

1.7. Метод Вейснера для комплексного уравнения Гельмгольца

Несмотря на то что пространство решений уравнения (6.1), по-видимому, не допускает структуры гильбертова пространства, тождества для решений с разделенными переменными этого уравнения получить можно, и эту возможность предоставляет нам метод, предложенный Луи Вейснером [34, 83]. Основное внимание в этой процедуре направлено на решения, отвечающие орбите 2 с представителем M^2 . Вводя в (6.1) комплексные полярные координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, мы получаем уравнение

$$(\partial_{rr} + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_{\varphi\varphi} + \omega^2)\Psi = 0. \quad (7.1)$$

Ясно, что это уравнение допускает решения с разделенными переменными вида

$$J_{\pm m}(\omega r) s^m, \quad s = e^{i\varphi}, \quad m \in \mathbb{C}, \quad (7.2)$$

где $J_v(\omega r)$ — функция Бесселя. Кроме того, функция $\Psi = f(r)s^p$ является решением уравнения (7.1) тогда и только тогда, когда f удовлетворяет уравнению Бесселя

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + r^{-1} \frac{d}{dr} - r^{-2} p^2 + \omega^2 \right) f = 0. \quad (7.3)$$

Теперь предположим, что Ψ — решение уравнения (7.1), такое, что для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{C}$ функция $(rs)^{-m}\Psi(r, s)$ от комплексных переменных (r, s) является аналитической в окрестности точки $(0, 0)$. Разложением в степенной ряд по s

$$\Psi(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) s^{m+n}$$

находим, что в области сходимости этого ряда функция $f_n(r)$ является решением уравнения Бесселя (7.3) с $p = m + n$. Более того, поскольку $r^{-m}f_n(r)$ — функция, аналитическая при $r = 0$, из разд. 5 приложения Б следует, что

$$f_n(r) = c_n J_{m+n}(\omega r), \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$\Psi(r, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{m+n}(\omega r) s^{m+n}, \quad (7.4)$$

где степенной ряд сходится в окрестности точки $(r, s) = (0, 0)$, т. е. Ψ является производящей функцией для функций Бесселя. Если Ψ известна, то константы c_n вычисляются обычным способом, т. е. или находится величина правой части соотношения (7.4) при частных значениях r , или при помощи операторных

тождеств, которым удовлетворяет функция Ψ , получаются рекуррентные соотношения для c_n .

Имеет место интересное обратное свойство. Предположим, имеется сходящийся степенной ряд вида (7.4). Тогда сумма этого ряда должна быть решением комплексного уравнения Гельмгольца (7.1). Следовательно, решениями уравнения (7.1) (с соответствующими свойствами аналитичности) являются возможные производящие функции (7.4) для функций Бесселя. (Эти наблюдения можно легко распространить на производящие функции более общего вида, нежели разложение Лорана.)

Чтобы указанная выше процедура была действенной, необходимо найти эффективный способ получения явных аналитических решений уравнения (7.1). Как нам кажется, такой способ состоит в том, что находятся решения с разделенными переменными, соответствующие каждой из шести систем, перечисленных в табл. 3. В самом деле, если Φ — решение с разделенными переменными, соответствующее оператору симметрии S , $S\Phi = \lambda\Phi$, и $g \in E(2)^c$, то решение с разделенными переменными $\Psi = T(g)\Phi$ соответствует оператору $S' = T(g)ST(g^{-1})$, лежащему на той же орбите: $S'\Psi = \lambda\Psi$. Теперь Ψ нужно подставить в соотношение (7.4), в результате чего мы получаем производящую функцию для $J_\nu(\omega r)$. Хотя Вейснер нигде явно не указывает на связь между операторами симметрии и разделением переменных, в работе [34], строя производящие функции для функций Бесселя, он дает операторную характеристику отдельным решениям с разделенными переменными для всех орбит, кроме орбит 3 и 6.

