ветствует много различных систем. Мы не будем здесь останавливаться на неортогональных системах и отсылаем читателя к работе [54], где этот вопрос рассматривается подробно.

Результаты, полученные для ортогональных систем, представлены в табл. 2.

Заметим, что простые связи между системами координат, допускающими разделение переменных, и орбитами операторов симметрии второго порядка, установленные нами для уравнения Гельмгольца, нельзя полностью перенести на уравнение Клейна — Гордона. Во-первых, системы координат 5 и 10 никак не смогут покрыть плоскость (x, t) полностью. Во-вторых, мы показали, что двенадцать из тринадцати орбит (4.21) в $\mathcal{P}^{(2)}$ соответствуют системам, допускающим разделение переменных. Однако остается содержащая оператор $S_{\text{E}} = \{M, P_1 - P_2\}$ орбита, которая, как мы покажем, не соответствует какой-либо системе координат, допускающей разделение переменных.

Итак, нельзя установить взаимно однозначное соответствие между системами координат, в которых переменные разделяются, и орбитами операторов симметрии. Во всех известных нам случаях заданная система координат, допускающая разделение переменных, соответствует некоторому оператору симметрии либо второго, либо меньшего порядка. Однако заданный оператор симметрии не обязательно соответствует какой-либо системе координат, в которой переменные разделяются. Одна из основных проблем данной теории и состоит в том, чтобы дать объяснение этому факту. В табл. 2 те операторы S, которые будут нам встречаться в дальнейшем довольно часто, снабжены для отличия нижними индексами (например, оператор S_{M}).

1.5. Формулы разложения для решений уравнения Клейна — Гордона

Метод установления связей между различными решениями уравнения Клейна — Гордона с разделенными переменными почти идентичен процедуре, примененной нами в разд. 1.3 к уравнению Гельмгольца. Так, по аналогии с (3.1) мы рассматриваем решения $\Phi(t, x)$ уравнения (4.1), которые можно представить в виде

$$\Phi(t, x) = \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y)]\, h(y)\, dy = I(h), \quad (5.1)$$

где h принадлежит гильбертову пространству $L_2(R)$ функций, интегрируемых с квадратом по мере Лебега на вещественной

прямой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^2 dy < \infty.$$

Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y) \bar{h}_2(y)\, dy, \qquad h_j \in L_2(R). \tag{5.2}$$

(Замечание. Интеграл (5.1) может и не сходиться поточечно для произвольного $h \in L_2(R)$. Обозначение l. i. m. будет объяснено ниже.)

Действие группы $E(1, 1)$ на решения уравнения Клейна — Гордона, определяемое операторами $\mathbf{T}(g)$ согласно формулам (4.7), (4.10), соответствует действию

$$\mathbf{T}(g)\, h(y) = \exp[i\omega(a \operatorname{ch}(y+\theta) + b \operatorname{sh}(y+\theta))]\, h(y+\theta), \tag{5.3}$$
$$h \in L_2(R), \qquad g(\theta, a, b) \in E(1, 1),$$

группы $E(1, 1)$ в $L_2(R)$; т. е. $\mathbf{T}(g)\Phi = I(\mathbf{T}(g)h)$, если $\Phi = I(h)$. Соответствующее действие алгебры Ли в $L_2(R)$ определяется операторами

$$P_1 = i\omega \operatorname{ch} y, \qquad P_2 = i\omega \operatorname{sh} y, \qquad M = \partial_y, \tag{5.4}$$

которые, конечно же, удовлетворяют соотношениям коммутирования (4.3).

В отличие от того, что имело место для уравнения Гельмгольца, функции Φ вида (5.1) могут и не являться истинными решениями уравнения Клейна — Гордона, поскольку они могут не быть дважды непрерывно дифференцируемыми по x и t. Например, если Φ определяется соотношением (5.1), то можно ожидать, что в результате формального дифференцирования под знаком интеграла мы получим соотношение $\partial_t \Phi = I(i\omega h \operatorname{ch} y)$. Однако для заданного h, интегрируемого с квадратом, выражение $h \operatorname{ch} y$ может и не быть интегрируемым с квадратом, и, следовательно, возможно, что интеграл $I(i\omega h \operatorname{ch} y)$ не будет сходиться. Однако если h содержится в плотном множестве $\mathscr{D}$, состоящем из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем (т. е. функций, которые обращаются в нуль вне некоторого замкнутого ограниченного интервала вещественной прямой), то легко проверить, что соответствующие функции $\Phi = I(h)$, $h \in \mathscr{D}$, являются истинными бесконечно дифференцируемыми решениями уравнения Клейна — Гордона. Кроме того, операторы (5.4) корректно определены в $\mathscr{D}$.

