E}(1, 1)$ , так называемую *расширенную группу Пуанкаре*. Группа  $\tilde{E}(1, 1)$  уже не является связной группой, а ее связной компонентой, содержащей единицу, является группа  $E(1, 1)$ . Алгебра Ли операторов симметрии не дает никакой информации о связных компонентах, ограниченных от единицы.

Поскольку  $\tilde{E}(1, 1)$  — группа симметрий, нам не нужно проводить различие между координатами, связанными преобразованием этой группы. Мы должны только определить орбиты в  $\mathcal{E}(1, 1)$ , возникающие в результате сопряженного действия группы  $\tilde{E}(1, 1)$ . Это легко выполнить. Из (4.17) находим ( $I_1^2 = E$ )

$$P_1^{I_1} = I_1 P_1 I_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{I_1} = -P_2, \quad M^{I_1} = -M, \quad (4.18)$$

$$P_1^{I_2} = -P_1, \quad P_2^{I_2} = P_2, \quad M^{I_2} = -M. \quad (4.19)$$

Таким образом, в результате сопряженного действия группы  $\tilde{E}(1, 1)$  алгебра  $\mathcal{E}(1, 1)$  распадается на четыре орбиты со следующими представителями:

$$M, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_1 + P_2. \quad (4.20)$$

Поскольку последние три представителя попарно коммутируют, их можно диагонализировать одновременно.

Пусть  $\mathcal{S}^{(2)}$  — вещественное пятимерное векторное пространство операторов симметрии чисто второго порядка в  $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ . Базис  $\mathcal{S}^{(2)}$  задается операторами (4.12б). Заметим, что в этом пространстве  $P_1^2 = P_2^2$ , поскольку  $P_1^2 - P_2^2$  соответствует нулевому оператору. И здесь группа  $\tilde{E}(1, 1)$  действует на пространство  $\mathcal{S}^{(2)}$  через сопряженное представление, разбивая его на непересекающиеся орбиты. Классификацию орбит проделал Каллинс [54]; здесь представлены только окончательные результаты.

Ниже мы даем перечисление представителей орбит:

$$\begin{aligned} P_2^2, \quad P_1 P_2, \quad (P_1 + P_2)^2, \quad M^2 \pm \alpha P_2^2, \quad M^2 - \alpha P_1 P_2, \quad M^2 \pm \alpha (P_1 + P_2)^2, \\ M^2, \quad \{M, P_1\}, \quad \{M, P_2\}, \quad \{M, P_1 - P_2\}, \quad \{M, P_1 - P_2\} + \alpha (P_1 + P_2)^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь  $\alpha > 0$ ; всего имеется тринадцать различных орбит. Соотнося эти операторы с системами координат, допускающими разделение переменных, мы обнаруживаем, что параметр  $\alpha$  здесь выполняет точно такую же функцию, как и параметр  $d$  для эллиптических координат, отвечающих оператору  $M^2 + d^2 P_1^2$  и представленных в табл. 1. Таким образом,  $\alpha$  просто определяет масштаб координат; если координаты различаются только на величину  $\alpha$ , свою для каждой системы, то фактически они не отличаются друг от друга. По этой причине мы впредь будем полагать  $\alpha = 1$ .

В работе [54] Каллинс определил все системы координат, в которых уравнение Клейна — Гордона имеет решения с разделенными переменными, и соотнес эти системы с операторами симметрии (4.21) точно так, как мы сделали в разд. 1.2 для уравнения Гельмгольца. Результаты, полученные Каллинсом, даются нами в сокращенном виде.

### Система 1. $S = P_2^2, P_1 P_2, (P_1 + P_2)^2$

Каллинс находит три системы координат, подобные декартовым, которые соответствуют указанным выше операторам. Однако мы рассмотрим только ту систему координат, в которой все три оператора диагонализируются одновременно. Такой системой является декартова система  $(t, x)$ ; решения с разделенными переменными в этой системе имеют вид

$$\Phi(t, x) = \exp[i(\alpha t + \beta x)], \quad \alpha^2 - \beta^2 = \omega^2.$$

### Система 2. $S_M = M^2$

Этот оператор связан с полярными координатами  
 $t = u \operatorname{ch} v, \quad x = u \operatorname{sh} v, \quad 0 \leq u < \infty, \quad -\infty < v < \infty$ . (4.22)

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \frac{\tau^2}{u^2} + \omega^2 \right) U = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dv^2} + \tau^2 \right) V = 0, \quad (4.23)$$

а их решения — вид

$$\Phi_\tau = UV = \sqrt{u} J_\nu(\omega u) e^{i\tau v}, \quad S_M \Phi_\tau = -\tau^2 \Phi_\tau, \quad (4.24)$$

где  $J_\nu(z)$  — решение уравнения Бесселя (Б.16) при  $v^2 = 1/4 - \tau^2$ . Параметризация (4.22) выделяет только ту часть плоскости

$(x, t)$ , которая определяется соотношениями  $t \pm x > 0$ . Подобные координаты, в которых происходит разделение переменных, можно определить и в остальных трех квадрантах плоскости  $(x, t)$ .