Прежде чем заняться исследованием этого вопроса, полезно определить действие операторов $T(g)$ на функции от полярных координат. Перейдем к комплексным координатам r, s , где

$$x = r \cos \varphi = \frac{r}{2} (s + s^{-1}), \quad y = r \sin \varphi = \frac{r}{2i} (s - s^{-1}), \quad s = e^{i\varphi}. \quad (7.5)$$

Далее, выберем новый базис $\{P^\pm, P^0\}$ для алгебры $E(2)^c$, определив его через элементы старого базиса по формулам

$$P^+ = P_1 + iP_2, \quad P^- = -P_1 + iP_2, \quad P^0 = iM. \quad (7.6)$$

Соотношения коммутирования для этого базиса имеют вид

$$[P^+, P^-] = 0, \quad [P^0, P^\pm] = \pm P^\pm. \quad (7.7)$$

Из (6.3), (7.5) и (7.6) получаем

$$P^\pm = s^{\pm 1} (\pm \partial_r - (s/r) \partial_s), \quad P^0 = s\partial_s = -i\partial_\varphi. \quad (7.8)$$

Поскольку для $\mathcal{E}(2)^c$ мы имеем новый базис, необходимо выбрать новую параметризацию группы $E(2)^c$:

$$g = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2) = \exp(\tau P^0) \exp(aP^+ + \beta P^-), \quad (7.9)$$

$$\theta = i\tau, \quad a = \alpha - \beta, \quad b = i(\alpha + \beta).$$

В координатах $\{\tau, \alpha, \beta\}$ групповое умножение определяется соотношением

$$g(\tau, \alpha, \beta) g(\tau', \alpha', \beta') = g(\tau + \tau', \alpha e^{-\tau'} + \alpha', \beta e^{\tau'} + \beta'); \quad (7.10)$$

операторы $T(g)$, имеющие вид

$$T(g)\Psi(r, s) = \Psi(r[1 + 2ae^\tau s/r]^{1/2}[1 - 2\beta e^{-\tau}/rs]^{1/2},$$

$$se^\tau[1 - 2\beta e^{-\tau}/rs]^{1/2}[1 + 2ae^\tau s/r]^{-1/2}), \quad (7.11)$$

корректно определены для $|2\beta e^{-\tau}/rs| < 1$, $|2ae^\tau s/r| < 1$.

Величина константы ω большого значения в нашем последующем анализе не имеет, и поэтому впредь мы будем полагать, что $\omega = 1$.

Как следует из (7.2), для фиксированного $m \in \mathbb{C}$ собственные функции оператора P^0 , которые также являются решениями уравнения (7.1), принимают вид $J_{\pm m}(r)s^m$. Для ясности возьмем собственную функцию

$$\Psi_m(r, s) = J_m(r)s^m, \quad P^0\Psi_m = m\Psi_m. \quad (7.12)$$

Из соотношения коммутирования вытекает, что $[P^0, P^+] = P^+$, откуда $[P^0, P^+]\Psi_m = P^+\Psi_m$ или

$$P^0(P^+\Psi_m) = (m + 1)P^+\Psi_m. \quad (7.13)$$

Поскольку P^+ — оператор симметрии, ясно, что $P^+\Psi_m$ либо равна нулю, либо является решением уравнения (7.1), т. е. является собственной функцией оператора P^0 с собственным значением $m + 1$. Следовательно, $P^+\Psi_m$ — линейная комбинация функций (7.2), где m заменено на $m + 1$. Из (Б.17) находим в явном виде

$$P^+\Psi_m(r, s) = -\Psi_{m+1}(r, s) = -J_{m+1}(r)s^{m+1}.$$

(Этот результат легко проверить, дифференцируя почленно степенной ряд (Б.14) для $J_m(r)$.) Аналогичным образом из соотношения коммутирования $[P^0, P^-] = -P^-$ вытекает равенство

$$P^0(P^-\Psi_m) = (m - 1)P^-\Psi_m. \quad (7.14)$$

Таким образом, оператор P^- уменьшает собственное значение m на единицу. Из (Б.17) следует соотношение

$$P^-\Psi_m(r, s) = -\Psi_{m-1}(r, s) = -J_{m-1}(r)s^{m-1}.$$

Пусть теперь m_0 — комплексное число, такое, что $0 \leqslant \operatorname{Re} m_0 < 1$; рассмотрим множество $\{\Psi_m\}$ всех собственных векторов (7.12), таких, что $m = m_0 + n$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Действие алгебры $\mathcal{E}(2)^c$ на это множество определяется соотношениями

$$P^0 \Psi_m = m \Psi_m, \quad P^\pm \Psi_m = -\Psi_{m \pm 1}, \quad m = m_0 + n. \quad (7.15)$$