Пусть $\mathscr{H}$ — пространство функций Φ вида $\Phi = I(h)$, $h \in L_2(R)$. Здесь $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \qquad \Phi_j = I(h_j). \tag{5.5}$$

(Это определение имеет смысл, потому что можно проверить, что ни один ненулевой элемент h не может быть отображен интегралом I в нулевое решение уравнения Клейна — Гордона.) Назовем элементы пространства $\mathscr{H}$ *слабыми* решениями уравнения Клейна — Гордона. Из того что $\mathscr{D}$ — плотное подмножество пространства $L_2(R)$, легко следует, что каждое слабое решение Φ является в смысле гильбертова пространства пределом $\lim \Phi_j = \Phi$ некоторой последовательности истинных бесконечно дифференцируемых решений.

В рассматриваемом нами случае мы можем получить явные интегральные выражения для скалярного произведения в $\mathscr{H}$. Действительно, для $\Phi_j = I(h_j)$, $h_j \in \mathscr{D}$, можно легко проверить справедливость соотношений

$$(\Phi_1, \Phi_2) = i \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1 \partial_t \overline{\Phi}_2 \, dx \Big|_{t=t_0} = -i \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t \Phi_1) \overline{\Phi}_2 \, dx \Big|_{t=t_0}, \tag{5.5'}$$

где интегралы не зависят от константы t_0. (Эти выражения хорошо известны в квантовой теории поля (см., например, [139]). Мы просто построили гильбертово пространство решений уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией.) Но интегралы (5.5′) имеют смысл только в том случае, когда функции Φ_j дифференцируемы по t. Если в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ считать Φ пределом интегралов, взятых по конечным интервалам $[-n, n]$ (предел в среднем) при $n \to \infty$, то соотношение (5.1) приобретает четкий смысл.

Легко проверить, что операторы $\mathbf{T}(g)$, определяемые формулой (5.3), унитарны в $L_2(R)$ и определяют унитарное (даже неприводимое) представление группы $E(1, 1)$. Унитарное преобразование I, которое отображает $L_2(R)$ в $\mathscr{H}$, отображает операторы $\mathbf{T}(g)$ в операторы $I\mathbf{T}(g)I^{-1}$ (см. (4.10)) в пространстве $\mathscr{H}$. Операторы алгебры Ли (5.4) в области $\mathscr{D}$ являются косоэрмитовыми; отсюда следует, что элементы пространства $\mathscr{P}^{(2)}$, образованные из операторов (5.4) и определенные в $\mathscr{D}$, являются симметрическими. Следовательно, мы можем каждый из перечисленных в табл. 2 формальных операторов S связать с некоторым симметрическим оператором в $\mathscr{D}$, а затем попытаться расширить эту область, с тем чтобы получить самосопряженный оператор, спектральное разложение которого легко вычисляется. И наконец, используя преобразование I, мы можем отобразить полученные результаты в $\mathscr{H}$.

Заметим, что выражение (5.1) можно представить как скалярное произведение:

$$\Phi(t, x) = I(h) = \langle h, H(\cdot, t, x)\rangle,$$
$$H(y, t, x) = \exp[-i\omega(\bar{t}\operatorname{ch} y + \bar{x}\operatorname{sh} y)]. \tag{5.6}$$

Это представление не строго корректно, поскольку H как функция от y не принадлежит $L_2(R)$ при вещественных t, x. Но если мы позволим t и x принимать комплексные значения, такие, чтобы выполнялись неравенства $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, то $H(y, t, x) \in L_2(R)$, и представление (5.6) становится справедливым. Кроме того, $\Phi(t, x)$ удовлетворяет уравнению $(\partial_{tt} - \partial_{xx} + \omega^2)\Phi(t, x) = 0$ для комплексных t и x. Все представленные в табл. 2 системы координат, допускающие разделение переменных, можно аналитически продолжить в область $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, где мы получим разделение переменных для комплексного уравнения Клейна — Гордона. Интегралы $I(h)$, где h принадлежит одному из собственных базисов, соответствующих некоторому оператору S из табл. 2, абсолютно сойдутся благодаря экспоненциально затухающему коэффициенту, который содержится в функции H.

В представленном ниже списке собственных базисов мы ограничиваемся случаем, когда t и x вещественны, но результаты обычно получаются в предположении, что $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$, а затем обосновывается предельный переход к случаю, когда t и x вещественны.

