случае группы $E(1,1)$ (разд. 1.5), мы можем допустить, что параметр a в (1.61) принимает комплексные значения, и вывести более общие интегральные тождества. Относительно этих результатов см. [37], а также [82].

2.2. Уравнение теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в двумерном пространстве-времени (при подходящем выборе масштабов) имеет вид

$$Q\Phi = 0 \qquad Q = \partial_t - \partial_{xx}, \tag{2.1}$$

где t, x — вещественные временная и пространственная переменные соответственно [109]. Ясно, что это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (1.2) заменой t на $-it$, и поэтому алгебры симметрий этих уравнений тесно связаны. Действительно, простые вычисления показывают, что алгебра симметрий уравнения (2.1) шестимерна и ее базис состоит из операторов

$$\begin{gathered} H_2 = t^2\partial_t + tx\partial_x + t/2 + x^2/4, \qquad H_1 = t\partial_x + x/2, \\ H_0 = 1, \quad H_{-1} = \partial_x, \quad H_{-2} = \partial_t, \quad H^0 = x\partial_x + 2t\partial_t + {}^1/_2, \end{gathered} \tag{2.2}$$

для которых выполняются следующие соотношения коммутирования (H_0 коммутирует с любым оператором):

$$\begin{gathered} [H^0, H_j] = jH_j, \ j = \pm 2, \pm 1, 0, \quad [H_1, H_2] = [H_{-1}, H_{-2}] = 0, \\ [H_{-1}, H_2] = H_1, \quad [H_{-1}, H_1] = {}^1/_2 H_0, \\ [H_{-2}, H_1] = H_{-1}, \quad [H_{-2}, H_2] = H^0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Вещественную алгебру Ли с базисом (2.2) мы обозначим через $\mathcal{G}_2'$.

Как обычно, можно перейти к экспонентам элементов алгебры $\mathcal{G}_2'$, чтобы получить локальную группу Ли G_2' операторов, действующих в пространстве $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, x)$, аналитических в некоторой данной области $\mathcal{D}$ плоскости (x, t). Операторы H_{-1}, H_1, H_0 образуют базис алгебры Вейля $\mathcal{W}_1$, и соответствующее действие группы Вейля W_1 задается операторами

$$\mathbf{T}(u, v, \rho) = \exp([\rho + uv/4]H_0)\exp(uH_1)\exp(vH_{-1}), \tag{2.4}$$

для которых справедливо правило умножения

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(u', v', \rho') = \\ &\qquad = \mathbf{T}(u + u', v + v', \rho + \rho' + (vu' - uv')/4), \end{aligned} \tag{2.5}$$

причем

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(u, v, \rho)\Psi(t, x) = \\ &\qquad = \exp[\rho + (uv + 2ux + u^2t)/4]\Psi(t, x + v + ut), \qquad \Psi \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Операторы H_2, H_{-2}, H^0 образуют базис подалгебры, изоморфной $sl(2, R)$, и соответствующее действие $SL(2, R)$ задается операторами

$$\mathbf{T}(A)\Psi(t, x) = \exp\left(-\frac{x^2\beta}{4(\delta + t\beta)}\right)(\delta + t\beta)^{-1/2}\Psi\left(\frac{\gamma + t\sigma}{\delta + t\beta}, \frac{x}{\delta + t\beta}\right), \tag{2.6}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R).$$

Отметим, что

$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(-\beta H_2), \quad \mathbf{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \exp(\gamma H_{-2}),$$
$$\mathbf{T}\begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} = \exp(\alpha H^0). \tag{2.7}$$

Группа $SL(2, R)$ действует на W_1 посредством сопряженного представления

$$\mathbf{T}^{-1}(A)\mathbf{T}(u, v, \rho)\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(u\delta - v\beta, v\alpha - u\gamma, \rho). \tag{2.8}$$

Мы можем теперь определить группу симметрии G_2' как полупрямое произведение $SL(2, R)$ и W_1:

$$g = (A, \mathbf{w}) \in G_2', \quad A \in SL(2, R), \quad \mathbf{w} = (u, v, \rho) \in W_1,$$
$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\mathbf{T}(\mathbf{w}), \tag{2.9}$$
$$\mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g') = \mathbf{T}(AA')[\mathbf{T}^{-1}(A')\mathbf{T}(\mathbf{w})\mathbf{T}(A')]\mathbf{T}(\mathbf{w}') = \mathbf{T}(gg').$$

Ясно, что операторы $\mathbf{T}(g)$ отображают решения (2.1) в решения. Кроме того, G_2' действует на алгебру Ли $\mathcal{G}_2'$ дифференциальных операторов H посредством сопряженного представления

$$H \to H^g = \mathbf{T}(g)H\mathbf{T}^{-1}(g),$$

и это действие разбивает $\mathcal{G}_2'$ на G_2'-орбиты.