Эти соотношения определяют представление алгебры $\mathcal{E}(2)^c$ (см. [83]). Кроме того, они указывают на тесную связь между рекуррентными формулами (Б.17) для функций Бесселя и теорией представлений алгебры $\mathcal{E}(2)^c$. Заметим также, что порядок m функции Бесселя $J_m(r)$ является теперь не целым числом, как в разд. 1.3, а произвольным комплексным числом.

Как показано в [83], представление алгебры Ли (7.15) можно расширить до представления локальной группы $E(2)^c$, локальной в том смысле, что групповые операторы $T(g)$ и свойство представления $T(gg') = T(g)T(g')$ корректно определены и имеют смысл только для групповых элементов g, g' , лежащих в достаточно малой окрестности единичного элемента.

С одной стороны, действие операторов $T(g)$ на базис функций Ψ_m можно определить из соотношения (7.11), когда значения α, β, τ достаточно близки к нулю. С другой стороны, можно записать

$$T(g) = \exp(\tau P^0) \exp(\alpha P^+ + \beta P^-), \quad (7.16)$$

где P^0, P^\pm определяются в (7.8), и, используя формулы (1.17), (7.15), представить $T(g)\Psi_m$ в виде бесконечного ряда по функциям $\{\Psi_{m+n}\}$. Коэффициенты этого ряда полностью определены формулами (7.15); например,

$$\begin{aligned} T(g(\tau, 0, 0)) \Psi_m(r, s) &= \Psi_m(r, e^\tau s) = \\ &= \exp(\tau P^0) \Psi_m(r, s) = e^{\tau m} \Psi_m(r, s). \end{aligned}$$

Несмотря на то что разложение $T(g)\Psi_m$ по элементам нашего собственного базиса можно выполнить, используя непосредственно формулы (7.15), значительно удобнее было бы найти и применить для этой цели упрощенную модель этих выражений. Такая модель, аналогичная нашей модели $L_2(S_1)$ для пространства решений уравнения Гельмгольца, была построена в работе [83, гл. 3]. Образующие алгебры Ли являются производными Ли по одной комплексной переменной z ; операторы

$$P^+ = -z, \quad P^- = -z^{-1}, \quad P_0 = r(d/dz) \quad (7.17)$$

и функции базиса $f_m(r) = z^m$, $m = m_0 + n$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$P^0 f_m = m f_m, \quad P^\pm f_m = -f_{m \pm 1}. \quad (7.18)$$

Ясно, что операторы (7.17) удовлетворяют соотношениям коммутирования (7.7). Операторы $\mathbf{T}(g)$, определяемые соотношением (7.16), где P^0, P^\pm задаются формулами (7.17), действуют на пространство \mathcal{F}_0 функций $f(z)$, аналитических в проколотой окрестности точки $z = 0$, т. е. не обязательно аналитических в точке $z = 0$ и не обязательно однозначных (принимающих прежнее значение, когда переменная описывает замкнутый контур вокруг начала координат). Эти операторы легко вычисляются:

$$\mathbf{T}(g)f(z) = \exp(-ae^\tau z - \beta e^{-\tau}/z)f(e^\tau z), \quad f \in \mathcal{F}_0. \quad (7.19)$$

Для определения матричных элементов $T_{lj}(g)$ операторов $\mathbf{T}(g)$ относительно базиса $\{f_m, m = m_0 + n\}$ мы имеем соотношение

$$\mathbf{T}(g)f_{m_0+j}(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{lj}(g)f_{m_0+l}(z), \quad (7.20)$$