Система 1. $S = P_2^2,\ P_1P_2,\ (P_1 + P_2)^2$

Чтобы вычислить общие собственные функции этих коммутирующих операторов, достаточно получить общие собственные функции операторов iP_1 и iP_2. Базисом обобщенных собственных функций для $L_2(R)$ является совокупность $\{f_\lambda^c(y)\}$:

$$f_\lambda^c(y) = \delta(y - \lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \qquad iP_1 f_\lambda^c = -\omega\operatorname{ch}\lambda f_\lambda^c,$$
$$iP_2 f_\lambda^c = -\omega\operatorname{sh}\lambda f_\lambda^c, \qquad \langle f_\lambda^c, f_{\lambda'}^c\rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \tag{5.7}$$

Здесь верхний индекс «c» означает, что функции рассматриваются в декартовых координатах. Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^c\}$ в $\mathscr{H}$ имеет вид

$$\Phi_\lambda^c(t, x) = I\left(f_\lambda^c\right) = \exp[i\omega(t\operatorname{ch}\lambda + x\operatorname{sh}\lambda)],$$
$$\left(\Phi_\lambda^c, \Phi_{\lambda'}^c\right) = \delta(\lambda - \lambda'). \tag{5.8}$$

Система 2. $S_M = M^2$

Здесь достаточно диагонализировать симметрический оператор $iM = i(d/dy)$ в $L_2(R)$. Спектральное разложение этого опе-

ратора точно соответствует теории преобразования Фурье в $L_2(R)$ (см. [48, 113]). Здесь мы просто приведем полученные результаты. Симметрический оператор iM в $\mathscr{D}$ имеет единственное самосопряженное расширение, которое мы также обозначим через iM. Базисом обобщенных собственных функций для $L_2(R)$ является множество $\{f_\lambda^M\}$, где

$$f_\lambda^M(y) = \frac{e^{i\lambda y}}{(2\pi)^{1/2}} \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \qquad iMf_\lambda^M = -\lambda f_\lambda^M, \qquad \langle f_\lambda^M, f_\mu^M \rangle = \delta(\lambda - \mu). \tag{5.9}$$

Таким образом, произвольную функцию $h \in L_2(R)$ можно единственным образом представить в виде

$$h(y) = (2\pi)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \tag{5.10}$$

где

$$\tilde{h}(\lambda) = \langle h, f_\lambda^M \rangle = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i\lambda y} dy, \tag{5.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{h}(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |h(y)|^2 dy. \tag{5.12}$$

Заметим, что коэффициент разложения $\tilde{h}(\lambda)$ в формуле (5.11) является в точности *преобразованием Фурье* функции h, а (5.12) — равенство Парсеваля. Следовательно, iM имеет непрерывный спектр, полностью покрывающий вещественную ось.

Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^M\}$ в $\mathscr{H}$ состоит из функций

$$\Phi_\lambda^M(t, x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega(t \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y) + i\lambda y] dy = (\sqrt{2}/\pi) e^{-i\lambda v} K_{i\lambda}(i\omega u), \tag{5.13}$$

где

$$t = u \operatorname{ch} v, \qquad x = u \operatorname{sh} v,$$

а

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} (e^{i\nu\pi/2} J_{-\nu}(ze^{i\pi/2}) - e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ze^{i\pi/2})) \tag{5.14}$$

— *функция Макдональда*. Заметим, что наш вывод соотношения (5.13) справедлив только при условии $t \pm x > 0$. Для других квадрантов плоскости (x, t) можно найти подобную параметризацию.

Система 3. $S_{D'} = \{M, P_2\}$

В области $\mathscr{D}$ имеем $\{M, P_2\} = 2i\omega \operatorname{sh} y(d/dy) + i\omega \operatorname{ch} y$. Можно показать, что индексы дефекта этого оператора не равны, и, следовательно, его нельзя расширить до самосопряженного оператора в некотором плотном подпространстве пространства $L_2(R)$. Оператор $\{M, P_2\}$ можно сделать самосопряженным, расширяя само гильбертово пространство $L_2(R)$, но эта процедура совершенно не единственна. Поскольку орбита 4 также связана с функциями параболического цилиндра, а исследовать ее значительно проще, чем данный случай, мы закончим на этом анализ орбиты 3.

Система 4. $S_D = \{M, P_1\}$

В $\mathscr{D}$ имеет место соотношение $S_D = 2i\omega \operatorname{ch} y(d/dy) + i\omega \operatorname{sh} y$. Чтобы найти спектральное разложение оператора S_D, выполним унитарное преобразование пространства $L_2(R)$ и проведем замену переменной таким образом, чтобы после преобразования имело место соотношение $S_D = 2i\omega(d/du)$, где u — новая переменная. В этом виде спектр оператора S_D определяется легко.

