Глава 2

# УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

## 2.1. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx})\Psi(t, x) = 0$

При квантовомеханическом изучении нерелятивистских систем в двумерном пространстве-времени, состоящем в рассмотрении частицы (массы $m$) в поле с потенциалом $V(x)$, постулируется, что состояние системы в момент $t$ полностью определяется волновой функцией $\Psi(t, x)$, которая является решением *временно́го уравнения Шредингера*

$$i\hbar\partial_t\Psi = -[\hbar^2/(2m)]\,\partial_{xx}\Psi + V(x)\Psi, \tag{1.1}$$

где $\hbar = h/(2\pi)$ и $h$ — постоянная Планка (см. [72]). (Константы $\hbar$ и $\hbar^2/(2m)$ играют исключительно важную роль в физике, но в этой книге они оказываются досадной помехой, и поэтому мы выбираем основные единицы измерения так, чтобы $\hbar = \hbar^2/(2m) = 1$.) Наиболее важны те случаи уравнения Шредингера, в которых потенциальная функция $V(x)$ имеет вид, указанный в табл. 5. В случаях (1)—(4) переменная $x$ принимает произвольные вещественные значения, в то время как в случаях (5)—(7) предполагается, что $x \geqslant 0$. (Последний вид уравнения Шредингера получается тогда, когда в пространстве-времени большей размерности вводится сферическая или полярная система координат. Так, в случаях (5)—(7) $x = r$ — радиальная координата [72].) Андерсон с соавторами [3] и Бойер [20] классифицировали все случаи уравнения Шредингера (1.1), которые допускают нетривиальную алгебру симметрии. (Ясно, что любое уравнение Шредингера допускает двумерную комплексную алгебру симметрии с базисом $\partial_t$ и $E = 1$. Под словом «нетривиальная» мы понимаем, что алгебра симметрии по меньшей мере трехмерна.) Они показали, что такими уравнениями являются только те, для которых потенциал имеет вид (1)—(7). Эти потенциалы можно охарактеризовать в терминах групп симметрии.

Таблица 5

ПОТЕНЦИАЛЫ $V(x)$, ДОПУСКАЮЩИЕ НЕТРИВИАЛЬНУЮ АЛГЕБРУ СИММЕТРИИ

| | $V(x)$ | Название системы |
|---|---|---|
| (1) | $0$ | Свободная частица |
| (2) | $kx^2,\ k>0$ | Линейный гармонический осциллятор |
| (3) | $-kx^2,\ k>0$ | Линейный репульсивный осциллятор |
| (4) | $ax,\ a\neq 0$ | Движение в однородном внешнем поле (линейный потенциал) |
| (5) | $a/x^2,\ a\neq 0$ | Изотропная свободная частица |
| (6) | $a/x^2+kx^2,\ a\neq 0,\ k>0$ | Изотропный гармонический осциллятор |
| (7) | $a/x^2-kx^2,\ a\neq 0,\ k>0$ | Изотропный репульсивный осциллятор |

В следующих трех разделах мы изучим эти семь уравнений и обнаружим удивительные зависимости между ними и их связь с разделением переменных.

Запишем уравнение Шредингера для свободной частицы в виде

$$Q\Psi=0, \qquad Q=i\partial_t+\partial_{xx}. \tag{1.2}$$

Чтобы найти алгебру симметрии этого уравнения, будем следовать методу, описанному в разд. 1.1, т. е. найдем все линейные дифференциальные операторы

$$L=a(t,\ x)\,\partial_x+b(t,\ x)\,\partial_t+c(t,\ x)$$

(где $a$, $b$, $c$ аналитичны в некоторой области $\mathscr{D}$ плоскости $(x, t)$), такие, что $L\Psi$ удовлетворяют уравнению (1.2), если $\Psi$ аналитична в $\mathscr{D}$ и является решением уравнения (1.2). Чтобы $L$ принадлежал алгебре симметрии, необходимо и достаточно выполнения соотношения

$$[L,\ Q]=R_L(t,\ x)\,Q, \tag{1.3}$$

где $R_L$ — некоторая функция, аналитичная в $\mathscr{D}$. Приравнивая в обеих частях (1.3) коэффициенты при $\partial_{xx}$, $\partial_t$, $\partial_x$ и 1, получим

систему дифференциальных уравнений для функций $a$, $b$, $c$ и $R$. Детали этих простых выкладок можно найти в работах [3, 18, 20]. Окончательный результат состоит в том, что операторы симметрии $L$ образуют шестимерную комплексную алгебру Ли $\mathcal{G}_2^c$ с базисом

$$\begin{gathered} K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, \quad K_1 = -t\partial_x + ix/2, \\ K_0 = i, \quad K_{-1} = \partial_x, \quad K_{-2} = \partial_t, \quad K^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + {}^1/_2, \end{gathered} \tag{1.4}$$

а соотношения коммутирования имеют вид

$$\begin{gathered} [K^0, K_j] = jK_j \quad (j = \pm 2, \pm 1, 0), \quad [K_{-1}, K_1] = {}^1/_2 K_0, \\ [K_{-1}, K_2] = K_1, \quad [K_{-2}, K_1] = -K_{-1}, \quad [K_{-2}, K_2] = -K^0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Читатель должен по достоинству оценить выражение (1.3), поскольку оно дает возможность вычислить операторы симметрии для уравнения (1.2), не являющиеся очевидными. Более того, некоторые из этих операторов не являются чисто дифференциальными, но содержат и операторы умножения. Геометрический смысл операторов $K_0$, $K_{-1}$, $K_{-2}$ очевиден, а оператор $K^0$ является производящим оператором преобразования растяжения $\Psi(t, x) \to \Psi(\alpha^2 t, \alpha x)$. Однако $K_1$ является производящим оператором преобразования Галилея (не очевидным оператором симметрии), геометрический же смысл $K_2$ автору неизвестен. Далее, $K^0$ и $K_2$ не коммутируют с $Q$, хотя они переводят решение в решение; таким образом, они отвечают тем операторам $L$ в (1.3), для которых $R_L \not\equiv 0$.

Так как $x$ и $t$ вещественны и так как мы хотим изучать экспоненты операторов симметрии (1.4), чтобы получить группу симметрии, мы ограничимся рассмотрением *вещественной* шестимерной алгебры Ли $\mathcal{G}_2$ с базисом (1.4). (Заметим, что мы не можем отбросить единичный оператор $K_0$, так как он появляется как коммутатор $2[K_{-1}, K_1]$.) Другим полезным базисом в $\mathcal{G}_2$ является базис $\{C_j, L_k, E\}$, где

$$\begin{gathered} C_1 = K_{-1}, \quad C_2 = K_1, \quad L_3 = K_{-2} - K_2, \\ L_1 = K^0, \quad L_2 = K_{-2} + K_2, \quad E = K_0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Соотношения коммутирования принимают вид

$$\begin{gathered} [L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_2, L_3] = 2L_1, \\ [C_1, C_2] = {}^1/_2 E, \quad [L_3, C_1] = C_2, \quad [L_3, C_2] = -C_1, \\ [L_2, C_1] = [C_2, L_1] = -C_2, \quad [L_1, C_1] = [L_2, C_2] = -C_1, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где $E$ — производящий оператор центра $\mathcal{G}_2$.

Чтобы разъяснить структуру $\mathcal{G}_2$, напомним некоторые факты о группе $SL(2, R)$ всех вещественных $(2 \times 2)$-матриц $A$

с детерминантом, равным $+1$:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\qquad \alpha\delta-\gamma\beta=1,\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in R. \tag{1.8}$$

Как известно [83, 134], алгебра Ли $sl(2,R)$ группы $SL(2,R)$ состоит из всех вещественных $(2\times 2)$-матриц $A$ с нулевым следом

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix},\qquad a,\ b,\ c\in R. \tag{1.9}$$

Эта алгебра Ли трехмерна, и матрицы

$$\mathscr{L}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \mathscr{L}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{L}_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{1.10}$$

образуют ее базис, а соотношения коммутирования имеют вид

$$[\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2]=-2\mathscr{L}_3,\qquad [\mathscr{L}_3,\mathscr{L}_1]=2\mathscr{L}_2,\qquad [\mathscr{L}_2,\mathscr{L}_3]=2\mathscr{L}_1. \tag{1.11}$$

Отсюда непосредственно следует, что операторы симметрии $L_k$ образуют базис подалгебры алгебры $\mathscr{G}_2$, изоморфной алгебре $sl(2,R)$.