или (разделив обе части этого соотношения на z^{m_0}) соотношение

$$\exp(-ae^\tau z - \beta e^{-\tau}/z + (m_0 + j)\tau)z^j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{lj}(g)z^l, \quad (7.21)$$

$$g = g[\tau, \alpha, \beta], \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Заметим, что мы получили производящую функцию этих матричных элементов. Вычисляя в явном виде коэффициент при z^l в разложении в ряд Лорана левой части (7.21), получаем

$$T_{lj}(g) = \frac{\exp[(m_0 + l)\tau]}{|j - l|!} (-1)^{l-j} \alpha^{(l-j+1)(l-j)/2} \beta^{(l-j+1)(l-j)/2} \times \\ \times {}_0F_1(|j - l| + 1; \alpha\beta), \quad l, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.22)$$

Если $\alpha\beta = 0$, то ${}_0F_1 = 1$ и матричные элементы становятся элементарными функциями, если же $\alpha\beta \neq 0$, то матричные элементы тесно связаны с функциями Бесселя целого порядка. Действительно, если ввести новые параметры ρ, ω , определяемые соотношениями

$$\rho = 2|\alpha\beta|^{1/2} \exp[i(\arg \alpha + \arg \beta + \pi)/2], \\ \omega = |\alpha/\beta|^{1/2} \exp[i(\arg \alpha - \arg \beta - \pi)/2], \quad (7.23)$$

$$-\pi < \arg \alpha, \arg \beta \leq \pi, \quad \alpha = \rho \omega/2, \quad \beta = -\rho/(2\omega),$$

то мы получим

$$T_{lj}(g) = \exp[(m_0 + j)\tau](-\omega)^{l-j} J_{l-j}(\rho). \quad (7.24)$$

(Заметим, что (7.21) — обобщение разложения (3.20).) Непосредственно из свойства, имеющего место для представления группы, получаем тождества

$$T_{lj}(gg') = \sum_{s=-\infty}^{\infty} T_{ls}(g) T_{sj}(g'), \quad (7.25)$$

которые выполняются для g, g' , достаточно близких к единичному элементу. Кроме того, в работе [83, гл. 3] показано, что эти тождества фактически выполняются для *всех* комплексных значений шести параметров, причем групповое умножение определяется при помощи формулы (7.10). (Здесь необходимо сделать оговорку: если $m_0 \neq 0$, то мы не можем идентифицировать групповые элементы, которые отличаются значением параметра τ на целое, кратное $2\pi i$, как это было в случае $E(2)^c$. Формулы (7.25) связаны с глобальными представлениями универсальной накрывающей группы группы $E(2)^c$, а не с самой группой $E(2)^c$.) Формулы (7.25) являются обобщением тождеств (3.44), (3.54) при $j = 2$. Работа [83] содержит целый ряд примеров таких тождеств.

Матричные элементы (7.22) при g , достаточно близком к единичному элементу, единственным образом определяются соотношениями (7.18); следовательно, они должны быть такими же и для нашей модели уравнения Гельмгольца, определяемой соотношениями (7.8), (7.11), (7.12), (7.15). Отсюда

$$T(g)\Psi_{m_0+j}(r, s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{ll}(g) \Psi_{m_0+l}(r, s), \quad (7.26)$$

или

$$\begin{aligned} J_m[r(1+2as/r)^{1/2}(1-2\beta/sr)^{1/2}] \left(\frac{1-2\beta/(sr)}{1+2as/r}\right)^{m/2} &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1)_n^n}{|n|!} \beta^{(-n+|n|)/2} a^{(n+|n|)/2} {}_0F_1(|n|+1; a\beta) J_{m+n}(r) s^n, \quad (7.27) \end{aligned}$$

$$m \in \mathbb{C}, \quad |2as/r| < 1, \quad |2\beta/(rs)| < 1.$$

Тот факт, что правая часть этого соотношения является разложением в ряд Лорана по s , дает нам возможность определить границы области, где разложение (7.27) имеет место. Такое разложение сходится в круговом кольце $\rho_1 < |s| < \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 определяются особыми точками функции, входящей в левую часть соотношения (7.27) [2].

