

тем же свойством  $a' \pm b' > 0$ . Для этого множества элементов группы можно дать строгое доказательство формулы (5.31) и вычислить матричные элементы, получив при этом результаты, аналогичные (5.32). Вместо того чтобы непосредственно доказывать справедливость формулы (5.31), Виленкин осторожно переходит от случая  $\operatorname{Im} \omega > 0$  к пределу и получает соответствующие тождества для вещественного  $\omega$ . (В этом разделе мы аналогичным образом получили собственные решения  $\Phi(t, x)$  уравнения Клейна — Гордона для вещественных  $t, x$ , переходя от случая  $\operatorname{Im}(t \pm x) > 0$  к пределу.) Тем не менее формула (5.31) дает правильные результаты.

## 1.6. Комплексное уравнение Гельмгольца

Рассмотрим уравнение Гельмгольца вида

$$(\partial_{xx} - \partial_{yy} + \omega^2)\Psi(x, y) = 0, \quad (6.1)$$

где  $x$  и  $y$  — комплексные переменные,  $\omega$  — ненулевая комплексная константа, а  $\Psi$  — аналитическая функция от  $x$  и  $y$ . Вещественные уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона можно рассматривать как различные вещественные формы комплексного уравнения (6.1). Если  $x, y$  и  $\omega$  — вещественные величины, то (6.1) — вещественное уравнение Гельмгольца; если же  $x = t'$ ,  $y = ix'$ , а  $\omega$  — вещественная величина, то (6.1) становится уравнением Клейна — Гордона

$$(\partial_{tt'} - \partial_{x'x'} + \omega^2)\Psi(t', x') = 0. \quad (6.2)$$

Алгебра симметрии уравнения (6.1) является комплексной алгеброй Ли  $\mathcal{E}(2)^c$ , натянутой на базис

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y\partial_x - x\partial_y \quad (6.3)$$

с соотношениями коммутирования

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_2] = -P_1. \quad (6.4)$$

Заметим, что  $\mathcal{E}(2)$  — алгебра симметрии вещественного уравнения Гельмгольца — является *вещественной* алгеброй Ли, натянутой на базис (6.3). Кроме того, вещественную алгебру Ли, натянутую на базис

$$\mathcal{P}_1 = P_1, \quad \mathcal{P}_2 = iP_2, \quad \mathcal{M} = iM \quad (6.5)$$

с соотношениями коммутирования

$$[\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2] = 0, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{P}_1] = \mathcal{P}_2, \quad [\mathcal{M}, \mathcal{P}_2] = \mathcal{P}_1, \quad (6.6)$$

можно идентифицировать с алгеброй  $\mathcal{E}(1, 1)$ . Мы говорим, что  $\mathcal{E}(2)$  и  $\mathcal{E}(1, 1)$  — *вещественные* формы алгебры  $\mathcal{E}(2)^c$ .

Группой симметрии уравнения (6.1), которую мы получаем, беря экспоненты элементов алгебры симметрии, является комплексная евклидова группа  $E(2)^c$ . Как и  $E(2)$ , группа  $E(2)^c$  является группой  $(3 \times 3)$ -матриц

$$g(0, a, b) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

где теперь  $\theta, a, b$  — комплексные числа. Групповое произведение задается выражением (1.10), а действие  $xg$  группы  $E(2)^c$  как группы преобразований определяется соотношением (1.11). Так же, как в разд. 1.1,

$$g(0, a, b) = \exp(\theta M) \exp(a, P_1 + b P_2), \quad (6.8)$$

и имеется локальное представление группы  $E(2)^c$  в пространстве  $\mathcal{F}$  комплексных аналитических функций от переменных  $x$  и  $y$ , определяемое операторами  $T(g)$ :

$$T(g)\Phi(x) = \Phi(xg), \quad g \in E(2)^c. \quad (6.9)$$

Процедура определения пространства  $\mathcal{F}$  операторов симметрии второго порядка очень похожа на процедуру, описанную в разд. 1.1. Факторизуя по пространству  $q$  тривиальных симметрий  $f(x)(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2)$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , находим, что  $\mathcal{F}/q$  — комплексное девятимерное векторное пространство с базисом

- (а)  $P_1, P_2, M, E$ ,
  - (б)  $P_1^2, P_1 P_2, M^2, \{M, P_1\}, \{M, P_2\}$ .
- (6.10)

(Напомним, что  $E = 1$ .) В пункте (а) перечислены операторы симметрии первого порядка, а в пункте (б) — операторы симметрии чисто второго порядка. Мы видим, что наше уравнение принадлежит классу I: операторы симметрии второго порядка являются многочленами от операторов симметрии первого порядка.