Кроме того, операторы $C_1$, $C_2$, $E$ образуют базис подалгебры алгебры $\mathscr{G}_2$, изоморфной алгебре Вейля $\mathscr{W}_1$. Группа Вейля $W_1$ состоит из вещественных $(3\times 3)$-матриц вида

$$B(u,\ v,\ \rho)=\begin{pmatrix}1 & v & 2\rho+uv/2\\ 0 & 1 & u\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad u,\ v,\ \rho\in R, \tag{1.12}$$

с групповым умножением матриц

$$B(u,\ v,\ \rho)\,B(u',\ v',\ \rho')=$$
$$=B(u+u',\ v+v',\ \rho+\rho'+(vu'-uv')/4). \tag{1.13}$$

Алгебра Ли $\mathscr{W}_1$ имеет базис

$$\mathscr{C}_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{C}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathscr{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

а соотношения коммутирования имеют вид

$$[\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2]={}^1/_2\mathscr{E},\qquad [\mathscr{C}_k,\mathscr{E}]=0. \tag{1.14}$$

Используя известные результаты теории Ли (теорема А.3), мы можем по дифференциальным операторам из $\mathscr{G}_2$ построить экспоненциальные отображения, чтобы получить локальную группу Ли $G_2$ операторов симметрии. Действие группы Вейля

$W_1$ задается операторами

$$\mathbf{T}(u, v, \rho) = \exp([\rho + uv/4]E)\exp(uC_2)\exp(vC_1),$$

причем

$$\mathbf{T}(u, v, \rho)\Phi(t, x) = \\ = \exp[i\rho + i(uv + 2ux - u^2t)/4]\Phi(t, x + v - ut), \quad (1.15)$$

где $\Phi$ принадлежит пространству $\mathcal{F}$ функций, аналитических в области $\mathcal{D}$. Свойство группового умножения описывается соотношением (1.13). Действие $SL(2, R)$ дается соотношением

$$\mathbf{T}(A)\Phi(t, x) = \exp\left[i\frac{x^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right](\delta + t\beta)^{-1/2}\Phi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \quad (1.16)$$

где $A \in SL(2, R)$ представлена в виде (1.8). Отметим, что

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\beta K_2), \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \exp(\gamma K_{-2}),$$

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} = \exp(\alpha K^0), \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(\theta L_3), \quad (1.17)$$

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} = \exp(\varphi L_2).$$

Группа $SL(2, R)$ действует на $W_1$ посредством присоединенного представления

$$\mathbf{T}(A^{-1})\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(u\delta + v\beta, u\gamma + v\alpha, \rho), \quad (1.18)$$

откуда полная группа симметрии $G_2$ — *группа Шредингера* в двумерном пространстве-времени — получается как полупрямое произведение группы $SL(2, R)$ и $W_1$ [20, 58]:

$$g = (A, \mathbf{w}) \in G_2, \qquad A \in SL(2, R),$$
$$\mathbf{w} = (u, v, \rho) \in W_1, \qquad \mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\mathbf{T}(\mathbf{w}), \quad (1.19)$$
$$\mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g') = \mathbf{T}(AA')\{\mathbf{T}(A'^{-1})\mathbf{T}(\mathbf{w})\mathbf{T}(A')\}\mathbf{T}(\mathbf{w}') = \mathbf{T}(gg').$$

Из нашей общей теории следует, что $\mathbf{T}(g)$ отображает решение $\Psi$ уравнения (1.2) в решение $\mathbf{T}(g)\Psi$. Однако $G_2$ является лишь локальной группой симметрии, ибо мы сталкиваемся не только с проблемой области определения функции $\mathbf{T}(g)\Phi$, которая обсуждалась в разд. 1.1, но также и с тем фактом, что выражение (1.16) теряет смысл при $\delta + t\beta = 0$. Соотношение (1.16) получается вычислением экспоненты производной Ли только при $|t\beta/\delta| < 1$. При $|t\beta/\delta| > 1$ это соотношение все еще определяет некоторую симметрию, но не может быть непосредственно получено при помощи алгебры симметрии.

Группа Шредингера $G_2$ действует на алгебре Ли $\mathcal{G}_2$ симметрии операторов $K$ посредством сопряженного представления

$$K \to K^g = \mathbf{T}(g) K \mathbf{T}(g^{-1}),$$

и это действие разбивает $\mathcal{G}_2$ на $G_2$-орбиты. Оператор $K_0 = i$, производящий оператор центра $\{K_0\}$ алгебры $\mathcal{G}_2$, с нашей точки зрения является тривиальным, поэтому мы просто определим структуру орбит факторпространства $\mathcal{G}_2' = \mathcal{G}_2/\{K_0\}$. Получаются следующие результаты. Пусть ненулевой элемент $\mathcal{G}_2'$ имеет вид

$$K = a_2K_2 + a_1K_1 + a_0K^0 + a_{-1}K_{-1} + a_{-2}K_{-2},$$

и пусть $\alpha = a_2a_{-2} + a_0^2$. Прямые вычисления показывают, что $\alpha$ — инвариант сопряженного представления. В табл. 6 дано полное множество представителей орбит. Это значит, что $K$ лежит на некоторой $G_2$-орбите, если оператор $K$ вещественно кратен одному из пяти операторов, входящих в следующий список:

$$\begin{array}{lll} \text{Случай 1} & (\alpha < 0) & K_{-2} - K_2 = L_3; \\ \text{Случай 2} & (\alpha > 0) & K^0; \\ \text{Случай 3} & (\alpha = 0) & K_2 + K_{-1},\ K_{-2},\ K_{-1}. \end{array} \tag{1.20}$$

Отметим, что существует пять орбит.

Так как $K_{-2}$ и $K_{-1}$ коммутируют, их можно одновременно привести к диагональному виду. Более того, $K_{-2}\Psi = iK_{-1}^2\Psi$ для произвольного решения $\Psi$ уравнения $Q\Psi = 0$. Поэтому мы ассоциируем с обеими этими орбитами одну и ту же систему координат $\{t, x\}$ и окончательно имеем четыре системы координат, в которых переменные разделяются.

Можно также определить операторы симметрии второго порядка для уравнения $Q\Psi = 0$ и показать, что уравнение Шредингера для свободной частицы является уравнением класса I. Однако все системы координат, допускающие разделение переменных в этом уравнении, оказываются ассоциированными с орбитами операторов симметрии первого порядка. Это связано с тем фактом, что уравнение Шредингера — уравнение первого порядка по $t$.

Для этого уравнения целесообразно (и необходимо) рассматривать решения с $R$-разделенными переменными. Чтобы разъяснить понятие $R$-разделимости, возьмем не обращающуюся в нуль аналитическую функцию $R(t, x) = \exp(i\mathcal{R}(t, x))$ и запишем решение $\Psi$ уравнения Шредингера $Q\Psi = 0$ в виде $\Psi = R\Phi$. Составив дифференциальное уравнение для функции $\Phi$, получим $Q'\Phi = 0$, где $Q' = R^{-1}QR$ — преобразованный диффе-

ренциальный оператор. Предположим, что новое уравнение $Q'\Phi = 0$ в системе координат $\{u, v\}$ имеет решение с разделенными переменными $\Phi_\lambda = U_\lambda(u) V_\lambda(v)$. Если $R = a(u) b(v)$, т. е. если в координатах $\{u, v\}$ функция $R$ факторизуется, то $\Psi_\lambda = a(u) U_\lambda(u) b(v) V_\lambda(v)$ — решение уравнения $Q\Psi_\lambda = 0$ с разделенными переменными, и мы не получаем ничего нового. Однако если $R(u, v)$ не факторизуется, то мы получаем новое семейство решений $\Psi_\lambda = \exp(i\mathcal{R}(u, v)) U_\lambda(u) V_\lambda(v)$ с $R$-разделенными переменными. Таким образом, $R$-разделимость является обобщением обычной разделимости. Решения уравнения $Q\Psi = 0$ с $R$-разделенными переменными соответствуют обычным решениям с разделенными переменными эквивалентного уравнения $Q'\Phi = 0$, $Q' = R^{-1}QR$.