Нетрудно показать, что в результате сопряженного представления $\mathcal{G}_2'/\{H_0\}$ разбивается на пять орбит (так же как и в разд. 2.1, мы пренебрегаем центром алгебры $\mathcal{G}_2'$) с соответствующими представителями этих орбит H^0, $H_2 + H_{-2}$, $H_{-2} + H_1$, H_{-2}, H_{-1}. Поскольку на решениях уравнения теплопроводности $H_{-2} = (H_{-1})^2$, с этими пятью орбитами связаны только четыре системы координат, допускающие R-разделение переменных. Окончательные результаты представлены в табл. 7. (Дальнейшие подробности см. в работе [58].) Для каждой системы координат $\{u, v\}$ мы имеем $t = v$.

Особый интерес представляют собственные функции оператора H^0. Согласно табл. 7, эти собственные функции допускают

Таблица 7

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $(\partial_t - \partial_{xx})\,\Phi(t, x) = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор H	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R = e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1	H_{-1}, H_{-2}	$x = u$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение экспоненциальных функций
2	$H_{-2} + H_1$	$x = u + v^2/2$	$\mathcal{R} = -uv/2$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
3	H^0	$x = u\sqrt{v}$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение многочлена Эрмита и экспоненциальной функции
4	$H_2 + H_{-2}$	$x = u(1 + v^2)^{1/2}$	$\mathcal{R} = u^2 v/4$	Произведение функции параболического цилиндра и экспоненциальной функции

разделение переменных в координатах $u = x/\sqrt{t}$, $v = t$. Более того, решения $\Phi_n(t, x)$ уравнения теплопроводности, удовлетворяющие соотношению $H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\Phi_n$, $n = 0, 1, \ldots$, являются *тепловыми многочленами*

$$\Phi_n(t, x) = (i\sqrt{t}/2)^n H_n(ix/2\sqrt{t}). \tag{2.10}$$

(Легко видеть, что эти функции являются многочленами от t и x.) Полная теория разложения решений уравнения теплопроводности по тепловым многочленам дана Розенблюмом и Уиддером [114].

Сама симметрия (2.6) не очень известна, однако один ее частный случай играет важную роль в теории уравнения теплопроводности. Если в (2.6) положить

$$A_0 = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то мы получим симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(A_0)\Psi(t, x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4(1+t)}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{1+t}\right)^{1/2}\Psi\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{(2x)^{1/2}}{t+1}\right), \\ \mathbf{T}(A_0^2)\Psi(t, x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)t^{-1/2}\Psi\left(-\frac{1}{t}, \frac{x}{t}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Симметрия $T(A_0^2)$ называется *преобразованием Аппеля* [4, 14]. Мы включаем это преобразование в группу Ли симметрий.

Известно, что если $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция, заданная на вещественной оси, то существует единственное решение $\Psi(t, x)$ уравнения теплопроводности (2.1), ограниченное и непрерывное по t и x для всех $x \in R$, $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемое по t, дважды непрерывно дифференцируемое по x для всех $x \in R$, $t > 0$ и такое, что $\Psi(0, x) = f(x)$ [109]. Это решение дается формулой

$$\Psi(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2/(4t)] f(y)\, dy = I^t(f). \qquad (2.12)$$

Более того, имеет место соотношение

$$\Psi(t, x) = [4\pi(t-\tau)]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}\right] \Psi(\tau, y)\, dy, \qquad t > \tau, \qquad (2.13)$$

при помощи которого можно получить решение Ψ в момент t, если известно Ψ в более *ранний* момент времени $\tau < t$.

Некоторые теоремы разложения для решений уравнения (2.1) можно получить, используя не зависящую от времени форму

$$(\Psi, \Phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t, x) \bar{\Phi}(-t, x)\, dx,$$

где Ψ, Φ — решения уравнения теплопроводности (см. [114]); тем не менее не все операторы (2.4)—(2.6) унитарны. По-видимому, для данной задачи нет подходящей структуры гильбертова пространства. Однако по аналогии с нашим исследованием уравнения Шредингера можно найти иную весьма полезную модель действия группы. Чтобы получить эту модель, рассмотрим операторы (2.2), ограничив их на пространство решений уравнения теплопроводности. Поэтому в соотношениях (2.2) можно заменить ∂_t на ∂_{xx} и рассматривать t $(t \geqslant 0)$ как фиксированный параметр. Теперь операторы H мы рассматриваем как операторы симметрии для фиксированного времени t. При $t = 0$ эти операторы имеют вид

$$\begin{gathered} \mathscr{H}_2 = x^2/4, \quad \mathscr{H}_1 = x/2, \quad \mathscr{H}_0 = 1, \\ \mathscr{H}_{-1} = \partial_x, \quad \mathscr{H}_{-2} = \partial_{xx}, \quad \mathscr{H}^0 = x\partial_x + 1/2 \end{gathered} \qquad (2.14)$$

и, будучи ограниченными на пространство $\mathscr{F}_0$ бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ на R, имеющих компактный носи-

тель, удовлетворяют обычным соотношениям коммутирования (2.3).