**Система 3.**  $S_{D'} = \{M, P_2\} = u^2 \partial_{vv} - v^2 \partial_{uu}$

Этот оператор соответствует координатам

$$t = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad x = uv, \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v < \infty. \quad (4.25)$$

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \omega^2 u^2 + \omega \lambda \right) U = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dv^2} + \omega^2 v^2 + \omega \lambda \right) V = 0, \quad (4.26)$$

а их решения — вид

$$\Phi_\lambda = UV =$$

$$= D_{(\lambda-1)/2}(\varepsilon_1(1+i)\sqrt{\omega}u) D_{(\lambda-1)/2}(\varepsilon_2(1+i)\sqrt{\omega}v), \quad (4.27)$$

$$S_{D'} \Phi_\lambda = -\omega \lambda \Phi_\lambda, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1,$$

где  $D_v(z)$  — функция параболического цилиндра (см. (B.9iii)).

**Система 4.**  $S_D = \{M, P_1\} = u^2 \partial_{vv} - v^2 \partial_{uu}$

Теперь мы имеем

$$t = uv, \quad x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v < \infty. \quad (4.28)$$

Все уравнения имеют такой же вид, как уравнения, представленные в системе 3, только здесь  $\omega$  каждый раз заменяется на  $i\omega$ . (Заметим, что  $\{M, P_1\}$  получается из  $\{M, P_2\}$ , если выполнить взаимную замену  $x \leftrightarrow t$ . В результате этой замены уравнение Клейна — Гордона отображается в новое уравнение подобного вида, в котором  $\omega$  заменяется на  $i\omega$ .)

**Система 5.**  $S_A = \{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2 = (u + v)^{-1} (u \partial_{vv} - v \partial_{uu})$

Этот оператор соответствует следующим координатам:

$$t = \frac{1}{2}(u - v)^2 + u + v, \quad x = -\frac{1}{2}(u - v)^2 + u + v, \quad (4.29)$$

$$-\infty < u, v < \infty;$$

решения с разделенными переменными принимают вид

$$\Phi_\lambda = UV = \varphi_{\varepsilon_1}(u) \varphi_{\varepsilon_2}(v), \quad \varepsilon_1 = \pm 1,$$

$$S_A \Phi_\lambda = \lambda \Phi_\lambda, \quad \varphi_\varepsilon(z) = \left( z + \frac{\lambda}{\omega} \right)^{1/2} J_{\varepsilon/3} \left[ \frac{2\omega}{3} \left( z + \frac{\lambda}{\omega} \right)^{3/2} \right].$$

**Система 6.**  $S = M^2 - P_1 P_2 = 4(\sinh u - \sinh v)^{-1} (\sinh u \partial_{vv} - \sinh v \partial_{uu})$

Координаты, в которых переменные разделяются, таковы:

$$2t = \cosh \frac{u-v}{2} + \sinh \frac{u+v}{2}, \quad 2x = \cosh \frac{u-v}{2} - \sinh \frac{u+v}{2}, \quad (4.30)$$

$$-\infty < u, v < \infty,$$

а уравнения с разделенными переменными принимают вид

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 \sinh z + \lambda \right) \varphi(z) = 0, \quad z = u, v. \quad (4.31)$$

Это — вариант модифицированного уравнения Матье (3.40); следовательно, решения с разделенными переменными являются произведениями функций Матье. Здесь  $S\Phi_\lambda = 4\lambda\Phi_\lambda$ .