Мы не вводили понятие $R$-разделимости раньше потому, что уравнения, исследованные в гл. 1, не допускали $R$-разделенных переменных без того, чтобы переменные уже не были разделены в обычном смысле. Однако для операторов Шредингера ситуация меняется. Ясно, что в этом случае существование решений с $R$-разделенными переменными связано с существованием оператора симметрии $K$, который не коммутирует с $Q$, хотя и отображает решения в решения.

Калнинс и автор настоящей книги в работе [58] нашли все системы координат, которые допускают решения уравнения (1.2) с $R$-разделенными переменными, и доказали, что соответствующие решения $\Psi_\lambda = \exp(i\mathcal{R}(u, v)) U_\lambda(u) V_\lambda(v)$ с $R$-разделенными переменными можно охарактеризовать как собственные функции некоторого оператора $K \in \mathcal{G}_2$, $K\Psi_\lambda = i\lambda\Psi_\lambda$, $Q\Psi_\lambda = 0$. Соответствие между орбитами в $\mathcal{G}_2'$ и координатами, допускающими решения с $R$-разделенными переменными, указывается в табл. 6.

Во всех приведенных в табл. 6 случаях $v = t$. Как было указано выше, существует всего четыре типа систем координат, допускающих разделение переменных, и они соответствуют четырем нетривиальным $G_2$-орбитам в $\mathcal{G}_2'$. (Здесь мы отождествляем две орбиты с коммутирующими представителями $K_{-1}$, $K_{-2}$.) Однако таблица имеет шесть входов и каждая из шести систем координат кажется отличной от остальных. Объяснение этому факту связано с нашим определением эквивалентности координатных систем. Две системы координат рассматриваются как эквивалентные, если одна система может быть отображена в другую $G_2$-преобразованием $\mathbf{T}(g)$. Более того, такое преобразование, в частности (1.16), может иногда иметь довольно сложный вид, так что две эквивалентные системы могут выглядеть совсем по-разному. Так как физический смысл оператора $K_2$ неясен, довольно трудно интерпретировать физические или

Таблица 6

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $(i\partial_t + \partial_{xx})\Psi(t, x) = 0$ С $R$-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

| | Оператор | Координаты $(u, v)$ | Множитель $R = e^{i\mathcal{R}}$ | Решение с разделенными переменными |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $K_{-1}, K_{-2}$ | $x = u$ | $\mathcal{R} = 0$ | Произведение экспоненциальных функций |
| 2а | $K_{-2} - K_1$ | $x = u + v^2/2$ | $\mathcal{R} = uv/2$ | Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции |
| 2б | $K_2 + K_{-1}$ | $x = uv + 1/2v$ | $\mathcal{R} = (u^2v - u/v)/4$ | Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции |
| 3а | $K^0$ | $x = u\sqrt{v}$ | $\mathcal{R} = 0$ | Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции |
| 3б | $K_2 + K_{-2}$ | $x = u\,\lvert 1 - v^2 \rvert^{1/2}$ | $\mathcal{R} = \pm u^2v/4$ (+, если $\lvert v \rvert > 1$, −, если $\lvert v \rvert < 1$) | Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции |
| 4 | $K_2 - K_{-2}$ | $x = u(1 + v^2)^{1/2}$ | $\mathcal{R} = u^2v/4$ | Произведение функции Эрмита и экспоненциальной функции |

геометрические взаимоотношения между двумя системами координат, связанными с помощью экспоненты этого оператора.

Тем не менее имеется пятипараметрическая подгруппа группы $G_2$, физический смысл которой весьма прозрачен [74]. Эта подгруппа состоит из группы Галилея плюс растяжение, и ее алгебра Ли имеет базис $\{K_{-2}, K_{\pm 1}, K_0, K^0\}$. Если мы посмотрим на системы координат с точки зрения упомянутой пятимерной подгруппы, то найдем, что вторая и третья $G_2$-орбиты расщепляются на две орбиты. Это отвечает наличию шести систем, приведенных в табл. 6. (Однако в основу классификации систем положен факт разделимости переменных, а не точность соответствия орбитам упомянутой пятипараметрической подгруппы, включающей группу Галилея плюс растяжение. В самом деле, 2а расщепляется на две орбиты $K_{-2} \pm K_1$, а 2б расщепляется на орбиты $K_2 \pm K_{-1}$. Эти подслучаи дают координаты, которые отличаются только знаком параметра, и мы не находим различия между ними.)

Можно описать эквивалентность орбит 2 и 3 в терминах оператора $J = \exp[(\pi/4)(K_2 - K_{-2})] = \exp((-\pi/4)L_3)$,

$$J\Phi(t, x) = \frac{2^{1/4}}{(1+t)^{1/2}} \exp\left(\frac{ix^2/4}{1+t}\right)\Phi\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{x\sqrt{2}}{t+1}\right). \quad (1.21)$$

Заметим, что $J^2 = \exp[(\pi/2)(K_2 - K_{-2})] = \exp(-(\pi/2)L_3)$ и

$$J^2\Phi(t, x) = \frac{\exp(ix^2/4t)}{\sqrt{t}}\Phi\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right), \quad J^8\Phi = -\Phi, \quad J^{16}\Phi = \Phi. \quad (1.22)$$

Прямое вычисление дает

$$J(K_{-2} + K_2)J^{-1} = K^0, \qquad J^2(K_1 - K_{-2})J^{-2} = K_{-1} + K_2, \quad (1.23)$$

что доказывает $G_2$-эквивалентность систем 2а, 2б и 3а, 3б.

Теперь покажем, что операторы (1.4) можно интерпретировать как алгебру Ли косоэрмитовых операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R)$ комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на вещественной прямой (гл. 1, (5.2)). С этой целью рассмотрим формальное ограничение операторов (1.4) на пространство решений уравнения (1.2). Тогда мы можем заменить в этих выражениях $\partial_t$ на $i\partial_{xx}$ и рассматривать $t$ как параметр. Легко видеть, что полученные операторы будут кососимметрическими, если их рассматривать на подпространстве $\mathcal{D} \subset L_2(R)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Более того, умножив каждый из этих операторов на $i$, получим оператор, допускающий единственное самосопряженное расширение. В самом деле, операторы (1.4) являются вещественными линейными комбинациями операторов

$$\mathcal{K}_2 = ix^2/4, \qquad \mathcal{K}_1 = ix/2,$$
$$\mathcal{K}_{-1} = \partial_x, \quad \mathcal{K}_{-2} = i\partial_{xx}, \quad \mathcal{K}_0 = i, \quad \mathcal{K}^0 = x\partial_x + 1/2, \quad (1.24)$$

и $i\mathcal{K}_j$, $i\mathcal{K}^0$ имеют единственное самосопряженное расширение. Если параметр $t$ положить равным нулю, то $K_j$ станет равным $\mathcal{K}_j$, а $K^0$ равным $\mathcal{K}^0$. Отсюда следует, что операторы, обозначаемые рукописными буквами, будут удовлетворять соотношениям коммутирования (1.5).