Эта процедура становится более понятной, если заметить, что (2.12) можно представить следующим образом:

$$\Psi(t, x) = I^t(f) = \exp(t\partial_{xx}) f(x) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) f(x), \quad f \in \mathscr{F}_0, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

в результате чего получается аналогия с (1.25). Затем, интегрируя по частям, мы убеждаемся в том, что

$$H \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) \mathscr{H}, \tag{2.16}$$

где $H \in \mathscr{G}_2'$, а $\mathscr{H}$ получается из H в результате подстановки $t = 0$. (Точнее, если $\Psi(t, x) = I^t(f)$, то $H\Psi(t, x) = I^t(\mathscr{H}f)$.) Заметим, что (2.16) — аналог формулы (1.26) с той лишь разницей, что теперь мы избегаем неограниченных операторов $\exp(-t\mathscr{H}_{-2})$, $t > 0$. Теория, приводящая к (2.16), была, по-видимому, впервые разработана Хида [133].

Подобным образом можно установить соотношение

$$\exp(aH) \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) \exp(a\mathscr{H}). \tag{2.17}$$

Так же как и в предыдущем разделе, можно показать, что все уравнения

$$\partial_t \Psi(t, x) = (\partial_{xx} + ax\partial_x + b\partial_x + cx^2 + dx + e) \Psi(t, x), \tag{2.18}$$
$$a, \ldots, e \in R,$$

имеют алгебры симметрии, изоморфные алгебре $\mathscr{G}_2'$, и что в действительности все эти уравнения эквивалентны.

Приведем пример, предложенный Розенкрансом [115], который рассмотрел эту эквивалентность и показал, как ею можно воспользоваться для решения задачи Коши для каждого из уравнений (2.18). (Мы приведем формальные рассуждения; строгая проверка полученного результата не составит труда.)

Найдем ограниченное решение $\Phi(t, x)$ уравнения теплопроводности с линейным сносом

$$\partial_t \Phi = \partial_{xx}\Phi - kx\partial_x\Phi, \qquad k > 0 \tag{2.19}$$

для всех $t > 0$, такое, что $\Phi(0, x) = f(x)$, где функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на вещественной оси. Формулу (2.19) можно представить в виде

$$\partial_t \Phi = (\mathscr{H}_{-2} - k\mathscr{H}^0 + (k/2)\mathscr{H}_0)\Phi, \quad \Phi(0, x) = f(x),$$

или

$$\Phi(t, x) = \exp[t(\mathscr{H}_{-2} - k\mathscr{H}^0 + (k/2)\mathscr{H}_0)] f(x).$$

Так как операторы $\mathscr{H}$ удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования, что и операторы H, мы можем, используя вы-

ражения (2.7) и закон группового умножения в $SL(2, R)$, вычислить произведение экспонент операторов $\mathscr{H}_{-2}$, $\mathscr{H}^0$, $\mathscr{H}_0$. Находим

$$\exp\{t[\mathscr{H}_{-2} - k\mathscr{H}^0 + (k/2)\mathscr{H}_0]\} =$$
$$= \exp[(tk/2)\mathscr{H}_0]\exp(-tk\mathscr{H}_0)\exp\{[(1-e^{-2kt})/(2k)]\mathscr{H}_{-2}\} =$$
$$= \exp[(tk/2)\mathscr{H}_0]\exp\{[(e^{2kt}-1)/(2k)]\mathscr{H}_{-2}\}\exp(-tk\mathscr{H}^0). \quad (2.20)$$

Из (2.12), (2.15) и соотношения

$$\exp(-tk\mathscr{H}^0)\,h(x) = \exp(-tk/2)\,h(\exp(-tk)\,x)$$

(которое легко проверить) получаем решение задачи Коши для уравнения (2.19):

$$\Phi(t, x) = \left\{\frac{2\pi}{k}[1-\exp(-2kt)]\right\}^{-1/2} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{k[\exp(-tk)\,x - y]^2}{2[1-\exp(-2kt)]}\right\} f(y)\,dy. \quad (2.21)$$