Отображение V: $L_2(R) \to L_2(\mu, R)$, определяемое соотношением

$$Vh(y) = (\operatorname{ch} y)^{1/2} h(y), \qquad h \in L_2(R),$$

является унитарным преобразованием пространства $L_2(R)$ в гильбертово пространство $L_2(\mu, R)$ функций, заданных на R, интегрируемых с квадратом по мере $d\mu(y) = dy/\operatorname{ch} y$ и со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle' = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)\bar{f}_2(y)\,d\mu(y).$$

Таким образом,

$$\langle h_1, h_2\rangle = \langle Vh_1, Vh_2\rangle',$$

и симметрический оператор VS_DV^{-1} на $L_2(\mu, R)$, который мы также обозначим через S_D, принимает вид $S_D = 2i\omega \operatorname{ch} y(d/dy)$. Теперь произведем замену переменной $e^y = \operatorname{tg}(u/2)$, $0 < u < \pi$. Тогда скалярное произведение в $L_2(\mu, R) \equiv L_2[0, \pi]$ примет вид

$$\langle f_1, f_2\rangle' = \int_0^{\pi} f_1(u)\bar{f}_2(u)\,du, \qquad f_j(y) \equiv f_j(u),$$

и $S_D = 2i\omega(d/du)$. Подпространство $\mathscr{D}$ пространства $L_2(R)$ отображается в пространство $\mathscr{D}' \subset L_2[0, \pi]$, состоящее из бесконечно дифференцируемых по u на отрезке $[0, \pi]$ функций, которые в окрестности граничных точек обращаются в нуль. Теория самосопряженных расширений оператора S_D в $\mathscr{D}'$ хорошо из-

вестна [9, 48]. Существует бесконечное множество расширений, определяемых параметром α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Для фиксированного α пространство $\mathscr{D}'$ расширяется до $\mathscr{D}'_\alpha$ — пространства всех функций f, непрерывных на отрезке $[0, \pi]$, непрерывно дифференцируемых на интервале $(0, \pi)$ и таких, что $f(0) = e^{i\alpha\pi} f(\pi)$. Легко проверить, что S_D — оператор, симметрический на $\mathscr{D}'_\alpha$ и имеющий о. н. базис собственных функций

$$f_n(u) = \pi^{-1/2} \exp(-i\lambda u/(2\omega)), \qquad \lambda = 2\omega(\alpha + 2n),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Переходя обратно в $L_2(R)$, можно видеть, что S_D^α, где α фиксировано, имеет собственные функции

$$\begin{gathered} f_n^{D,\alpha}(y) = (2/\pi)^{1/2} e^{y/2} (1 - ie^y)^{\alpha+2n-1/2} (1 + ie^y)^{-\alpha-2n-1/2}, \\ S_D^\alpha f_{n'}^{D,\alpha} = \lambda f_n^{D,\alpha}, \quad \langle f_n^{D,\alpha}, f_{n'}^{D,\alpha} \rangle = \delta_{nn'}, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots . \end{gathered} \tag{5.15}$$

Кроме того, $\{f_\lambda^{D,\alpha}\}$ образует о. н. базис в $L_2(R)$.

Собственные функции операторов S_D^α и $S_D^{\alpha'}$ связаны следующими соотношениями:

$$f_m^{D,\alpha'} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f_m^{D,\alpha'}, f_n^{D,\alpha} \rangle f_n^{D,\alpha},$$

$$\langle f_m^{D,\alpha'}, f_n^{D,\alpha} \rangle = \frac{e^{i\beta\pi} - 1}{i\beta\pi}, \qquad \beta = \alpha' - \alpha + 2(m - n),$$

которые получаются простым вычислением в $L_2[0, \pi]$.

Базисные функции $f_n^{D,\alpha}$ не лежат ни в области определения оператора P_1, ни в области определения оператора P_2, но лежат в области определения оператора M. В результате простого вычисления получаем

$$M f_n^{D,\alpha} = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2i}{\pi} \frac{\alpha + m + n}{4(n-m)^2 - 1} f_m^{D,\alpha}. \tag{5.16}$$

Чтобы найти соответствующий базис обобщенных функций $\{\Phi_n^{D,\alpha}\}$ в $\mathscr{H}$,

$$\Phi_n^{D,\alpha}(t, x) = I(f_n^{D,\alpha}),$$

используем тот факт, что переменные в этом интеграле разделятся, если положить

$$t = uv, \qquad x = {}^1/_2 (u^2 + v^2).$$

В результате получаем следующее соотношение:

$$\Phi_n^{D,\alpha}(u, v) = 2 \exp[3\pi i(\alpha + 2n)/2] D_{-\alpha-2n-1/2}((2\omega)^{1/2} u) \times$$
$$\times D_{\alpha+2n-1/2}(i(2\omega)^{1/2} v). \tag{5.17}$$

Система 5. $S_A = \{M, P_1 - P_2\} + (P_1 + P_2)^2$

Этот оператор имеет в $\mathscr{D}$ индексы дефекта (0, 1); следовательно, никакое самосопряженное расширение в обычном смысле невозможно. Самосопряженное расширение (неоднозначное), получаемое в результате расширения гильбертова пространства $L_2(R)$ до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, рассматривается в работе [56].