Согласно спектральной теории [112, гл. VIII], каждому косоэрмитовому оператору $\mathcal{H} \in \mathcal{G}_2$ соответствует однопараметрическая группа $U(\alpha) = \exp(\alpha\mathcal{H})$ унитарных операторов в $L_2(R)$. Эта группа в свою очередь действует на $\mathcal{G}_2$ согласно соотношению $\mathcal{K} \to U(\alpha)\mathcal{K}U(-\alpha)$. В частности, имеет место следующий

результат, важнейший в квантовой механике:

$$\exp(a\mathcal{K}_{-2})f(x) = \\ = \text{l. i. m.}\,(4\pi ia)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-(x-y)^2/4ia]\,f(y)\,dy, \qquad (1.25)$$
$$f \in L_2(R), \quad a \neq 0.$$

(Здесь $(ia)^{1/2} = e^{\pi i/4}|a|^{1/2}$ при $a > 0$ и $(ia)^{1/2} = e^{-\pi i/4}|a|^{1/2}$ при $a < 0$. Доказательство (1.25) см. в [67].) Можно проверить, что

$$\begin{aligned} \exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}_j\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) &= K_j, \\ \exp(t\mathcal{K}_{-2})\,\mathcal{K}^0\exp(-t\mathcal{K}_{-2}) &= K^0. \end{aligned} \qquad (1.26)$$

(Формальное доказательство легко получить на основании соотношений коммутирования (1.5), но строгое доказательство с точно установленными областями определения операторов значительно труднее.)

Далее, если $f \in L_2(R)$ и $f$ принадлежит области определения косоэрмитова оператора $\mathcal{K}_{-2}$, то $\Psi(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathcal{K}_{-2}\Psi$ или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi$ для почти всех $t$ и удовлетворяет условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Понятно, что $\exp(t\mathcal{K}_{-2})$ является известным в квантовой механике оператором сдвига по времени [72, 110]. Более того, это унитарный оператор, поскольку интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(t, x)\overline{\Psi}_2(t, x)\,dx = \langle\exp(t\mathcal{K}_{-2})f_1, \exp(t\mathcal{K}_{-2})f_2\rangle = \\ = \langle f_1, f_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f}_2(x)\,dx \qquad (1.27)$$

не зависит от времени. Мы ввели структуру гильбертова пространства на совокупности решений уравнения (1.2), в точности согласующуюся с обычным гильбертовым пространством состояний, отвечающим свободной частице. Более того, соотношения (1.26), определяющие зависимости между операторами в момент времени $t = 0$ (рукописные буквы) и операторами в момент времени $t$ (обычные буквы), суть не что иное, как обычные соотношения связи между гейзенберговской и шредингеровской картинами в квантовой теории [110, 139]. Легко видеть, что унитарные операторы

$$\exp(\alpha K) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})\exp(\alpha\mathcal{K})\exp(-t\mathcal{K}_{-2})$$

отображают элементы $\Psi$ гильбертова пространства решений уравнения (1.2) в $\Phi = \exp(\alpha K)\Psi$, которые также являются решениями уравнения (1.2). Отсюда следует, что унитарные опе-

раторы $\exp(\alpha K)$ являются операторами симметрии уравнения (1.2).

Впоследствии мы увидим, что операторы $\mathscr{K}$ порождают глобальное унитарное представление накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы $G_2$, но не самой $G_2$. Принимая этот факт, допустим, что $\mathbf{U}(g)$, $g \in \tilde{G}_2$, — соответствующие унитарные операторы, и положим $\mathbf{T}(g) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$. Легко доказать, что $\mathbf{T}(g)$ — унитарные операторы симметрии уравнения (1.2) и что соответствующие инфинитезимальные операторы суть $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$.

Рассмотрим оператор $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} - ix^2/4 \in \mathscr{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_3)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_3\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + x^2\Psi/4$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Подобным образом унитарные операторы $\mathbf{V}(g) = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_3)$ являются операторами симметрии для последнего уравнения, т. е. уравнения Шредингера линейного гармонического осциллятора, фигурирующего в табл. 5 под номером (2). (В данном случае мы нормируем потенциал, приняв $k = {}^1/_4$.) Легко проверить, что соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$ можно представить в виде дифференциального оператора первого порядка по переменным $x$, $t$. (В частности, эти операторы будут вещественными линейными комбинациями базисных операторов (1.24) с коэффициентами, зависящими от $t$. Рассматривая действия этих операторов в пространстве решений уравнения Шредингера гармонического осциллятора, мы можем везде заменить $i\partial_{xx}$ на $\partial_t + ix^2/4$.)

Обратно, если $K'$ — оператор симметрии первого порядка для уравнения Шредингера гармонического осциллятора, то можно показать что при $t = 0$ оператор $K'$ сводится к вещественной линейной комбинации операторов (1.24). Отсюда следует, что каждая из алгебр операторов симметрии для уравнений с потенциалами (1) и (2) табл. 5 будет изоморфна алгебра $\mathscr{G}_2$ с базисом (1.24). Для уравнения свободной частицы операторы симметрии суть $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$, в то время как для уравнения гармонического осциллятора такими операторами являются $K' = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$. В обоих случаях операторы $\mathscr{K}$ одни и те же. Более того, при фиксированном $\mathscr{K}$ операторы $K$ и $K'$ унитарно эквивалентны, $K' = A(t)KA^{-1}(t)$, хотя унитарный оператор $A(t) = \exp(t\mathscr{L}_3)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$ зависит от $t$.

Продолжая подобным образом, рассмотрим оператор $\mathscr{L}_2 = \mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2 = i\partial_{xx} + ix^2/4 \in \mathscr{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{L}_2)f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_2\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi - x^2\Psi/4$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$.

Операторы $\mathbf{W}(g) = \exp(t\mathscr{L}_2)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_2)$ образуют группу унитарных операторов симметрии последнего уравнения, т. е. уравнения линейного репульсивного осциллятора ((3) в табл. 5); соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_2)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_2)$ суть операторы первого порядка по $x$ и $t$. Наконец, рассмотрим оператор $\mathscr{W} = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1 = i\partial_{xx} - ix/2 \in \mathscr{G}_2$. Если $f \in L_2(R)$, то функция $\Psi(t, x) = \exp(t\mathscr{W})f(x)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{W}\Psi$, или $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + x\Psi/2$, и условию $\Psi(0, x) = f(x)$. Унитарные операторы $\mathbf{X}(g) = \exp(t\mathscr{W})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{W})$ суть операторы симметрии для уравнения Шредингера с линейным потенциалом, а инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{W})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{W})$ имеют первый порядок по $x$ и $t$.

Из (1.20) следует, что операторы $\mathscr{K}_{-2}$, $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1$, отвечающие гамильтонианам свободной частицы, гармонического осциллятора, линейного репульсивного осциллятора и линейного потенциала, лежат на тех же самых $G_2$-орбитах, что и четыре представителя $\mathscr{K}_{-2}$, $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{K}^0$ и $\mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1}$ соответственно. Таким образом, эти четыре гамильтониана в точности соответствуют четырем системам координат, в которых уравнение (1.2) допускает разделение переменных. Мы видим, что эти гамильтонианы образуют полное множество представителей орбит в $\mathscr{G}_2$.

Отсюда следует, что уравнения Шредингера с потенциалами (1)—(4) в табл. 5 имеют изоморфные алгебры симметрии. Если мы подсчитаем операторы симметрии при $t = 0$, то в каждом случае получим алгебру Ли $\mathscr{G}_2$ с базисом (1.24). Хотя мы вначале получили эту алгебру симметрии, изучая уравнение Шредингера с потенциалом (1), можно равным образом получить ее, изучая уравнения с потенциалами (2), (3) или (4). Более того, в предыдущих абзацах мы видели, как построить (зависящие от времени) унитарные операторы в $L_2(R)$, которые отображают решения одного из этих уравнений в решения другого уравнения. Эти четыре уравнения могут и должны изучаться совместно.