**Система 7.**  $S_K = M^2 + (P_1 + P_2)^2 = (e^{2u} + e^{2v})^{-1} (e^{2v} \partial_{uu} + e^{2u} \partial_{vv})$

Координаты, допускающие разделение переменных, таковы:

$$t = \sinh(u-v) + \frac{1}{2}e^{u+v}, \quad x = \sinh(u-v) - \frac{1}{2}e^{u+v}, \quad (4.32)$$

$$-\infty < u, v < \infty.$$

Уравнения с разделенными переменными имеют вид

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \omega^2 e^{2u} + v^2 \right) U = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dv^2} - \omega^2 e^{2v} - v^2 \right) V = 0, \quad (4.33)$$

а их решения — вид

$$\Phi_{v^2} = J_{\pm v}(\omega e^u) J_{\pm v}(i\omega e^v), \quad S_K \Phi_{v^2} = v^2 \Phi_{v^2}. \quad (4.34)$$

**Система 8.**  $S_B = M^2 - (P_1 + P_2)^2 = (e^{2v} - e^{2u})^{-1} (e^{2v} \partial_{uu} - e^{2u} \partial_{vv})$

Этому оператору соответствуют координаты

$$t = \cosh(u-v) + \frac{1}{2}e^{u+v}, \quad x = \cosh(u-v) - \frac{1}{2}e^{u+v}, \quad (4.35)$$

$$-\infty < u, v < \infty,$$

очень похожие на координаты системы 7. Решения с разделенными переменными имеют вид

$$\Phi_{v^2} = J_{\pm v}(\omega e^u) J_{\pm v}(\omega e^v), \quad S_B \Phi_{v^2} = -v^2 \Phi_{v^2}. \quad (4.36)$$

Как отмечает Каллинс, даже инверсия пространства-времени не дает возможности этим координатам покрыть всю плоскость  $(x, t)$ .

**Система 9.**  $S = M^2 + P_2^2 = (\cosh^2 u + \sinh^2 v)^{-1} (\cosh^2 u \partial_{vv} + \sinh^2 v \partial_{uu})$

Координаты, в которых переменные разделяются, таковы:

$$t = \sinh u \cosh v, \quad x = \cosh u \sinh v, \quad -\infty < u, v < \infty. \quad (4.37)$$

Уравнения с разделенными переменными

$$\left( \frac{d^2}{du^2} + \frac{\omega^2}{2} \operatorname{ch} 2u + \lambda \right) U = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dv^2} - \frac{\omega^2}{2} \operatorname{ch} 2v + \lambda \right) V = 0 \quad (4.38)$$

являются вариантами модифицированного уравнения Матье (3.40). Решения с разделенными переменными суть произведения функций Матье; здесь  $S\Phi_\lambda = (\lambda - \omega^2/2)\Phi_\lambda$ .

**Система 10.**  $L = M^2 - P_2^2 = (\operatorname{sh}^2 a - \operatorname{sh}^2 b)^{-1} (\operatorname{sh}^2 a \partial_{bb} - \operatorname{sh}^2 b \partial_{aa}) = = (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)^{-1} (\sin^2 \beta \partial_{aa} - \sin^2 \alpha \partial_{\beta\beta})$

Здесь мы имеем две системы координат, допускающие разделение переменных, которые покрывают непересекающиеся области плоскости  $(x, t)$ . Первая из них:

$$(i) \quad t = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \quad x = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \quad -\infty < a < \infty, \quad 0 \leq b < \infty. \quad (4.39)$$

Уравнения с разделенными переменными в этой системе имеют вид

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{2} \operatorname{ch} 2z + \lambda - \frac{\omega^2}{2} \right) \varphi(z) = 0, \quad z = a, b. \quad (4.40)$$

Сравнение с уравнением (3.40) показывает, что решения с разделенными переменными в этом случае являются произведениями модифицированных функций Матье. Здесь  $L\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$ .

Вторая система имеет вид

$$(ii) \quad t = \cos \alpha \cos \beta, \quad x = \sin \alpha \sin \beta, \quad 0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta < \pi. \quad (4.41)$$

Уравнения с разделенными переменными записываются так:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - \frac{\omega^2}{2} \cos 2z + \lambda + \frac{\omega^2}{2} \right) \varphi(z) = 0, \quad z = \alpha, \beta. \quad (4.42)$$

Это — уравнение Матье, и решениями с разделенными переменными являются произведения функций Матье. Здесь  $L\Phi_\lambda = \lambda\Phi_\lambda$ . Заметим, что координаты (i) и (ii) покрывают плоскость  $(x, t)$  не полностью.

Этим мы завершили список систем координат, в которых возможно разделение переменных и которые соответствуют орбитам операторов симметрии второго порядка. Как показано в [54], все эти системы ортогональны в метрике Минковского  $ds^2 = dt^2 - dx^2$ , т. е.  $ds^2 = g_{11}(u, v) du^2 + g_{22}(u, v) dv^2$  для всех систем координат  $\{u, v\}$  (системы 1—10). Кроме того, для уравнения Клейна — Гордона эти системы являются единственными ортогональными системами координат, в которых возможно разделение переменных.