Определенный интерес представляют некоторые частные случаи этого тождества. Если $\beta = 0, s = 1$, то (7.27) имеет вид

$$J_m[r(1+2a/r)^{1/2}](1+2a/r)^{-m/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} J_{m+n}(r), \quad (7.28)$$

$$|2a/r| < 1,$$

если же $a = 0, s = 1$, то (7.27) принимает вид

$$J_m[r(1+2\beta/r)^{1/2}](1+2\beta/r)^{m/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} J_{m-n}(r), \quad (7.29)$$

$$|2\beta/r| < 1.$$

Заметим, что эти формулы представляют собой разложения экспоненты $\exp(\rho P^\pm)\Psi_m$ по элементам базиса $\{\Psi_{m+n}\}$. Поскольку операторы P^\pm не принадлежат вещественной алгебре Ли $E(2)$, получить эти формулы непосредственно, рассматривая вещественную группу $E(2)$, нельзя.

Если $\alpha\beta \neq 0$, то формула (7.27) сводится к формуле сложения Графа (см. [17])

$$\begin{aligned} J_m[r(1+\rho\omega/r)^{1/2}(1+\rho/(\omega r))^{1/2}] \left(\frac{1+\rho/(\omega r)}{1+\rho\omega/r} \right)^{m/2} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\omega)^n J_n(\rho) J_{m+n}(r), \quad |\rho\omega/r| < 1, \quad |\rho/(\omega r)| < 1. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Следует заметить, что формула (7.26) является частным случаем соотношения Вейснера (7.4), где $\Psi(r, s) = T(g)\Psi_m(r, s)$, а g находится в достаточно малой окрестности единичного элемента. В этом частном случае можно, используя модель (7.17), вычислить непосредственно коэффициенты разложения c_n (см. (7.4)).

Вообще говоря, чтобы вычислить коэффициенты разложения, необходимо использовать всю действенность метода Вейснера. Рассмотрим, например, функцию $T(g)\Psi_m$, где Ψ_m — собственная функция (7.12), а $g = g(0, 0, -1)$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} T(g)\Psi_m = \exp(-P^-)\Psi_m = \\ = (r^2 + 2rs)^{-m/2} J_m[(r^2 + 2rs)^{1/2}](2 + rs)^m = \Phi(r, s). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Поскольку $z^{-m}J_m(z)$ — целая функция от z , функцию Φ можно разложить в ряд Лорана по s в окрестности точки $s = 0$:

$$\Phi(r, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(r) s^n, \quad |rs| < 2. \quad (7.32)$$

Чтобы найти коэффициенты этого разложения, прежде всего положим в (7.32) $r = 0$ и получим $c_0 = 1/\Gamma(m+1)$. Далее, поскольку $P^0\Psi_m = m\Psi_m$, мы имеем $L\Phi = m\Phi$, где $L = \exp(-P^-)P^0\exp(P^-) = P^0 - P^-$. Следовательно, $(P^0 - P^-)\Phi = m\Phi$, и, применяя L к каждому члену правой части (7.32), получаем $c_{n+1} = (m-n)c_n$ для всех n , откуда следует, что $c_n = 1/\Gamma(m-n+1)$ и

$$\left(r^2 + \frac{2r}{s}\right)^{-m/2} J_m\left[\left(r^2 + \frac{2r}{s}\right)^{1/2}\right] (2 + rs)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(r) s^n}{\Gamma(m-n+1)}, \quad |rs| < 2. \quad (7.33)$$

Это тождество нельзя получить непосредственно при вычислении матричных элементов (7.22), так как здесь g фиксировано,

а r и s — малые величины. Выбрав r достаточно большим, мы получили бы формулу (7.29).

Для того чтобы получить некоторые более сложные формулы, воспользуемся табл. 3 и потребуем, чтобы решение Ψ (7.4) комплексного уравнения Гельмгольца было собственной функцией оператора $S \in \mathcal{S}^{(2)}$, соответствующего одной из орбит, перечисленных в табл. 3. Разберем два примера, предлагаемых Вейснером в статье [34].