Теперь можно сделать явной связь между орбитами и разделением переменных. Предположим, что $\Psi(t, x)$ — решение уравнения для свободной частицы

$$i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi. \tag{1.28}$$

Ясно, что это уравнение допускает разделение в переменных $\{t, x\}$ и что эти переменные «естественным» образом ассоциированы с данным уравнением. Мы видим, что оператор $A(t) = \exp(t\mathscr{L}_3)\exp(-t\mathscr{K}_{-2}) = \exp(-t\mathscr{K}_{-2})\exp(t\mathscr{L}_3)$ отображает $\Psi$ в $\Phi(t, x) = A(t)\Psi(t, x)$ — в решение уравнения для гармонического осциллятора

$$i\partial_t\Phi = -\partial_{xx}\Phi - x^2\Phi/4. \tag{1.29}$$

Это решение нетрудно записать в явном виде:

$$\Phi(t, x) = (\cos t)^{-1/2}\exp(-ix^2\operatorname{tg}(t)/4)\,\Psi(\operatorname{tg} t,\ x/\cos t).$$

Но уравнение (1.29) «естественно» допускает разделение в переменных $\{t, x\}$, и поэтому мы можем найти решение $\Psi$ уравнения (1.28) в виде

$$\begin{gathered}\Psi(t, x) = (1+v^2)^{-1/4}\exp(iu^2v/4)\,\Phi(\operatorname{arctg} v,\ u),\\ x = u(1+v^2)^{1/2}, \quad t = v.\end{gathered} \tag{1.30}$$

Так как уравнение (1.29) допускает разделение в переменных $\{\operatorname{arctg} v, u\}$, а значит, и в переменных $\{v, u\}$, отсюда следует, что в (1.28) переменные $R$-разделяются в координатах $\{v, u\}$, причем множитель $R = e^{i\mathcal{R}}$ определяется значением $\mathcal{R} = iu^2v/4$. (Множитель $(1+v^2)^{-1/4}$ может быть включен в соответствующий сомножитель при разделении переменных.) Таким образом, мы объяснили существование в табл. 6 координат 4, связанных с оператором $\mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_2$. Подобными рассуждениями мы можем связать с каждым из четырех гамильтонианов «естественную» систему координат так, что они исчерпают возможные неэквивалентные по отношению к $G_2$ системы координат, допускающие решения с $R$-разделенными переменными.

Заметим, что если два оператора принадлежат одной и той же $G_2$-орбите, то первый оператор унитарно эквивалентен второму, умноженному на вещественную константу. Таким образом, два соответствующим образом нормированных оператора, принадлежащих одной и той же орбите, имеют тот же самый спектр. В частности, если $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \in \mathcal{G}_2$, $\mathcal{K}' = \mathbf{U}(g)\mathcal{K}\mathbf{U}(g^{-1})$ и множество (возможно, обобщенных) собственных векторов $f_\lambda(x)$ самосопряженного оператора $i\mathcal{K}$ полно,

$$i\mathcal{K}f_\lambda = \lambda f_\lambda, \qquad \langle f_\lambda, f_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu}, \tag{1.31}$$

где

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x)\bar{h}_2(x)\,dx, \qquad h_j \in L_2(R), \tag{1.32}$$

то для $f'_\lambda = \mathbf{U}(g)f_\lambda$ имеем

$$i\mathcal{K}'f'_\lambda = \lambda f'_\lambda, \qquad \langle f'_\lambda, f'_\mu\rangle = \delta_{\lambda,\mu} \tag{1.33}$$

и $f'_\lambda$ образуют полное множество собственных векторов оператора $i\mathcal{K}'$ [98]. Из этого замечания следует, что если мы хотим вычислить спектр, соответствующий любому оператору $\mathcal{K} \in \mathcal{G}_2$, то достаточно вычислить спектр для четырех гамильтонианов,

упомянутых выше. Более того, мы в состоянии выбрать другой оператор $\mathscr{K}$ таким образом, чтобы его спектральное разложение получалось особенно просто и чтобы он принадлежал той же $G_2$-орбите, что и данный гамильтониан. Спектральное разложение гамильтониана и соответствующее разложение по собственным функциям будет непосредственно получаться из разложения для $\mathscr{K}$ применением группового оператора $\mathbf{U}(g)$.

Как частный случай последнего замечания рассмотрим оператор $\mathscr{K}_{-2} = i\partial_{xx}$. Если $\{f_\lambda\}$ — базис обобщенных собственных векторов некоторого оператора $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_2$, то $\{\Psi_\lambda = \exp(t\mathscr{K}_{-2})f_\lambda\}$ — базис обобщенных собственных векторов оператора $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$, а $\Psi_\lambda$ удовлетворяет уравнению Шредингера для свободной частицы (1.28). Аналогичное замечание справедливо и для остальных гамильтонианов.

Вычислим в явном виде спектральное разложение оператора $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2$. (Эти результаты известны, см. [52].) Уравнение для определения собственных функций имеет вид

$$i\mathscr{L}_3 f = \lambda f, \qquad (-\partial_{xx} + x^2/4) f = \lambda f,$$

и поэтому нормированные собственные функции запишутся в виде

$$f_n^{(4)}(x) = [n!\,(2\pi)^{1/2}\,2^n\}^{-1/2} \exp(-x^2/4)\, H_n(x/\sqrt{2}), \tag{1.34}$$

$$\lambda_n = n + {}^1/_2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \langle f_n^{(4)}, f_m^{(4)}\rangle = \delta_{nm},$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита (Б.12). Функции $\{f_n^{(4)}\}$ образуют о. н. базис в $L_2(R)$.

Из (1.34) следует, что

$$\exp(2\pi\mathscr{L}_3) f_n^{(4)} = \exp[-2\pi i(n + {}^1/_2)]\, f_n^{(4)} = -f_n^{(4)},$$

и поэтому $\exp(2\pi\mathscr{L}_3) = -E$, где $E$ — единичный оператор в $L_2(R)$. Однако если бы операторы $\exp(\alpha\mathscr{K})$ порождали глобальное унитарное представление $G_2$ в $L_2(R)$, то в силу (1.17) мы должны были бы иметь $\exp(2\pi\mathscr{L}_3) = E$. В самом деле, можно показать, что экспоненты операторов $\mathscr{K}$ приводят к глобальному неприводимому представлению односвязной накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы $G_2$.

Для описания этой накрывающей группы рассмотрим сначала топологию многообразия $SL(2, R)$ (см. (1.8)),

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Полагая

$$2a = \alpha + \delta + i(\gamma - \beta), \qquad 2b = -\alpha + \delta + i(\gamma + \beta), \tag{1.35}$$

мы замечаем, что комплексные числа $a$ и $b$ удовлетворяют тождеству

$$|a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{1.36}$$

Обратно, если $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ — два числа, удовлетворяющие соотношению (1.36), то по формулам (1.35) получаем единственную матрицу $A \in SL(2, R)$ с элементами $\alpha = a_1 - b_1$, $\beta = -a_2 + b_2$, $\gamma = a_2 + b_2$, $\delta = a_1 + b_1$. Из (1.36) следует, что топологически многообразие $SL(2, R)$ можно отождествить с гиперболоидом

$$a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 1.$$

Баргманн [11] дает иную параметризацию $SL(2, R)$. Он полагает

$$\mu = b/a, \qquad \omega = \arg a, \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi \pmod{2\pi}. \tag{1.37}$$

Из (1.36) следует, что $|\mu| < 1$. Таким образом,

$$a = e^{i\omega}(1 - |\mu|^2)^{-1/2}, \qquad b = e^{i\omega}\mu(1 - |\mu|^2)^{-1/2}. \tag{1.38}$$

Мы можем записать $A \equiv (\mu, \omega)$, $|\mu| < 1$, $-\pi < \omega \leqslant \pi$, и параметризовать $SL(2, R)$ при помощи величин $\mu$ и $\omega$. Групповое произведение можно представить следующим образом. Если $A = (\mu, \omega)$ и $A' = (\mu', \omega')$, то $AA' = (\mu'', \omega'')$, где

$$\begin{aligned} \mu'' &= (\mu + \mu' e^{-2i\omega})(1 + \bar{\mu}\mu' e^{-2i\omega})^{-1}, \\ \omega'' &= \omega + \omega' + [1/(2i)] \ln\left[(1 + \bar{\mu}\mu' e^{-2i\omega})(1 + \mu\bar{\mu}' e^{2i\omega})^{-1}\right], \end{aligned} \tag{1.39}$$

причем $\ln z$ означает главное значение логарифма ($\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$), а $\omega'$ определяется по $\bmod 2\pi$. Легко проверить, что $\mu$, $\omega$ являются соответствующими параметрами группы Ли [120]. Мы можем топологически охарактеризовать $SL(2, R)$ как произведение открытого круга $|\mu| < 1$ и окружности $-\pi < \omega \leqslant \pi$, $\bmod 2\pi$.