Теперь изучим комплексное уравнение теплопроводности, т. е. уравнение (2.1) в предположении, что t и x принимают комплексные значения. Легко показать, что алгебра $\mathscr{G}_2^c$ симметрий этого уравнения шестимерна, причем ее базис дается формулами (2.2), а соотношения коммутирования имеют вид (2.3). Но теперь алгебра Ли образована всеми *комплексными* линейными комбинациями элементов базиса. Можно перейти к экспонентам элементов алгебры $\mathscr{G}_2^c$, чтобы получить локальную группу Ли G_2^c операторов, действующих на пространстве $\mathscr{F}$ функций $\Psi(t, x)$, аналитических в некоторой заданной области $\mathscr{D}$ комплексной плоскости (x, t). Действие этой группы определяется формулами (2.4)—(2.9), в которых параметры u, v, ρ могут принимать произвольные комплексные значения, а матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ теперь могут быть произвольными элементами группы $SL(2, \mathbb{C})$ всех комплексных матриц с детерминантом, равным 1: $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Как обычно, операторы $\mathbf{T}(g)$, $g \in G_2$, отображают решения комплексного уравнения теплопроводности в решения. Кроме того, G_2^c действует на алгебру Ли $\mathscr{G}_2^c$ производных Ли посредством сопряженного представления

$$H \to H^g = \mathbf{T}(g)\,H\,\mathbf{T}^{-1}(g)$$

и разбивает $\mathscr{G}_2^c$ (так же как и $\mathscr{G}_2^c/\{H_0\}$) на G_2^c-орбиты. Нетрудно показать, что в $\mathscr{G}_2^c/\{H_0\}$ существуют в точности четыре орбиты

с представителями H^0, $H_{-2}+H_1$, H_{-2}, H_{-1}. (Различные орбиты в $\mathcal{G}_2'/\{H_0\}$ с представителями H^0 и H_2+H_{-2} становятся эквивалентными, когда группа G_2' при помощи комплексификации расширяется до группы G_2^c.) Поскольку $H_{-2}=(H_{-1})^2$, когда эти операторы действуют на решения комплексного уравнения теплопроводности, существуют только три допускающие R-разделение переменных системы координат, которые ассоциированы с четырьмя вышеуказанными орбитами. (Можно показать, что эти системы являются единственными R-разделимыми системами, допускаемыми комплексным уравнением теплопроводности. Теперь допустимая система координат $\{u, v\}$ такова, что функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ являются комплексными аналитическими функциями от переменных t, x с ненулевым якобианом. Две системы координат, допускающие разделение переменных, считаются эквивалентными, если одну из них можно отобразить в другую с помощью некоторого элемента группы G_2^c.) Результаты приводятся в табл. 8, где $t=v$ для каждой системы координат $\{u, v\}$, допускающей разделение переменных.

аблица 8

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

	Оператор H	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R=e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1	H_{-1}, H_{-2}	$x=u$	$\mathcal{R}=0$	Произведение экспоненциальных функций
2	$H_{-2}+H_1$	$x=u+v^2/2$	$\mathcal{R}=-uv/2$	Произведение функции Эйри и экспоненциальной функции
3	H^0	$x=u\sqrt{v}$	$\mathcal{R}=0$	Произведение многочлена Эрмита и экспоненциальной функции

Заметим, что комплексное уравнение теплопроводности является комплексификацией как вещественного уравнения теплопроводности, так и уравнения Шредингера для свободной частицы. В вопросах разделения переменных комплексификация приводит к тому, что орбиты 1 и 2 табл. 6 и 7 соответствуют орбитам 1 и 2 табл. 8, в то время как орбиты 3 и 4 табл. 6 и 7 сливаются в одну орбиту 3 табл. 8.

Чтобы вывести тождества, связывающие решения от разделенных переменных комплексного уравнения теплопроводности,

можно использовать метод Вейснера и рассмотреть разложение произвольной аналитической функции в ряд по функциям Эрмита (орбита 3 табл. 8). Подробные выкладки, выполненные Вейснером, можно найти в [35], а алгебраические связи с теорией Ли рассматриваются в [83]; поэтому здесь мы исследуем только некоторые вопросы теории этих разложений.

Из (2.10) и строки 3 табл. 8 видно, что решения уравнения (2.1) в виде многочленов Эрмита имеют место в координатах $\{s, z\}$, где

$$s = -i\sqrt{t}/2, \quad z = ix/(2\sqrt{t}). \tag{2.22}$$

В этих координатах операторы (2.2) принимают вид

$$H_2 = -2s^2(z\partial_z + s\partial_s + 1 - 2z^2), \quad H_1 = s(-\partial_z + 2z), \quad H_0 = 1,$$
$$H_{-1} = \frac{1}{4s}\partial_z, \quad H_{-2} = \frac{1}{8s^2}(z\partial_z - s\partial_s), \quad H^0 = s\partial_s + \frac{1}{2}, \tag{2.23}$$

а уравнение теплопроводности записывается в виде

$$(\partial_{zz} - 2z\partial_z + 2s\partial_s)\Phi(z, s) = 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим решения Φ уравнения (2.24), которые являются собственными функциями оператора H^0:

$$H^0\Phi = (n + {}^1/_2)\Phi \Rightarrow \Phi = f_n(z)s^n.$$

Подставляя эти решения в (2.24) и сравнивая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной z с (Б.10), находим, что функции

$$\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n, \quad \tilde{\Phi}_n(z, s) = e^{z^2}H_{-n-1}(lz)s^n \tag{2.25}$$

образуют базис совместных решений, причем *функции Эрмита* $H_n(z)$ определяются соотношением

$$H_n(z) = 2^{n/2}\exp(z^2/2)D_n(\sqrt{2}z), \qquad n \in \mathbb{C}, \tag{2.26}$$

где $D_n(z)$ — функции параболического цилиндра. Если $n = 0, 1, \ldots$, то $H_n(z)$ — *многочлены Эрмита* (Б.12).