Системы 6, 9 и 10

Поскольку базисы Матье в приложениях встречаются крайне редко, рассматривать их здесь, несмотря на всю их несложность, мы не будем.

Система 7. $S_K = M^2 + (P_1 + P_2)^2$

В $\mathscr{D}$ этот оператор определяется соотношением $S_K = d^2/dy^2 - \omega^2 e^{2y}$ и имеет единственное самосопряженное расширение (его замыкание). Спектральное расширение оператора S_K не простое, но его можно получить при помощи известных формул интегрального преобразования Лебедева (см. [121]). Имеется базис обобщенных собственных функций

$$\begin{gathered} f_\lambda^K(y) = \pi^{-1}(2\lambda \operatorname{sh} \lambda)^{1/2} K_{i\lambda}(\omega e^y), \qquad 0 < \lambda < \infty, \\ S_K f_\lambda^K = -\lambda^2 f_\lambda^K, \qquad \langle f_\lambda^K, f_{\lambda'}^K \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \end{gathered} \tag{5.18}$$

Здесь $K_\nu(z)$ — функция Макдональда (5.14). Соответствующий базис обобщенных собственных функций $\{\Phi_\lambda^K\}$ в $\mathscr{H}$ задается соотношениями

$$\begin{gathered} \Phi_\lambda^K(u, v) = 2\pi^{-1}(\lambda \operatorname{sh} \lambda)^{1/2} K_{i\lambda}(\omega u) K_{i\lambda}(-i\omega v), \\ t = (u^2 - u^2v^2 - v^2)/(2uv), \qquad x = (u^2 + u^2v^2 - v^2)/(2uv), \\ |u/v| > 1 \end{gathered} \tag{5.19}$$

с аналогичными результатами в других областях плоскости (x, t).

Система 8. $S_B = M^2 - (P_1 + P_2)^2$

Этот оператор определяется в $\mathscr{D}$ соотношением $S_B = d^2/dy^2 + \omega^2 e^{2y}$ и имеет семейство самосопряженных расширений S_B^α, $0 < \alpha \leqslant 2$ (см. [121]). В данном случае S_B^α имеет как дискретный, так и непрерывный спектр. Собственные функции дискретного спектра задаются соотношениями

$$\begin{gathered} f_n^{B,\alpha}(y) = [2(\alpha + 2n)]^{1/2} J_{\alpha+2n}(\omega e^y), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \langle f_n^{B,\alpha}, f_m^{B,\alpha} \rangle = \delta_{n,m}, \qquad S_B^\alpha f_n^{B,\alpha} = (2n + \alpha)^2 f_n^{B,\alpha}. \end{gathered} \tag{5.20}$$

Ограничиваясь для простоты случаем $\alpha = 2$, находим, что оператор S_{B}^2 также имеет непрерывный спектр на полуоси $\lambda < 0$ с обобщенными собственными функциями

$$\tilde{f}_\lambda^{\text{B}}(y) = {}^1/_2 [\operatorname{sh}(\pi\sqrt{-\lambda})]^{-1/2} [J_{i\sqrt{-\lambda}}(\omega e^y) + J_{-i\sqrt{-\lambda}}(\omega e^y)],$$
$$\langle \tilde{f}_\lambda^{\text{B}}, \tilde{f}_{\lambda'}^{\text{B}} \rangle = \delta(\lambda - \lambda'), \quad \langle f_n^{\text{B},2}, \tilde{f}_\lambda^{\text{B}} \rangle = 0, \quad S_{\text{B}}^2 \tilde{f}_\lambda^{\text{B}} = \lambda \tilde{f}_\lambda^{\text{B}}. \tag{5.21}$$

Функции $\{f_n^{\text{B},2}, \tilde{f}_\lambda^{\text{B}}\}$ образуют базис в $L_2(R)$.

Соответствующие базисные функции в $\mathscr{H}$ определяются следующими соотношениями:

$$\Phi_n^{\text{B},\alpha} = 2[2(\alpha + 2n)]^{1/2} J_{\alpha+2n}(\omega u) K_{\alpha+2n}(-i\omega v), \qquad |u/v| < 1,$$
$$\tilde{\Phi}_\lambda^{\text{B}} = [\operatorname{sh}(\pi\sqrt{-\lambda})]^{-1/2} [J_{i\sqrt{-\lambda}}(\omega u) + J_{-i\sqrt{-\lambda}}(\omega u)] \times$$
$$\times K_{i\sqrt{-\lambda}}(-i\omega v), \tag{5.22}$$
$$t = (u^2 + u^2 v^2 + v^2)/(2uv), \qquad x = (u^2 - u^2 v^2 + v^2)/(2uv),$$
$$v > u > 0,$$

с аналогичными выражениями в других областях плоскости (x, t).