Таблица 2

## ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА — ГОРДОНА

Операторы	Координаты	Решения с разделенными переменными
1 $P_2^2, P_1P_2, (P_1 + P_2)^2$	$t, x$	Произведение экспоненциальных функций
2 $S_M = M^2$	$t = u \operatorname{ch} v,$ $x = u \operatorname{sh} v$	Произведение экспоненциальной функции и функции Бесселя
3 $\{M, P_2\}$	$t = \frac{1}{2}(u^2 + v^2),$ $x = uv$	Произведение функций параболического цилиндра
4 $S_D = \{M, P_1\}$	$t = uv,$ $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$	Произведение функций параболического цилиндра
5 $\{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2$	$t = \frac{1}{2}(u - v)^2 + u + v,$ $x = -\frac{1}{2}(u - v)^2 + u + v$	Произведение функций Эйри
6 $M^2 - P_1P_2$	$t + x = \operatorname{ch}[(u - v)/2],$ $t - x = \operatorname{sh}[(u + v)/2]$	Произведение функций Матье
7 $S_K = M^2 + (P_1 + P_2)^2$	$t + x = 2 \operatorname{sh}(u - v),$ $t - x = e^{u+v}$	Произведение функций Бесселя
8 $S_B = M^2 - (P_1 + P_2)^2$	$t + x = 2 \operatorname{ch}(u - v),$ $t - x = e^{u+v}$	Произведение функций Бесселя
9 $M^2 + P_2^2$	$t = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v,$ $x = \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$	Произведение функций Матье
10 $M^2 - P_2^2$	$t = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v,$ $x = \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$ или $t = \cos u \cos v,$ $x = \sin u \sin v$	Произведение функций Матье
11 $S_E = \{M, P_1 - P_2\}$		Решений с разделенными переменными нет

Однако существуют и неортогональные системы координат, допускающие разделение переменных; они получаются точно таким же способом, который мы рассматривали в разд. 1.2 для уравнения Гельмгольца. Кроме того, мы находим, что эти системы всегда соответствуют диагонализации оператора симметрии первого порядка и что одному и тому же оператору соот-

ветствует много различных систем. Мы не будем здесь останавливаться на неортогональных системах и отсылаем читателя к работе [54], где этот вопрос рассматривается подробно.

Результаты, полученные для ортогональных систем, представлены в табл. 2.

Заметим, что простые связи между системами координат, допускающими разделение переменных, и орбитами операторов симметрии второго порядка, установленные нами для уравнения Гельмгольца, нельзя полностью перенести на уравнение Клейна — Гордона. Во-первых, системы координат 5 и 10 никак не смогут покрыть плоскость  $(x, t)$  полностью. Во-вторых, мы показали, что двенадцать из тринадцати орбит (4.21) в  $\mathcal{D}^{(2)}$  соответствуют системам, допускающим разделение переменных. Однако остается содержащая оператор  $S_E = \{M, P_1 - P_2\}$  орбита, которая, как мы покажем, не соответствует какой-либо системе координат, допускающей разделение переменных.

Итак, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между системами координат, в которых переменные разделяются, и орбитами операторов симметрии. Во всех известных нам случаях заданная система координат, допускающая разделение переменных, соответствует некоторому оператору симметрии либо второго, либо меньшего порядка. Однако заданный оператор симметрии не обязательно соответствует какой-либо системе координат, в которой переменные разделяются. Одна из основных проблем данной теории и состоит в том, чтобы дать объяснение этому факту. В табл. 2 те операторы  $S$ , которые будут нам встречаться в дальнейшем довольно часто, снабжены для отличия нижними индексами (например, оператор  $S_M$ ).

## 1.5. Формулы разложения для решений уравнения Клейна — Гордона

Метод установления связей между различными решениями уравнения Клейна — Гордона с разделенными переменными почти идентичен процедуре, примененной нами в разд. 1.3 к уравнению Гельмгольца. Так, по аналогии с (3.1) мы рассматриваем решения  $\Phi(t, x)$  уравнения (4.1), которые можно представить в виде

$$\Phi(t, x) = 1. i. m. \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t \cosh y + x \sinh y)] h(y) dy = I(h), \quad (5.1)$$

где  $h$  принадлежит гильбертову пространству  $L_2(R)$  функций, интегрируемых с квадратом по мере Лебега на вещественной