Чтобы понять значение полиномиальных решений, рассмотрим систему уравнений

$$H_{-1}\Phi = 0, \quad Q\Phi = 0,$$

решение которой $\Phi \equiv 1$ единственно с точностью до мультипликативной константы. Воспользуемся этим простым решением и знанием алгебры симметрий $\mathcal{G}_2^c$, чтобы построить другие решения. Если $\Phi(z, s)$ — аналитическая функция от переменных

(z, s), то, согласно стандартным фактам теории Ли,

$$\exp(\alpha H_1)\Phi(z, s) = \exp(2\alpha zs - \alpha^2 s^2)\Phi(z - \alpha s, s) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}(H_1)^n \Phi(z, s).$$

Более того, если Φ — решение комплексного уравнения теплопроводности, то $\exp(\alpha H_1)\Phi$ — также решение (в предположении, что это выражение имеет смысл). Полагая в предыдущей формуле $\Phi \equiv 1$, мы находим

$$\exp(2\alpha zs - \alpha^2 s^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\Phi_n(z, s), \\ \Phi_0 = 1, \quad \Phi_n = (H_1)^n \Phi_0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.27}$$

Теперь рассмотрим действие операторов симметрии H_j на Φ_n. Используя соотношение $[H_{-1}, H_1) = {}^1/_2 H_0$ и индукцию, находим $[H_{-1}, (H_1)^n] = (n/2)(H_1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Применяя это тождество к Φ_0, получаем

$$H_{-1}\Phi_n = (n/2)\Phi_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.28}$$

(Это выражение имеет смысл при $n = 0$, если положить $\Phi_n \equiv \equiv 0$ при $n < 0$.) Из определения Φ_n вытекает

$$H_1\Phi_n = \Phi_{n+1}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.29}$$

и из соотношения $[H^0, H_1] = H_1$ получаем

$$H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\Phi_n, \quad \Phi_n = f_n(z)s^n. \tag{2.30}$$

Из (2.30) следует, что $f_n(z)$ выражаются через функции Эрмита. В самом деле, сравнивая (2.28), (2.29) с рекуррентными соотношениями (Б.13), находим решение в виде многочленов Эрмита

$$\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.31}$$

Подставляя (2.31) в (2.27) и полагая $s = 1$, получаем основную производящую функцию для многочленов Эрмита

$$\exp(2\alpha z - \alpha^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(z). \tag{2.32}$$

Используя соотношения коммутирования, получаем в дополнение к рекуррентным формулам (2.28), (2.29) для многочленов Эрмита следующие соотношения:

$$H_{-2}\Phi_n = (n/4)(n-1)\Phi_{n-2}, \quad H_2\Phi_n = \Phi_{n+2}, \quad H_0\Phi_n = \Phi_n, \\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.33}$$

Можно получить целый ряд тождеств для многочленов Эрмита, если применить групповой оператор $\mathbf{T}(g)$, $g \in G_2^c$ (см. (2.9)) к элементу базиса Φ_m и полученный результат разложить по функциям базиса $\{\Phi_n\}$:

$$\mathbf{T}(g)\Phi_m(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(g)\Phi_n(z, s), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.34}$$

Эта процедура целесообразна при условии, что мы можем вычислить матричные элементы $T_{nm}(g)$. В случае, когда g близко к единичному элементу, эти матричные элементы можно вычислить, пользуясь непосредственно соотношениями (2.28)—(2.30) и (2.33), установленными при помощи алгебры Ли.

Чтобы выполнить эти вычисления, удобно построить более простую модель представления алгебры Ли. Возьмем $f_n(w) = w^n$ и введем операторы

$$\begin{gathered} H_{-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dw}, \quad H_1 = w, \quad H_2 = w^2, \\ H^0 = w\frac{d}{dw} + \frac{1}{2}, \quad H_0 = 1, \quad H_{-2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dw^2}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Эти операторы удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования, что и базис алгебры $\mathcal{G}_2^c$, а их действие на базисные функции $f_n(w)$ совпадает с действием на базис Φ_n, описываемым формулами (2.28)—(2.30) и (2.33). На основе этой модели определяем матричные элементы $T_{nm}(\alpha, \beta)$ и $R_{nm}(\alpha, \beta)$:

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2) f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(\alpha, \beta) f_n(w), \tag{2.36а}$$

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1}) f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} R_{nm}(\alpha, \beta) f_n(w). \tag{2.36б}$$