Универсальная накрывающая группа $\widetilde{SL}(2, R)$ группы $SL(2, R)$ — это группа Ли с элементами

$$\widetilde{SL}(2, R) = \{\{\mu, \omega\}: |\mu| < 1, -\infty < \omega < \infty\}.$$

Здесь разным значениям $\omega$ соответствуют различные элементы группы. Групповое умножение определяется по формулам (1.39), за исключением того, что теперь $\omega''$ не определяется по $\bmod 2\pi$. Имеется гомоморфизм $\widetilde{SL}(2, R)$ в $SL(2, R)$, определяемый соотношением $\{\mu, \omega\} \to \{\mu, \omega\}$, причем элементы $\{0, 2\pi n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, группы $\widetilde{SL}(2, R)$ — это в точности те элементы, которые отображаются в единичный элемент $(0, 0)$ группы $SL(2, R)$.

Наконец, легко проверить, что элементы группы $\widetilde{SL}(2, R)$ можно представить в виде

$$\{\mu, \omega\} = \{0, -\theta/2\}\{r, 0\}\{0, \omega + \theta/2\}, \qquad \mu = re^{i\theta}, \tag{1.40}$$

и если $r > 0$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$, то это представление единственно.

Теперь непосредственно покажем, что экспоненты операторов $\mathscr{K}$ дают глобальное унитарное неприводимое представление односвязной накрывающей группы $\tilde{G}_2$ группы $G_2$. В самом деле, на основании известных рекуррентных формул для многочленов Эрмита легко убедиться в том, что операторы $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на базис $\{f_n^{(4)}\}$, определяют принадлежащее к дискретной серии приводимое представление алгебры $sl(2, R)$. (Мы докажем эти рекуррентные формулы в разд. 2.2.) Оператор Казимира $^1/_4(\mathscr{L}_1^2 + \mathscr{L}_2^2 - \mathscr{L}_3^2)$ принимает значение, равное $-^3/_{16}$. Как показал впервые Баргманн [11] (см. также [120]), это представление алгебры Ли продолжается до глобального унитарного приводимого представления $\widetilde{SL}(2, R)$.

Аналогично операторы $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на базис $\{f_n^{(4)}\}$, определяют неприводимое представление $(\lambda, l) = (-^1/_2, 1)$ алгебры Ли группы гармонического осциллятора $S$ [83]. Это представление алгебры Ли, как известно, также порождает глобальное унитарное неприводимое представление группы $S$ [81, 87]. Из соотношения (1.40) следует, что каждый оператор на $\widetilde{SL}(2, R)$ может быть записан в виде

$$\exp(-(\theta/2)\mathscr{L}_3)\exp(-\tau\mathscr{L}_1)\exp\{[\theta/2 + \omega]\mathscr{L}_3\},$$

где $2\tau = \ln[(1+r)/(1-r)]$, причем $\exp(\theta\mathscr{L}_3)$ принадлежит $S$; поскольку $\mathscr{L}$ — оператор первого порядка, экспоненту которого легко вычислить, можно проверить, что в общем случае соотношения (1.18) имеют место. (Для этого мы заменяем $\mathbf{T}(A)$ на $\exp(-(\theta/2)\mathscr{L}_3)\exp(-\tau\mathscr{L}_1)\exp\{[\theta/2 + \omega]\mathscr{L}_3\}$ и используем соотношения (1.35), (1.37), (1.38), (1.40), чтобы выразить $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ в правой части (1.18) через $\theta$, $\tau$, $\omega$.) Формулы (1.19) определяют $\tilde{G}_2$ как полупрямое произведение $\widetilde{SL}(2, R)$ и $W_1$. Поэтому наше представление $\mathscr{G}_2$ продолжается до глобального унитарного представления $\mathbf{U}$ группы $\tilde{G}_2$, которое неприводимо, поскольку неприводимо $\mathbf{U}|S$.

Унитарные операторы $\mathbf{U}(g)$ в $L_2(R)$ легко вычислить. Оператор

$$\mathbf{U}(u, v, \rho) = \exp([\rho + uv/4]\mathscr{E})\exp(u\mathscr{C}_2)\exp(v\mathscr{C}_1),$$

определяющий представление $W_1$, принимает вид

$$\mathbf{U}(u, v, \rho)h(x) = \exp[i(\rho + uv/4 + ux/2)]\,h(x+v), \qquad h \in L_2(R). \tag{1.41}$$

Операторы $\mathbf{U}\{\mu, \omega\}$, $\{\mu, \omega\} \in \widetilde{SL}(2, R)$, более сложны. Здесь $\exp(a\mathscr{K}_{-2})$ дается формулой (1.25), и можно элементарно показать, что

$$\exp(b\mathscr{K}^0)\, h(x) = \exp(b/2)\, h(e^b x), \qquad \exp(c\mathscr{K}_2)\, h(x) = \\ = \exp(icx^2/4)\, h(x). \tag{1.42}$$

Из соотношений (1.17), (1.39) следует, что

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2) = \exp(\operatorname{th}\varphi\mathscr{K}_2)\exp(\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi\mathscr{K}_{-2})\exp[-\ln\operatorname{ch}\varphi\mathscr{K}^0],$$

и поэтому (1.25) и (1.42) дают

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2)\, h(x) = \\ = \frac{\exp[(ix^2/4)\operatorname{th}\varphi]}{(4\pi i\operatorname{sh}\varphi)^{1/2}}\, \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(x - y\operatorname{ch}\varphi)^2}{4i\operatorname{sh}\varphi\operatorname{ch}\varphi}\right] h(y)\, dy, \tag{1.43}$$
$$\varphi \neq 0.$$

Аналогичные вычисления для $\exp(\theta\mathscr{L}_3)$ дают

$$\exp(\theta\mathscr{L}_3)\, h(x) = \\ = \frac{\exp[(ix^2/4)\operatorname{ctg}\theta]}{(4\pi i\sin\theta)^{1/2}}\, \text{l. i. m.} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(y^2\cos\theta - 2xy)}{4i\sin\theta}\right] h(y)\, dy, \tag{1.44а}$$
$$0 < |\theta| < \pi,$$

$$\exp(2\pi\mathscr{L}_3)\, h(x) = -h(x). \tag{1.44б}$$

Из этих формул можно получить общий групповой оператор $\mathbf{U}(g)$.

Из (1.25) следует, что о. н. базис $\{f_n^{(4)}(x)\}$ отображается в о. н. базис функций $F_n^{(4)}(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\, f_n^{(4)}(x)$,

$$F_n^{(4)}(t, x) = \{n!\, 2^n [2\pi(1 + t^2)]^{1/2}\}^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{4}\frac{x^2 t}{1 + t^2} - \frac{x^2}{4(1 + t^2)} - \right. \\ \left. - i(n + 1/2)\operatorname{arctg} t\right) H_n\{x/[2(1 + t^2)]^{1/2}\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.45}$$

которые являются решениями уравнения (1.28). Этот результат можно вывести из формулы (1.30) или получить на основании строки 4 табл. 6. В самом деле, мы знаем, что в выражении (1.45) переменные $\{u, v\}$ $R$-разделяются, если принять $u = x/(1 + t^2)^{1/2}$, $v = t$, $\mathscr{R} = iu^2 v/4$. Применяя стандартные методы, изложенные в гл. 1, мы получим выражение (1.45).

Теперь исследуем спектральную теорию для орбит, содержащих операторы $\mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2$ (репульсивный осциллятор) и $\mathscr{K}^0$.