По строгой аналогии с выражением (2.15) группа  $E(2)^c$  действует на алгебру  $\mathcal{E}(2)^c$  операторов симметрии через сопряженное представление

$$L \rightarrow L^g = T(g)L T(g^{-1}), \quad L \in \mathcal{E}(2)^c, \quad g \in E(2)^c,$$

и в результате этого действия  $\mathcal{E}(2)^c$  разбивается на орбиты. Сопряженное действие на базис  $P_1, P_2, M$  дано в (2.18) — (2.20), где параметры  $a, b, \alpha$  в данном случае являются произвольными комплексными числами.

Нам представляется полезным ввести две симметрии комплексного уравнения Гельмгольца, которые нельзя получить,

взяв экспоненты элементов алгебры симметрии. Этими симметриями являются операторы  $R_i$ , инверсии пространства:

$$R_1\Phi(x, y) = \Phi(-x, y), \quad R_2\Phi(x, y) = \Phi(x, -y), \quad \Phi \in \mathcal{F}. \quad (6.11)$$

Операторы  $R_i$  и  $T(g)$ ,  $g \in E(2)^c$ , порождают более обширную группу симметрий  $\tilde{E}(2)^c$ , связным компонентом которой, содержащим единицу, является группа  $E(2)^c$ . Сопряженное действие операторов  $R_i$  на  $\mathcal{E}(2)^c$  определяется следующими соотношениями ( $R_i^2 = E$ ):

$$P_1^{R_1} = R_1 P_1 R_1^{-1} = -P_1, \quad P_2^{R_1} = P_2, \quad M^{R_1} = -M, \quad (6.12)$$

$$P_1^{R_2} = P_1, \quad P_2^{R_2} = -P_2, \quad M^{R_2} = -M. \quad (6.13)$$

Вычисления, аналогичные тем, которые были проведены в разд. 1.2 и 1.4, показывают, что в результате сопряженного действия группы  $\tilde{E}(2)^c$  алгебра  $\mathcal{E}(2)^c$  разбивается на три орбиты с представителями

$$M, \quad P_1, \quad P_1 + iP_2. \quad (6.14)$$

Поскольку последние два оператора коммутируют, их можно диагонализировать одновременно.

Пусть  $\mathcal{S}^{(2)}$  — комплексное пятимерное векторное пространство операторов симметрии чисто второго порядка в  $\mathcal{S}/q$ . Базис этого пространства образован операторами (6.10б). Заметим, что в  $\mathcal{S}^{(2)}$  имеет место соотношение  $P_1^2 = -P_2^2$ , так как  $P_1^2 + P_2^2$  соответствует нулевому оператору. Группа  $E(2)^c$  действует на  $\mathcal{S}^{(2)}$  посредством сопряженного представления и разбивает это пространство на непересекающиеся орбиты. Прямыми вычислением получаем точно восемь типов орбит со следующими представителями:

$$\begin{aligned} & P_1^2, \quad (P_1 + iP_2)^2, \quad M^2, \quad M^2 - a^2 P_2^2 \ (a \neq 0), \quad \{M, P_2\}, \\ & M^2 + (P_1 + iP_2)^2, \quad \{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2, \quad \{M, P_1 + iP_2\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Задачу о разделении переменных для комплексного уравнения Гельмгольца можно сформулировать аналогично задаче о разделении переменных для вещественного уравнения Гельмгольца, которую мы рассматривали в разд. 1.2. Но теперь новые координаты  $\{u, v\}$  принимают значения из открытого множества в пространстве  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  упорядоченных пар комплексных чисел, а  $u(x), v(x)$  являются комплексными аналитическими функциями от  $x$  и  $y$  с ненулевым якобианом. Две системы координат, допускающие разделение переменных, считаются эквивалентными, если одну систему можно отобразить в другую при помощи элемента группы  $E(2)^c$ .