Иначе говоря, мы применяем операторы группы $\exp(\alpha H)\exp(\beta H')$ к базисной функции w^m и полученную функцию разлагаем в степенной ряд в окрестности точки $w = 0$. Эти матричные элементы не зависят от модели. Подсчитаем их, используя простую модель (2.35), а затем применим полученные результаты к уравнению теплопроводности. Элементарные факты теории Ли дают соотношения

$$\exp(\alpha H_1) f(w) = \exp(\alpha w) f(w), \quad \exp(\beta H_2) f(w) = \exp(\beta w^2) f(w),$$
$$\exp(\beta H_{-1}) f(w) = f(w + \beta/2).$$

Таким образом, формулы (2.36) принимают вид

$$\exp(\alpha w + \beta w^2) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(\alpha, \beta)\, w^{n-m}, \tag{2.37а}$$

$$\exp(\alpha w)(w + \beta/2)^m = \sum_{n=0}^{\infty} R_{nm}(\alpha, \beta)\, w^n. \tag{2.37б}$$

Это известные производящие функции (2.32) и (7.30), причем

$$T_{nm}(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{(-i\sqrt{\beta})^{n-m}}{(n-m)!} H_{n-m}\left(\dfrac{i\alpha}{2\sqrt{\beta}}\right), & n \geqslant m; \\ 0, & n < m; \end{cases} \tag{2.38}$$

$$R_{nm}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^{m-n} L_n^{(m-n)}\left(\frac{-\alpha\beta}{2}\right),$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ — многочлен Лагерра (см. (Б.9i)).

Теперь вычислим экспоненты оператора (2.23). В дополнение к формуле (2.27) получаем

$$\exp(\alpha H_2)\Phi(z, s) = (1 + 4\alpha s^2)^{-1/2} \exp\left(\frac{4\alpha z^2 s^2}{1 + 4\alpha s^2}\right) \times$$

$$\times \Phi\left[\frac{z}{(1 + 4\alpha s^2)^{1/2}}, \frac{s}{(1 + 4\alpha s^2)^{1/2}}\right], \qquad |4\alpha s^2| < 1,$$

$$\exp(\beta H_{-2})\Phi(z, s) = \Phi\left[\frac{z}{(1 - \beta/4s^2)^{1/2}}, s\left(1 - \frac{\beta}{4s^2}\right)^{1/2}\right], \qquad |\beta/4s^2| < 1,$$

$$\exp(\gamma H_{-1})\Phi(z, s) = \Phi(z + \gamma/4s, s),$$

$$\exp(\delta H^0)\Phi(z, s) = \exp(\delta/2)\Phi(z, e^{\delta}s),$$

$$\exp(\varphi H_0)\Phi(z, s) = e^{\varphi}\Phi(z, s). \tag{2.39}$$

Подставляя (2.38) и (2.39) в (2.36), после некоторых упрощений находим

$$(1 - s^2)^{-(m+1)/2} \exp\left[\frac{2zs\alpha - (z^2 + \alpha^2)s^2}{1 - s^2}\right] H_m\left(\frac{z - s\alpha}{(1 - s^2)^{1/2}}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s/2)^n}{n!} H_n(\alpha) H_{m+n}(z), \qquad |s| < 1, \tag{2.40а}$$

$$\exp(-s^2\alpha^2 - 2zs\alpha) H_m(z + s\alpha - \beta/s) s^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{m-n} L_n^{(m-n)}(-\alpha\beta) H_n(z) s^n. \tag{2.40б}$$

Формула (2.40а) является обобщением теоремы Мелера [17], к которой она сводится в случае $m = 0$ $(H_0(z) = 1)$:

$$(1 - s^2)^{-1/2} \exp\left[\frac{2zs\alpha - (z^2 + \alpha^2)s^2}{1 - s^2}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s/2)^n}{n!} H_n(\alpha) H_n(z), \qquad (2.41)$$
$$|s| < 1.$$

При $\beta = 0$, $s = 1$ формула (2.40б) упрощается и сводится к соотношению

$$\exp(-\alpha^2 - 2z\alpha) H_m(z + \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} H_{m+n}(z), \qquad (2.42)$$

а при $\alpha = 0$, $s = 1$ эта формула приводит к соотношению

$$H_m(z - \beta) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \beta^{m-n} H_n(z), \qquad (2.43)$$

где $\binom{m}{n}$ — биномиальный коэффициент (см. (Б.1)). Вычисляя дополнительные матричные элементы $T_{mn}(g)$, $g \in G_2^c$, можно получить ряд новых производящих функций для многочленов Эрмита [35, 83].