Система 11. $S_{\text{E}} = \{M, P_1 - P_2\}$

Этот оператор в $\mathscr{D}$ определяется формулой $S_{\text{E}} = i\omega(2e^{-y}(d/dy) - e^{-y})$. Формальные решения уравнения $S_{\text{E}} f = \lambda f$ имеют вид $f(y) = ce^{y/2}\exp(-i\lambda e^y/2\omega)$. Оператор S_{E} имеет индексы дефекта (0, 1) и поэтому совсем не имеет естественных самосопряженных расширений. Как показано в [56], расширяя гильбертово пространство до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, оператор S_{E} можно расширить (неоднозначно) до самосопряженного оператора. Этот самосопряженный оператор имеет непрерывный спектр, покрывающий вещественную ось, и обобщенные собственные функции в $L_2(R) \oplus L_2(R)$ образуют базис, а сужение этих функций до исходного пространства $L_2(R)$ имеет вид

$$f_\lambda^{\text{E}}(y) = \frac{e^{y/2}}{(4\pi\omega)^{1/2}} \exp\left(\frac{-i\lambda e^y}{2\omega}\right), \quad S_{\text{E}} f_\lambda^{\text{E}} = \lambda f_\lambda^{\text{E}}, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{5.23}$$

Произвольный элемент $h \in L_2(R)$ можно однозначным образом разложить по элементам собственного базиса

$$h(y) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\lambda) f_\lambda^{\text{E}}(y)\, d\lambda, \qquad c(\lambda) = \langle h, f_\lambda^{\text{E}} \rangle. \tag{5.24}$$

Но базис $\{f_\lambda^{\text{E}}\}$ не удовлетворяет условиям ортогональности в $L_2(R)$.

Замечание. Как показано в [56], расширения пространства $L_2(R)$ до $L_2(R) \oplus L_2(R)$, которые мы выполняли с тем, чтобы получить самосопряженные операторы, соответствующие орбитам 5 и 11, довольно обычны. До сих пор мы ограничивались рассмотрением гильбертова пространства $L_2(R)$, которое соответствует решениям уравнения Клейна — Гордона с положительной энергией. В релятивистской же квантовой теории часто используется гильбертово пространство $L_2(R) \oplus L_2(R)$, которое соответствует решениям как с положительной, так и с отрицательной энергией [139]. Расширенное гильбертово пространство инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре, включая инверсию пространства и времени, а исходное пространство не обладает этим свойством. Получить самосопряженные операторы, которые соответствовали бы всем орбитам, можно только в расширенном гильбертовом пространстве.

Переходя к $\mathscr{H}$, находим

$$\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}(t, x) = I\left(f_\lambda^{\mathrm{E}}\right) = [-2i\omega^2(t+x) - 2i\lambda]^{-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-[\omega^2(x^2-t^2) - \lambda(x-t)/\omega]^{1/2}\right\}; \qquad (5.25)$$

аналогичные выражения получаются для иных значений t, x и λ. Несложный анализ показывает, что такие координаты u, v, в которых $\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}(t, x) = \sum_{j=1}^{4} U_\lambda^{(j)}(u) V_\lambda^{(j)}(v)$, т. е. которые допускали бы решения с разделенными переменными, отыскать невозможно. Функции $\Phi_\lambda^{\mathrm{E}}$ все еще образуют базис для $\mathscr{H}$, состоящий из собственных функций оператора S_{E}, но это уже решения не с разделенными переменными.

Теперь рассмотрим некоторые м. э. с. б., вычисленные в пространстве $L_2(R)$, которые позволят нам связать разные базисы. В основном м. э. с. б. для уравнения Клейна — Гордона довольно сложны, поэтому мы приводим здесь только простейшие из них. Более подробно этот вопрос рассматривается в [56, 95].