Таблица 3

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ  
ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Оператор $S$	Комплексные координаты	Решения с разделенными переменными
1 $P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	$x, y$	Произведение экспоненциальных функций
2 $M^2$	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
3 $M^2 - a^2 P_2^2, a \neq 0$	$x = a \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, y = a \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$	Произведение функций Матье
4 $\{M, P_2\}$	$x = 1/2 (\xi^2 - \eta^2), y = \xi \eta$	Произведение функций параболического цилиндра
5 $M^2 + (P_1 + iP_2)^2$	$x = (u^2 + u^2 v^2 - v^2)/(2uv), y = i(u^2 - u^2 v^2 + v^2)/(2uv)$	Произведение функций Бесселя
6 $\{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2$	$x = -1/4(w - z)^2 + 1/2(w + z), iy = -1/4(w - z)^2 - 1/2(w + z)$	Произведение функций Эйри
7 $\{M, P_1 + iP_2\}$		Решений с разделенными переменными нет

Мы видели, что вещественные уравнения Гельмгольца и Клейна — Гордона являются вещественными формами комплексного уравнения Гельмгольца. Более того, легко проверить, что каждую вещественную систему координат, допускающую разделение переменных для этих вещественных уравнений, можно единственным образом расширить до комплексных аналитических координат, допускающих разделение переменных для комплексного уравнения. Таким образом, мы уже имеем значительное число систем координат, допускающих разделение переменных для уравнения (6.1). Соответствующие решения с разделенными переменными можно однозначно расширить до аналитических решений уравнения (6.1), и каждое из этих решений с разделенными переменными является собственной функцией некоторого оператора из  $\mathcal{P}^{(2)}$ . (Для определения диагонализированного оператора мы переносим в  $\mathcal{P}^{(2)}$  при помощи (6.3), (6.4) результаты, приведенные в табл. 1, и при помощи (6.5), (6.6) результаты, приведенные в табл. 2.) И наконец, проведя довольно утомительные выкладки, можно видеть, что каких-либо нетривиальных ортогональных систем, допускающих разделение переменных, кроме тех, которые мы уже нашли, нет.

Таблица 4

КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕНИЙ  
С РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Оператор $S$	Эквивалентные решения для вещественного уравнения Гельмгольца (табл. 1)	Эквивалентные решения для вещественного уравнения Клейна — Гордона (табл. 2)
1 $P_1^2, (P_1 + iP_2)^2$	1	1
2 $M^2$	2	2
3 $M^2 - a^2 P_2^2$	4	6, 9, 10
4 $\{M, P_2\}$	3	3, 4
5 $M^2 + (P_1 + iP_2)^2$		7, 8
6 $\{M, P_1 + iP_2\} + (P_1 - iP_2)^2$		5
7 $\{M, P_1 + iP_2\}$		11

Однако связи между представленными в табл. 1 и 2 системами координат, допускающими разделение переменных, и различными системами, допускающими разделение переменных для уравнения (6.1), неоднозначны. Это объясняется тем, что системы, вещественно-неэквивалентные под действием групп  $E(2)$  и  $E(1, 1)$ , могут стать комплексно-эквивалентными в результате действия более обширной группы  $E(2)^c$ . Иначе говоря, несколько различных орбит групп  $E(2)$  и  $E(1, 1)$  пространства  $\mathcal{P}^{(2)}$  могут принадлежать одной и той же орбите группы  $E(2)^c$ .

В табл. 3 представлены связи между операторами орбиты группы  $E(2)^c$  в  $\mathcal{P}^{(2)}$  и системами координат, допускающими разделение переменных для комплексного уравнения Гельмгольца.

Коммутирующие операторы  $P_1^2$  и  $(P_1 + iP_2)^2$  принадлежат различным орбитам, но соответствуют одним и тем же координатам. В табл. 4 приведены различные решения с разделенными переменными вещественного уравнения Гельмгольца и вещественного уравнения Клейна — Гордона, соответствующие эквивалентным решениям комплексного уравнения Гельмгольца. Заметим, что три системы функций Маттье для вещественного уравнения Гельмгольца под действием группы  $E(2)^c$  становятся эквивалентными и соответствуют одной системе 3. Для других систем координат имеются аналогичные, но менее однозначные эквивалентности.