Рассмотрим функции Эрмита — неполиномиальные решения комплексного уравнения теплопроводности, т. е. собственные функции $\Phi_n(z, s)$, (2.25), при $n \in \mathbb{C}$, $n \neq 0, 1, 2, \ldots$. В частности, исследуем собственные функции

$$\Phi_\lambda(z, s) = H_\lambda(z) s^\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad (2.44)$$

где λ не является целым числом. Функция Φ_λ удовлетворяет уравнениям

$$H^0 \Phi_\lambda = (\lambda + 1/2) \Phi_\lambda, \quad Q\Phi_\lambda = 0. \qquad (2.45)$$

Из соотношений коммутирования $[H^0, H_j] = jH_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2$, вытекает, что операторы H_j отображают решения уравнений (2.45), отвечающие собственному значению λ, в решения, отвечающие собственному значению $\lambda + j$. В самом деле, используя основные рекуррентные формулы (Б.13), нетрудно показать, что

$$\begin{gathered} H_{-1}\Phi_\lambda = (\lambda/2)\Phi_{\lambda-1}, \quad H_{-2}\Phi_\lambda = (\lambda/4)(\lambda - 1)\Phi_{\lambda-2}, \\ H_1\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda+1}, \quad H_2\Phi_\lambda = \Phi_{\lambda+2}, \quad H_0\Phi_\lambda = \Phi_\lambda. \end{gathered} \qquad (2.46)$$

Эти соотношения подобны соотношениям (2.28), (2.29), (2.33), за исключением того, что теперь λ — не целое число. Применяя операторы H_j к заданной функции Φ_λ, можно получить бесконечную последовательность решений $\Phi_{\lambda+n}$, где n пробегает все целые числа.

Для того чтобы изучить свойства преобразований этих решений под действием группы G_2^c, целесообразно рассмотреть операторы $\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2)$, $\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1})$ и $\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2})$. (Действие произвольного элемента группы можно представить в виде произведения трех таких операторов и тривиального оператора $\exp(\gamma H^0)\exp(\delta H_0)$.) Матричные элементы определяются соотношениями

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_2)\,\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{T}_{nm}(\alpha, \beta)\,\Phi_{\lambda+n}, \tag{2.47а}$$

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1})\,\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{nm}(\alpha, \beta)\,\Phi_{\lambda+n}, \tag{2.47б}$$

$$\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2})\,\Phi_{\lambda+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)\,\Phi_{\lambda+n}. \tag{2.47в}$$

Из (2.46) легко видеть, что матричные элементы $\hat{T}_{nm}(\alpha, \beta)$ тождественны матричным элементам $T_{nm}(\alpha, \beta)$ (см. (2.38)), за исключением того, что теперь m и n могут принимать отрицательные целые значения. Таким образом, (2.47а) приводит к формуле, аналогичной (2.40а), в которой H_m заменено на $H_{\lambda+m}$, а H_{m+n} — на $H_{\lambda+m+n}$, причем m принимает любые целые значения. Теорема Мелера получает таким образом дальнейшее обобщение.

Для вычисления матричных элементов $\hat{R}_{nm}(\alpha, \beta)$ выберем более простую модель соотношений (2.46). Так, возьмем $h_{\lambda+m}(w) = w^m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$H_1 = w, \quad H_{-1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda}{2w}, \quad H_0 = 1.$$

Тогда $[H_1, H_{-1}] = -{}^1/_2 H_0$, и в соответствии с (2.46)

$$H_1 h_{\lambda+m} = h_{\lambda+m+1}, \quad H_{-1} h_{\lambda+m} = \frac{\lambda+m}{2}\, h_{\lambda+m-1}.$$

В этой модели

$$\exp(\alpha H_1)\exp(\beta H_{-1})\, h_{\lambda+m}(w) = \exp(\alpha w)\,(1+\beta/2w)^{\lambda+m}\, w^m = \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{nm}(\alpha, \beta)\, w^n. \tag{2.48}$$

Вычисляя коэффициент при w^n, находим

$$R_{nm}(\alpha, \beta) = (\beta/2)^{m-n}\, L_{\lambda+n}^{(m-n)}(-\alpha\beta/2), \tag{2.49}$$

где $L_\lambda^{(\nu)}(z)$ — обобщенная функция Лагерра

$$L_\lambda^{(\nu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\lambda+1)}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} -\lambda \\ \nu+1 \end{matrix}\middle| z\right). \tag{2.50}$$

Таким образом, (2.47б) принимает вид

$$\exp(-s^2\alpha^2 - 2zs\alpha) H_{\lambda+m}(z + s\alpha - \beta/s) s^m =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\beta)^{m-n} L_{\lambda+n}^{(m-n)}(-\alpha\beta) H_{\lambda+n}(z) s^n, \quad (2.51)$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Чтобы вычислить матричные элементы $\hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)$, выберем иную модель:

$$h_{\lambda+m}(w) = \Gamma\left(\frac{\lambda+m+2}{2}\right) w^m, \quad H_2 = \frac{w^3}{2}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda+2}{2} w^2,$$
$$H_{-2} = \frac{1}{2w}\frac{d}{dw} + \frac{\lambda-1}{2w^2}, \quad H^0 = w\frac{d}{dw} + \lambda + \frac{1}{2}.$$