Спектральный анализ оператора $\mathscr{K}^0$ более элементарен, и сначала мы рассмотрим его. (Соответствующие результаты для оператора $\mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2$ будут следовать из полученных, если при-

менить унитарный оператор $\mathcal{J} = \exp(-(\pi/4)\mathcal{L}_3)$ и соотношения (1.21), (1.23).) Уравнение на собственные значения имеет вид

$$i\mathcal{K}^0 f = \lambda f, \qquad \mathcal{K}^0 = x\partial_x + {}^1/_2.$$

Спектральное разложение этого оператора известно [37]. Чтобы получить его, разложим $L_2(R)$ в прямую сумму пространств $L_2(R_-) \oplus L_2(R_+)$ функций, интегрируемых с квадратом соответственно на отрицательной полуоси и положительной полуоси, а затем сделаем преобразование Меллина каждой компоненты. В результате оператор $i\mathcal{K}^0$ преобразуется в оператор умножения на независимую переменную трансформанты Меллина. Таким образом получаем, что спектр оператора непрерывен и двукратно покрывает всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции имеют вид

$$\begin{gathered} f_\lambda^{(3)\pm}(x) = (2\pi)^{-1/2} x_\pm^{-i\lambda-1/2}, \qquad -\infty < \lambda < \infty, \\ \langle f_\lambda^{(3)\pm}, f_\mu^{(3)\pm}\rangle = \delta(\lambda-\mu), \qquad \langle f_\lambda^{(3)\pm}, f_\mu^{(3)\mp}\rangle = 0, \end{gathered} \tag{1.46}$$

где

$$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0; \end{cases} \qquad x_-^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ (-x)^\alpha, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

При помощи соотношения (1.25) находим $F_\lambda^{(3)\pm}(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}^0) f_\lambda^{(3)\pm}(x)$:

$$\begin{aligned} F_\lambda^{(3)\pm}(t, x) = \exp\left(-\frac{x^2}{8it} + \frac{\pi\lambda}{4} + \frac{i\pi}{8}\right) \frac{(2t)^{-i\lambda/2+1/4}}{(8\pi^2 it)^{1/2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\lambda\right) D_{i\lambda-1/2}\left(-\frac{xe^{-i\pi/4}}{(2t)^{1/2}}\right), \qquad t > 0; \end{aligned} \tag{1.47}$$

здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция (приложение Б, разд. 1), а $D_\nu(z)$ — функция параболического цилиндра (приложение Б, разд. 4). (Это соотношение получается из формулы (1.25) изменением пути интегрирования: мы заменяем положительную вещественную полуось на луч, образующий с вещественной осью угол $\pi/4$, а также используем тот факт, что, согласно строке 3а табл. 6, в координатах $u = x/\sqrt{t}$, $v = t$ имеет место чистое разделение переменных.) Имеем также

$$F_\lambda^{(3)+}(t, x) = F_{-\lambda}^{(3)+}(-t, x), \qquad F_\lambda^{(3)-}(t, x) = F_\lambda^{(3)+}(t, -x). \tag{1.48}$$

Из формул (1.46) непосредственно следует, что $\{F_\lambda^{(3)\pm}\}$ образуют базис в $L_2(R)$, а соотношения ортогональности имеют вид

$$\langle F_\lambda^{(3)\pm}, F_\mu^{(3)\pm}\rangle = \delta(\lambda-\mu), \qquad \langle F_\lambda^{(3)\pm}, F_\mu^{(3)\mp}\rangle = 0 \tag{1.49}$$

для любого фиксированного $t$. Используя эти соотношения ортогональности и полноты для разложения произвольной функции $h \in L_2(R)$, получим вариант теоремы Черри для гильбертова пространства [17, 137], дающей разложение по функциям параболического цилиндра. Заметим, что наше разложение имеет простую связь со спектральным разложением оператора

$$K^0 = 2t\partial_t + x\partial_x + {}^1/_2 = 2it\partial_{xx} + x\partial_x + {}^1/_2.$$

Следующая орбита, которую мы рассмотрим, содержит операторы $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1$ (линейный потенциал) и $\mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1}$. Мы изучим второй оператор, поскольку спектральный анализ для него проще. (Соответствующие результаты для оператора $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_1$ будут следовать из полученных, если применить унитарный оператор $\mathscr{T}^2 = \exp[-(\pi/2)\mathscr{L}_3]$ и соотношения (1.21)—(1.23).) Уравнение на собственные значения имеет вид

$$i(\mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1})f = \lambda f, \qquad \mathscr{K}_2 + \mathscr{K}_{-1} = ix^2/4 + \partial_x.$$

Спектральное разложение легко получить на основании теоремы об интегралах Фурье. Спектр оказывается непрерывным и заполняет всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции образуют базис и имеют вид

$$\begin{gathered} f_\lambda^{(2)}(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp[-i(\lambda x + x^3/12)], \qquad -\infty < \lambda < \infty, \\ \langle f_\lambda^{(2)}, f_\mu^{(2)}\rangle = \delta(\lambda - \mu). \end{gathered} \tag{1.50}$$

Мы находим, что

$$\begin{gathered} F_\lambda^{(2)}(t, x) = \\ = \exp\left[-\frac{i}{4}\left(\pi + \frac{1}{8v^2} - u^2 v + \frac{u}{v} + \frac{4\lambda}{v}\right)\right] 2^{1/6}\,\mathrm{Ai}\left[2^{2/3}\left(\frac{u}{2} + \lambda\right)\right], \\ x = uv + (2v)^{-1}, \quad t = v, \end{gathered} \tag{1.51}$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри

$$\mathrm{Ai}(z) = \pi^{-1}(z/3)^{1/2} K_{1/3}(2z^{3/2}/3), \qquad |\arg z| < 2\pi/3. \tag{1.52}$$

Как обычно, мы выводим формулу (1.51), применяя $R$-разделение переменных к соотношению (1.25). Функции $\{F_\lambda^{(2)}\}$ суть базисные функции оператора

$$K_2 + K_{-1} = -it^2\partial_{xx} + (1 - tx)\partial_x - t/2 + ix^2/4.$$

Наконец, множество обобщенных собственных функций оператора $\mathscr{K}_{-1} = \partial_x$ полно; эти функции имеют вид

$$\begin{gathered} f_\lambda^{(1)}(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-i\lambda x}, \qquad -\infty < \lambda < \infty, \\ i\mathscr{K}_{-1} f_\lambda^{(1)} = \lambda f_\lambda^{(1)}, \quad \langle f_\lambda^{(1)}, f_\mu^{(1)}\rangle = \delta(\lambda - \mu). \end{gathered} \tag{1.53}$$

Далее,

$$F_\lambda^{(1)}(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_\lambda^{(1)}(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(i\lambda^2 t - i\lambda x). \qquad (1.54)$$

Если $\{f_\lambda(x)\}$ — базис (обобщенных) собственных функций некоторого оператора $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_2$ и $F_\lambda(t, x) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_\lambda(x)$, то $F_\lambda(\tau, x) = \exp([\tau - t]\mathscr{K}_{-2}) F_\lambda(t, x)$, и мы имеем в гильбертовом пространстве следующие разложения:

$$\begin{aligned} k(t, x-y) &= \int F_\lambda(t, x) \bar{f}_\lambda(y)\, d\lambda, \\ k(\tau - t, x-y) &= \int F_\lambda(\tau, x) \bar{F}_\lambda(t, y)\, d\lambda, \end{aligned} \qquad (1.55)$$

где областью интегрирования служит спектр оператора $i\mathscr{K}$, а функция

$$k(t, x) = (4\pi i t)^{-1/2} \exp(-x^2/(4it))$$

является ядром интегрального оператора $\exp(t\mathscr{K}_{-2})$. Эти разложения известны как непрерывные аналоги производящих функций [124, 143].