Наиболее просто вычисляются матричные элементы, когда берется произвольный базис $\{f_\mu^{\mathrm{G}}\}$ и декартов базис $\{f_\lambda^{\mathrm{c}}(y) = \delta(y-\lambda)\}$. В самом деле,

$$\langle f_\mu^{\mathrm{G}}, f_\lambda^{\mathrm{c}}\rangle = f_\mu^{\mathrm{G}}(\lambda), \qquad (5.26)$$

а разложение функции Φ_μ^{G} по декартову базису имеет вид

$$\Phi_\mu^{\mathrm{G}}(t, x) = I\left(f_\mu^{\mathrm{G}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\mu^{\mathrm{G}}(\lambda)\, \Phi_\lambda^{\mathrm{c}}(t, x)\, d\lambda.$$

Матричные элементы для базисов M и (D, α) определяются соотношениями

$$\langle f_n^{D,\alpha}, f_\lambda^M\rangle = \exp\left[\frac{\pi}{2}\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)\right]\frac{\Gamma(1/2-\delta)}{\pi}\times$$
$$\times\left[\frac{\Gamma(1/2-i\lambda)}{\Gamma(1-\delta-i\lambda)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2-\delta,\ 1/2-i\lambda\\ 1-\delta-i\lambda\end{matrix}\middle|-1\right)\right]+$$
$$+\exp[-i\pi(\delta+1/2)]\,\frac{\Gamma(1/2+i\lambda)}{\Gamma(1-\delta+i\lambda)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2-\delta,\ 1/2+i\lambda\\ 1-\delta+i\lambda\end{matrix}\middle|-1\right)\Bigg],$$
$$\langle f_{-n}^{D,\alpha}, f_\lambda^M\rangle = \overline{\langle f_n^{D,\alpha}, f_{-\lambda}^M\rangle}, \qquad \delta = \alpha + 2n < 0. \tag{5.27}$$

Мы получаем представление произведения функций Бесселя в виде интеграла от функции Бесселя, используя м. э. с. б.

$$\langle f_n^{B,\alpha}, f_\lambda^M\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+2n}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{i\lambda}\frac{\Gamma(\alpha/2+n-i\lambda/2)}{\Gamma(1+n+(\alpha+i\lambda)/2)}, \tag{5.28}$$

и в виде интеграла от произведения функций Макдональда, если воспользуемся м. э. с. б.

$$\langle f_n^{B,\alpha}, f_\mu^K\rangle = [(\alpha+2n)\,\mu\,\mathrm{sh}\,\pi\mu]^{1/2}\,\frac{\Gamma(n+(\alpha+i\mu)/2)\,\Gamma(n+(\alpha-i\mu)/2)}{2\pi\Gamma(1+\alpha+2n)}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}n+(\alpha+i\mu)/2,\ n+(\alpha-i\mu)/2\\ 1+\alpha+2n\end{matrix}\middle|-1\right). \tag{5.29}$$

В [95] приводятся некоторые матричные элементы операторов $\mathbf{T}(g)$ по базису D, но эти выражения сложны. Виленкин [37] вычисляет матричные элементы этих операторов относительно базиса M и получает сравнительно простые результаты:

$$\langle \mathbf{T}(g) f_\lambda^M, f_\mu^M\rangle = T_{\mu\lambda}(\theta, a, b) =$$
$$= (2\pi)^{-1}\exp(i\mu\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\omega(a\,\mathrm{ch}\,y + b\,\mathrm{sh}\,y) + iy(\lambda-\mu)]\,dy,$$
$$g = g(\theta, a, b), \qquad -\infty < \lambda, \mu < \infty, \tag{5.30}$$

где g дается формулой (4.5). Теорема сложения для этих матричных элементов имеет вид

$$T_{\mu\lambda}(g_1 g_2) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu\nu}(g_1)\,T_{\nu\lambda}(g_2)\,d\nu. \tag{5.31}$$

Существуют следующие частные случаи:

$$T_{\mu\lambda}(\theta,\ 0,\ 0) = e^{i\mu\theta}\,\delta(\mu-\lambda),$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ 0) = (i/2)\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,H^{(1)}_{i(\mu-\lambda)}(\omega a),$$

$$T_{\mu\lambda}(\theta,\ -a,\ 0) = (-i/2)\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,H^{(2)}_{i(\mu-\lambda)}(\omega a),$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ 0,\ b) = \pi^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,K_{i(\mu-\lambda)}(\omega b),$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ 0,\ -b) = \pi^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,K_{i(\lambda-\mu)}(\omega b),$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ a) = (2\pi)^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,\Gamma(i\lambda-i\mu)(\omega a)^{i(\mu-\lambda)},$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ -a,\ -a) = (2\pi)^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,\Gamma(i\lambda-i\mu)(\omega a)^{i(\mu-\lambda)},$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ -a,\ a) = (2\pi)^{-1}\exp[(\mu-\lambda)\pi/2]\,\Gamma(i\mu-i\lambda)(\omega a)^{i(\lambda-\mu)},$$

$$T_{\mu\lambda}(0,\ a,\ -a) = (2\pi)^{-1}\exp[(\lambda-\mu)\pi/2]\,\Gamma(i\mu-i\lambda)(\omega a)^{i(\lambda-\mu)},$$