Используя эти операторы, получаем

$$\exp(\alpha H_2)\exp(\beta H_{-2}) h_{\lambda+m}(w) =$$
$$= \Gamma\left(\frac{\lambda+m+2}{2}\right) w^m (1 - \alpha w^2)^{-(\lambda+m+2)/2} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\beta}{(1-\alpha\beta) w^2}\right)^{(\lambda+m-1)/2} (1 - \alpha\beta)^{(\lambda+m-1)/2} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta)\, \Gamma\left(\frac{\lambda+n+2}{2}\right) w^n,$$
$$|\alpha w^2| < 1, \quad |\beta| < |(1-\alpha\beta) w^2|; \quad (2.52)$$

таким образом,

$$S_{nm}(\alpha, \beta) = \frac{(1-\alpha\beta)^{(\lambda+m-1)/2}\, \alpha^{(n-m)/2}}{\Gamma((n-m+2)/2)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{\lambda+n+2}{2}, & \frac{1-\lambda-m}{2} \\ \frac{n-m+2}{2} & \end{matrix} \middle| \frac{-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\right], \quad \text{если } n-m \text{ четное},$$
$$\hat{S}_{nm}(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{если } n-m \text{ нечетное}. \quad (2.53)$$

(Чтобы придать смысл этим выражениям при $m > n$, достаточно воспользоваться тем, что ${}_2F_1(a, b; c; z)/\Gamma(c)$ — целая функция от c.) Поэтому (2.47в) принимает вид

$$(1 + 4as^2)^{-(\lambda+m+1)/2}\left(1 - \alpha\beta - \frac{\beta}{4s^2}\right)^{(\lambda+m)/2} \exp\left(\frac{4az^2s^2}{1+4\alpha s^2}\right) \times$$
$$\times H_{\lambda+m}[z((1+4\alpha s^2)(1-\alpha\beta-\beta/(4s^2)))^{-1/2}] s^m =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{S}_{nm}(\alpha, \beta) H_{\lambda+n}(z) s^n, \quad |\beta/(1-\alpha\beta)| < |4s^2| < |\alpha|^{-1}. \quad (2.54)$$

Теперь приведем пример простого применения метода Вейснера к случаю, когда коэффициенты разложений по многочленам

Эрмита нельзя вычислить только с использованием некоторой алгебры Ли. Рассмотрим функцию $\Psi(z, s) = \exp(-4H_{-2})\Phi_\lambda(z, s)$, где Φ_λ определяется формулами (2.25), (2.26), при условии, что $\lambda = n \in \mathbb{C}$ и $|s| < 1$; тогда

$$\Psi(z, s) = H_\lambda\left[\frac{sz}{(1+s^2)^{1/2}}\right](1+s^2)^{\lambda/2} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)\, s^j, \quad |s| < 1. \tag{2.55}$$

(Заметим, что это разложение не является частным случаем (2.54).) Поскольку $Q\Psi = 0$, отсюда следует, что для любого j имеет место соотношение $Q(f_j(z)s^j) = 0$; следовательно, $f_j(z)$ является линейной комбинацией базисных функций Φ_j и $\tilde{\Phi}_j$ оператора H^0; см. (2.25). Более того, поскольку $H_\lambda(w)$ — целая функция от w, из (2.55) следует, что $f_j(z)$ содержит z в степени не выше z^j, откуда $f_j(z) = c_j H_j(z)$. Подставляя в (2.55) $z = w^{-1}$, $s = wv$ и затем устремляя w к нулю, получаем

$$H_\lambda(v) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (2v)^j.$$

Однако частный случай (2.51) при $\beta = -v$, $s = 1$, $m = 0$ дает

$$H_\lambda(z+v) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(z)(2v)^j, \tag{2.56}$$

откуда $c_j = \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(0)$. Этот результат наводит на мысль, что существует более общая производящая функция. В самом деле, исследование выражения $\exp(4wH_{-1} - 4H_{-2})\Phi_\lambda$ приводит к производящей функции

$$(1+s^2)^{\lambda/2} H_\lambda\left(\frac{w+zs}{(1+s^2)^{1/2}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(w) H_j(z)\, s^n, \tag{2.57}$$
$$|s| < 1.$$

Относительно вывода этого соотношения и многих других соотношений типа производящих функций для многочленов Эрмита см. [35]; некоторые из соотношений содержат разложения по базисам из функций Эйри.

2.3. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx} - a/x^2)\Psi = 0$

Применим метод, изложенный в разд. 2.1, к уравнению Шредингера для изотропной свободной частицы

$$i\partial_t \Psi = -\partial_{xx}\Psi + \frac{a}{x^2}\Psi, \tag{3.1}$$