Рассмотрим случай, когда Ψ — решение комплексного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее соотношению

$$\{M, P_1\}\Psi = i(4\lambda - 1)\Psi, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (7.34)$$

(Собственное значение обозначено через $i(4\lambda - 1)$ для большего удобства записи последующих формул.) Поскольку $\{M, P_1\}$ лежит на орбите 4 (табл. 3) и соответствует оператору 4 в табл. 2, то Ψ должно быть решением с разделенными переменными в параболических координатах $\{u, v\}$:

$$x = uv, \quad iy = \frac{1}{2}(u^2 + v^2).$$

Полагая $\xi = -u^2$, $\eta = -v^2$ и сопоставляя координаты $\{\xi, \eta\}$ с координатами $\{r, s\}$, находим, что

$$\xi + \eta = -r(s - s^{-1}), \quad \xi - \eta = 2ir \quad (7.35)$$

и в Ψ переменные разделяются в системе координат $\{\xi, \eta\}$. Решения уравнений с разделенными переменными являются функциями параболического цилиндра. Однако базис для решений с разделенными переменными удобнее было бы выбрать в виде

$$e^{-z/2} {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda \\ 1/2 \end{array} \middle| z\right), \quad e^{-z/2} z^{1/2} {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda + 1/2 \\ 3/2 \end{array} \middle| z\right), \quad z = \xi, \eta.$$

Связь между этим базисом и базисом функций параболического цилиндра определяется соотношением (Б.9iii). Для ясности положим

$$\Psi = \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi + \eta)\right] {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda \\ 1/2 \end{array} \middle| \xi\right) {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda \\ 1/2 \end{array} \middle| \eta\right).$$

Выражая ξ и η через r и s при помощи соотношений (7.35) и выполняя разложение в ряд Лорана в окрестности $s = 0$, находим, что

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{r}{2}(s - s^{-1})\right) {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda \\ 1/2 \end{array} \middle| \frac{r}{2s} - \frac{rs}{2} + ir\right) {}_1F_1\left(\begin{array}{c|l} \lambda \\ 1/2 \end{array} \middle| \frac{r}{2s} - \frac{rs}{2} - ir\right) = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(r) s^n. \quad (7.36) \end{aligned}$$

Полагая в (7.36) $s = 2a/b$, $r = b$, устремляя b к нулю и применяя (Б.14), получаем соотношение

$$\begin{aligned} e^a \left[{}_1F_1 \left(\begin{matrix} \lambda \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -a \right) \right]^2 &= {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \lambda \\ 1/2 \end{matrix} \middle| -a \right) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1/2 - \lambda \\ 1/2 \end{matrix} \middle| a \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{a^n}{n!}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

где первое равенство вытекает из формулы преобразования для ${}_1F_1$. Поскольку соотношение (7.36) остается справедливым при замене $s \leftrightarrow -s^{-1}$, мы имеем $c_n = c_{-n}$. Следовательно, чтобы вычислить $c_{\pm n}$, нужно произведение функций ${}_1F_1$ разложить в ряд по степеням переменной a и найти коэффициент при a^n . В результате этих операций получаем формулу

$$c_{\pm n} = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \lambda, n, -n \\ 1/2, 1/2 \end{matrix} \middle| 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.38)$$

Подставляя (7.38) в (7.36), получаем нетривиальное тождество. Тождества для иных возможных выборов базиса приводятся в [34].