$$a>0,\qquad b>0, \tag{5.32}$$

где $H^{(j)}_{\nu}(x)$ — функции Ганкеля, которые можно выразить через функции Макдональда:

$$\begin{aligned} H^{(1)}_{\nu}(x) &= \frac{2}{\pi i}\exp\left(-\frac{\nu\pi i}{2}\right)K_{\nu}\left[\exp\left(\frac{-\pi i}{2}\right)x\right],\\ H^{(2)}_{\nu}(x) &= \frac{-2}{\pi i}\exp\left(\frac{\nu\pi i}{2}\right)K_{\nu}\left[\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)x\right]. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Заметим, что теорему сложения (5.31) следует применять очень осторожно, так как интегралы в (5.30) и (5.31) не обладают абсолютной сходимостью. В самом деле, некоторые матричные элементы являются обобщенными функциями. Эта проблема осложняет наш анализ уравнения Клейна — Гордона, так как для большей части собственных базисов, допускающих разделение переменных, интеграл (5.1) не обладает абсолютной сходимостью. Причина этого затруднения состоит в том, что ядро $H(y, t, x)$ интегрального преобразования (5.6) не принадлежит $L_2(R)$. Чтобы выйти из положения, мы позволили t и x принимать комплексные значения, такие, что $\operatorname{Im}(t\pm x)>0$. Тогда $H(\cdot, t, x)\in L_2(R)$, и вычисление интегралов упрощается. Решения уравнения Гельмгольца $\Phi(t, x) = I(h)$ больше не принадлежат $\mathscr{H}$, но все полученные нами формулы разложения справедливы для этих решений в смысле поточечной сходимости.

Виленкин [37] использует аналогичную идею, чтобы придать смысл формуле (5.31). Он полагает, что ω — комплексное число, такое, что $\operatorname{Im}\omega>0$. Тогда интеграл (5.30) для матричных элементов $T_{\mu\lambda}(\theta, a, b)$ абсолютно сходится для всех $g(\theta, a, b)$, таких, что $a\pm b>0$. Кроме того, можно легко показать, что произведение $g_1g_2 = g'$ двух таких элементов группы обладает

тем же свойством $a' \pm b' > 0$. Для этого множества элементов группы можно дать строгое доказательство формулы (5.31) и вычислить матричные элементы, получив при этом результаты, аналогичные (5.32). Вместо того чтобы непосредственно доказывать справедливость формулы (5.31), Виленкин осторожно переходит от случая $\operatorname{Im}\omega > 0$ к пределу и получает соответствующие тождества для вещественного ω. (В этом разделе мы аналогичным образом получили собственные решения $\Phi(t, x)$ уравнения Клейна — Гордона для вещественных t, x, переходя от случая $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$ к пределу.) Тем не менее формула (5.31) дает правильные результаты.

1.6. Комплексное уравнение Гельмгольца

Рассмотрим уравнение Гельмгольца вида

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2)\Psi(x, y) = 0, \tag{6.1}$$

где x и y — комплексные переменные, ω — ненулевая комплексная константа, а Ψ — аналитическая функция от x и y. Вещественные уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона можно рассматривать как различные вещественные формы комплексного уравнения (6.1). Если x, y и ω — вещественные величины, то (6.1) — вещественное уравнение Гельмгольца; если же $x = t'$, $y = ix'$, а ω — вещественная величина, то (6.1) становится уравнением Клейна — Гордона

$$(\partial_{t't'} - \partial_{x'x'} + \omega^2)\Psi(t', x') = 0. \tag{6.2}$$

Алгебра симметрии уравнения (6.1) является *комплексной* алгеброй Ли $\mathscr{E}(2)^c$, натянутой на базис

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y\partial_x - x\partial_y \tag{6.3}$$

с соотношениями коммутирования

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_1] = -P_1. \tag{6.4}$$

Заметим, что $\mathscr{E}(2)$ — алгебра симметрии вещественного уравнения Гельмгольца — является *вещественной* алгеброй Ли, натянутой на базис (6.3). Кроме того, вещественную алгебру Ли, натянутую на базис

$$\mathscr{P}_1 = P_1, \quad \mathscr{P}_2 = iP_2, \quad \mathscr{M} = iM \tag{6.5}$$

с соотношениями коммутирования

$$[\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2] = 0, \quad [\mathscr{M}, \mathscr{P}_1] = \mathscr{P}_2, \quad [\mathscr{M}, \mathscr{P}_2] = \mathscr{P}_1, \tag{6.6}$$

можно идентифицировать с алгеброй $\mathscr{E}(1, 1)$. Мы говорим, что $\mathscr{E}(2)$ и $\mathscr{E}(1, 1)$ — *вещественные формы* алгебры $\mathscr{E}(2)^c$.