Теперь мы вычислим м. э. с. б. $\langle f_\lambda^{(i)}, f_\mu^{(j)} \rangle$, которые позволяют получить разложения собственных функций $f_\lambda^{(i)}$ по собственным функциям $f_\mu^{(j)}$. Поскольку $\langle \mathbf{U}(g) f_\lambda^{(i)}, \mathbf{U}(g) f_\mu^{(j)} \rangle = \langle f_\lambda^{(i)}, f_\mu^{(j)} \rangle$, те же самые выражения позволяют разложить собственные функции $\mathbf{U}(g) f_\lambda^{(i)}$ по собственным функциям $\mathbf{U}(g) f_\mu^{(j)}$. В частности, при $\mathbf{U}(g) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})$ мы имеем $\langle F_\lambda^{(i)}, F_\mu^{(j)} \rangle = \langle f_\lambda^{(i)}, f_\mu^{(j)} \rangle$ при любом фиксированном $t$; это позволяет нам разложить функции одного базиса решений уравнения Шредингера для свободной частицы по элементам другого базиса.

Мы приведем здесь некоторые особо интересные м. э. с. б.

$$\langle f_n^{(4)}, f_\lambda^{(3)\pm} \rangle = 2^{3n/2 + i\lambda - 1/2} \frac{\Gamma(i\lambda/2 + 1/4 + n/2)}{2\pi (2^n n!)^{1/2}} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} +1 \\ (-1)^n \end{Bmatrix} {}_2F_1\left( \begin{matrix} -n/2, (1-n)/2 \\ 3/4 - i\lambda/2 - n/2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right). \qquad (1.56)$$

Для определения $\langle f_n^{(4)}, f_\lambda^{(2)} \rangle$ удобнее найти производящую функцию, чем явное выражение. Окончательный результат имеет вид

$$2^{2/3} \exp\{-i[{}^1/_6 + \lambda + (2y)^{1/2}]\} \operatorname{Ai}\{2^{2/3}[{}^1/_4 - i\lambda - i(2y)^{1/2}]\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\, iy)^n}{(n!)^{1/2}} \langle f_n^{(4)}, f_\lambda^{(2)} \rangle. \qquad (1.57)$$

Это выражение получается с использованием производящей функции для многочленов Эрмита, которая будет выведена в

разд. 2.2:

$$\langle f_n^{(4)}, f_\lambda^{(1)}\rangle = [n!\,(-2)^n \pi]^{-1/2} \exp(-\lambda^2) H_n[(2\lambda)^{1/2}], \tag{1.58}$$

$$\langle f_\lambda^{(2)}, f_\mu^{(1)}\rangle = 2^{2/3}\mathrm{Ai}\,[2^{2/3}(\mu - \lambda)]. \tag{1.59}$$

Иные м. э. с. б. можно найти в [58].

Вычисление матричных элементов смешанных базисов $\langle \mathbf{U}(g) f_\lambda^{(i)}, f_\mu^{(j)}\rangle$ позволяет установить значительно большее количество разложений, связывающих решения уравнения Шредингера. Например, имеем

$$\langle \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_n^{(4)}, f_\mu^{(3)+}\rangle = \langle f_n^{(4)}, \exp(-t\mathscr{K}_{-2}) f_\mu^{(3)+}\rangle =$$
$$= \frac{2^{3n/2+i\mu-1/2}(1+it)^{i\mu/2}}{(2\pi)^{3/4}(2^n n!)^{1/2}(1-it)^{n/2+1/4}} \exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{arctg}\, t\right] \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{i\mu}{2}+\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n/2,\ (1-n)/2 \\ 3/4 - i\mu/2 - n/2 \end{matrix}\middle|\ \frac{1-it}{2}\right); \tag{1.60}$$

подобный результат справедлив и для $f_\mu^{(3)-}$. Это соотношение позволяет выразить многочлены Эрмита в виде интегралов от функций параболического цилиндра и, наоборот, разложить функции параболического цилиндра по многочленам Эрмита.

Матричные элементы $\langle \mathbf{U}(g) f_n^{(4)}, f_m^{(4)}\rangle = \langle \mathbf{T}(g) F_n^{(4)}, F_m^{(4)}\rangle$ легко вычисляются и представляют большой интерес. Однако в разд. 2.2 мы будем исследовать комплексное уравнение теплопроводности, применяя для этого метод Вейснера, и получим разложение многочленов Эрмита, которое будет содержать эти матричные элементы как частный случай.

Очень интересно вычислить матричные элементы по отношению к базису $\{f_\lambda^{(3)\pm}\}$ обобщенных собственных векторов оператора $\mathscr{K}^0$. В этом случае теорема сложения для матричных элементов будет иметь интегральный характер. Виленкин [37] вычислил эти матричные элементы для подгруппы группы $\tilde{G}_2$, алгебра Ли которой имеет базис $\{\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_{-1}, \mathscr{K}_0, \mathscr{K}^0\}$. Операторы группы суть $\mathbf{U}(a, b, c, \tau)$, причем

$$\mathbf{U}(a, b, c, \tau)\, h(x) = \exp(a\mathscr{K}_1)\exp(c\mathscr{K}_0)\exp(\tau\mathscr{K}^0)\exp(b\mathscr{K}_{-1})\, h(x) =$$
$$= \exp(\tau/2 + iax/2 + ic)\, h(e^\tau x + b), \tag{1.61}$$
$$a, b, c, \tau \in R, \quad h \in L_2(R).$$

(На основании (1.61) легко определить закон группового умножения.) Виленкин показал, что матричные элементы оператора $\mathbf{U}(a, b, c, \tau)$ в базисе $\{f_\lambda^{(3)\pm}\}$ можно выразить через конфлюентные гипергеометрические функции ${}_1F_1$; результирующая теорема сложения содержит много интересных интегральных тождеств для этих функций. Кроме того, в точности как в аналогичном

случае группы $E(1,1)$ (разд. 1.5), мы можем допустить, что параметр $a$ в (1.61) принимает комплексные значения, и вывести более общие интегральные тождества. Относительно этих результатов см. [37], а также [82].

## 2.2. Уравнение теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в двумерном пространстве-времени (при подходящем выборе масштабов) имеет вид

$$Q\Phi = 0 \qquad Q = \partial_t - \partial_{xx}, \tag{2.1}$$

где $t$, $x$ — вещественные временная и пространственная переменные соответственно [109]. Ясно, что это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (1.2) заменой $t$ на $-it$, и поэтому алгебры симметрий этих уравнений тесно связаны. Действительно, простые вычисления показывают, что алгебра симметрий уравнения (2.1) шестимерна и ее базис состоит из операторов

$$\begin{gathered} H_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + t/2 + x^2/4, \qquad H_1 = t\partial_x + x/2, \\ H_0 = 1, \quad H_{-1} = \partial_x, \quad H_{-2} = \partial_t, \quad H^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + {}^1/_2, \end{gathered} \tag{2.2}$$

для которых выполняются следующие соотношения коммутирования ($H_0$ коммутирует с любым оператором):

$$\begin{gathered} [H^0, H_j] = jH_j, \ j = \pm 2, \pm 1, 0, \quad [H_1, H_2] = [H_{-1}, H_{-2}] = 0, \\ [H_{-1}, H_2] = H_1, \quad [H_{-1}, H_1] = {}^1/_2 H_0, \\ [H_{-2}, H_1] = H_{-1}, \quad [H_{-2}, H_2] = H^0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Вещественную алгебру Ли с базисом (2.2) мы обозначим через $\mathcal{G}_2'$.

Как обычно, можно перейти к экспонентам элементов алгебры $\mathcal{G}_2'$, чтобы получить локальную группу Ли $G_2'$ операторов, действующих в пространстве $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, x)$, аналитических в некоторой данной области $\mathcal{D}$ плоскости $(x, t)$. Операторы $H_{-1}$, $H_1$, $H_0$ образуют базис алгебры Вейля $\mathcal{W}_1$, и соответствующее действие группы Вейля $W_1$ задается операторами

$$\mathbf{T}(u, v, \rho) = \exp([\rho + uv/4]H_0)\exp(uH_1)\exp(vH_{-1}), \tag{2.4}$$

для которых справедливо правило умножения

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(u', v', \rho') = \\ &\qquad = \mathbf{T}(u + u', v + v', \rho + \rho' + (vu' - uv')/4), \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(u, v, \rho)\Psi(t, x) = \\ &\qquad = \exp[\rho + (uv + 2ux + u^2t)/4]\Psi(t, x + v + ut), \qquad \Psi \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$