В качестве последнего примера рассмотрим случай, когда Ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца и соотношению

$$[(P^0)^2 - (P^+)^2] \Psi = v^2 \Psi. \quad (7.39)$$

Этот оператор соответствует системе 5 в табл. 3, а Ψ является решением с разделенными переменными $\{u, v\}$, где

$$uv = x + iy = rs, \quad (u^2 + v^2)/(uv) = x - iy = rs^{-1},$$

т. е.

$$\begin{aligned} u &= {}^{1/2} [(r^2 + 2rs)^{1/2} - (r^2 - 2rs)^{1/2}], \\ v &= {}^{1/2} [(r^2 + 2rs)^{1/2} + (r^2 - 2rs)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Квадратные корни мы выбираем здесь таким образом, что $v = r$ и $u = 0$, если $s = 0$. Решение с разделенными переменными Ψ принимает вид $J_{\pm v}(u) J_{\pm v}(v)$. Вообще говоря, функция $\exp(\alpha P^+) \Psi = \Psi'$ удовлетворяет уравнению

$$S' \Psi' = v^2 \Psi', \quad S' = (P^0)^2 - \alpha \{P^0, P^+\} + (\alpha^2 - 1)(P^+)^2, \quad (7.41)$$

и, как следует из (7.11), Ψ' принимает вид $J_{\pm v}(u') J_{\pm v}(v')$, где

$$u' = {}^{1/2} [(r^2 + 2(1 + \alpha)rs)^{1/2} - (r^2 - 2(1 - \alpha)rs)^{1/2}],$$

$$v' = {}^{1/2} [(r^2 + 2(1 + \alpha)rs)^{1/2} + (r^2 - 2(1 - \alpha)rs)^{1/2}]. \quad (7.42)$$

Взяв произведение двух решений с индексом $+v$, мы видим, что Ψ' представляется степенным рядом по s

$$\begin{aligned} J_v(u') J_v(v') = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{v+n}(r) s^{v+n}, \quad |\alpha| < 1, \quad v \neq -1, -2, \dots \end{aligned} \quad (7.43)$$

Полагая $r = a$, $s = b/a$, устремляя a к нулю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях b в обеих частях полученного равенства, находим, что

$$c_n = \frac{2^{-v} [i(1-\alpha^2)^{1/2}]^n}{\Gamma(v+1)n!} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, n+2v+1 \\ v+1 \end{array} \middle| \frac{\alpha+i(1-\alpha^2)^{1/2}}{2i(1-\alpha^2)^{1/2}}\right). \quad (7.44)$$

При $\alpha = -1$ мы имеем

$$\begin{aligned} J_v(1/2[r - (r^2 - 4rs)^{1/2}]) J_v(1/2[r + (r^2 - 4rs)^{1/2}]) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2v - 2n)_n}{\Gamma(v+n+1)n!} J_{v+n}(r) \left(\frac{s}{2}\right)^{v+n}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

где $(a)_n$ — символ Погаммера (Б.3).

Упражнения

1. Подставляя матричные элементы (3.54) в тождество (3.44), получить формулу сложения для функций Бесселя, известную как формула сложения Графа. (Обобщения и приложения этой формулы см. в [32, гл. 11]; см. также тождество (7.27).)

2. Используя решение $\Psi^{(j)}(x)$ с разделенными переменными уравнения Гельмгольца для $j = 2, 3, 4$, получить билинейные разложения функции Бесселя (3.55). Доказать, что разложение для $j = 2$ является частным случаем формулы сложения Графа. Показать, что разложение для $j = 4$ дает в результате интегральное тождество вида

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\pi}^{\pi} J_0 \{ \omega [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} \} \text{ce}_n(\beta', q) d\beta' = \\ = |C_n|^2 \text{Ce}_n(\alpha, q) \overline{\text{Ce}}_n(\alpha', q) \text{ce}_n(\beta, q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и аналогичный результат для функции se_n .

3. Доказать, что полной алгеброй симметрии уравнения Клейна — Гордона (4.1) является алгебра $\mathcal{E}(1, 1) \oplus \{1\}$, причем базис для $\mathcal{E}(1, 1)$ определяется в (4.2).

4. Показать, что в результате сопряженного действия группы $E(2)^c$ алгебра симметрии комплексного уравнения Гельмгольца $\mathcal{E}(2)^c$ разбивается точно на три орбиты.

5. Одним из преимуществ методов локальной теории Ли над методами глобальных групп является тот факт, что локальная теория применима к так называемым специальным функциям второго рода. Функции Бесселя второго