

Эрмита нельзя вычислить только с использованием некоторой алгебры Ли. Рассмотрим функцию  $\Psi(z, s) = \exp(-4H_{-2})\Phi_\lambda(z, s)$ , где  $\Phi_\lambda$  определяется формулами (2.25), (2.26), при условии, что  $\lambda = n \in \mathbb{C}$  и  $|s| < 1$ ; тогда

$$\Psi(z, s) = H_\lambda \left[ \frac{sz}{(1+s^2)^{1/2}} \right] (1+s^2)^{\lambda/2} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) s^j, \quad |s| < 1. \quad (2.55)$$

(Заметим, что это разложение не является частным случаем (2.54).) Поскольку  $Q\Psi = 0$ , отсюда следует, что для любого  $j$  имеет место соотношение  $Q(f_j(z)s^j) = 0$ ; следовательно,  $f_j(z)$  является линейной комбинацией базисных функций  $\Phi_j$  и  $\Phi_{j+1}$  оператора  $H^0$ ; см. (2.25). Более того, поскольку  $H_\lambda(w)$  — целая функция от  $w$ , из (2.55) следует, что  $f_j(z)$  содержит  $z$  в степени не выше  $z^j$ , откуда  $f_j(z) = c_j H_j(z)$ . Подставляя в (2.55)  $z = w^{-1}$ ,  $s = wv$  и затем устремляя  $w$  к нулю, получаем

$$H_\lambda(v) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (2v)^j.$$

Однако частный случай (2.51) при  $\beta = -v$ ,  $s = 1$ ,  $m = 0$  дает

$$H_\lambda(z+v) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(z) (2v)^j, \quad (2.56)$$

откуда  $c_j = \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(0)$ . Этот результат наводит на мысль, что существует более общая производящая функция. В самом деле, исследование выражения  $\exp(4wH_{-1} - 4H_{-2})\Phi_\lambda$  приводит к производящей функции

$$(1+s^2)^{\lambda/2} H_\lambda \left( \frac{w+zs}{(1+s^2)^{1/2}} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\lambda}{j} H_{\lambda-j}(w) H_j(z) s^j, \quad (2.57)$$

$$|s| < 1.$$

Относительно вывода этого соотношения и многих других соотношений типа производящих функций для многочленов Эрмита см. [35]; некоторые из соотношений содержат разложения по базисам из функций Эйри.

### 2.3. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t + \partial_{xx} - a/x^2)\Psi = 0$

Применим метод, изложенный в разд. 2.1, к уравнению Шредингера для изотропной свободной частицы

$$i\partial_t \Psi = -\partial_{xx} \Psi + \frac{a}{x^2} \Psi, \quad (3.1)$$

Здесь  $a$  — вещественная константа, отличная от нуля,  $t$  вещественно и  $x > 0$ . Как уже упоминалось в начале разд. 2.1, это уравнение получается, если при некоторых значениях  $a > 0$  в уравнении Шредингера для свободной частицы, рассматривающей в пространстве более высокой размерности, перейти к сферическим координатам и затем отделить угловые переменные (см., например, [72]). Здесь  $x = r$  — радиальная координата, а параметр  $a$  принимает некоторые положительные значения. Мы покажем, что теоретико-групповой анализ уравнения (3.1) естественно приводит к уравнениям Шредингера для изотропного гармонического осциллятора и изотропного репульсивного осциллятора. Таким образом, наш анализ уравнений (1.2) и (3.1) охватит все семь потенциалов, перечисленных в табл. 5.

Прямые вычисления показывают, что комплексная алгебра симметрий уравнения (3.1) трехмерна и элементами базиса являются операторы

$$K_{-2} = \partial_t, \quad K_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x - t/2 + ix^2/4, \quad K^0 = 2t\partial_t + x\partial_x + 1/2, \quad (3.2)$$

удовлетворяющие соотношениям коммутирования

$$[K^0, K_{\pm 2}] = \pm 2K_{\pm 2}, \quad [K_2, K_{-2}] = K^0.$$

Для иного базиса  $\{L_j\}$ , где

$$L_1 = K^0, \quad L_2 = K_{-2} + K_2, \quad L_3 = K_{-2} - K_2,$$

соотношения коммутирования принимают вид

$$[L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_3, L_2] = -2L_1. \quad (3.3)$$

Сравнивая эти соотношения с (1.4), (1.5), (1.7), мы видим, что вещественной алгеброй Ли, порождаемой этим базисом, является  $sl(2, R)$  и что действие соответствующей локальной группы  $SL(2, R)$  на функции  $\Phi(t, x)$  определяется оператором  $\mathbf{T}(A)$  (см. (1.16)). Точное соответствие между группой и операторами алгебры Ли определяется соотношениями (1.17). (Заметим, однако, что в (1.16) мы должны требовать выполнения условия  $x > 0$ .)

Группа  $SL(2, R)$  действует на  $sl(2, R)$  посредством сопряженного представления и разбивает алгебру Ли на орбиты. Пусть

$$K = a_2 K_2 + a_{-2} K_{-2} + a_0 K^0 \in sl(2, R),$$

и пусть  $\alpha = a_2 a_{-2} + a_0^2$ . Легко проверить, что  $\alpha$  инвариантно относительно сопряженного действия и что  $K$  лежит на той же

$SL(2, R)$ -орбите, что и один из следующих трех операторов:

- Случай 1 ( $\alpha < 0$ )  $K_{-2} - K_2 = L_3$ ;  
 Случай 2 ( $\alpha > 0$ )  $K^0$ ;  
 Случай 3 ( $\alpha = 0$ )  $K_2$ .

Таким образом, имеется три орбиты.

Все системы координат, допускающие решения уравнения (3.1) с  $R$ -разделенными переменными, легко определяются в силу того, что системы, допускающие  $R$ -разделение переменных, должны также допускать  $R$ -разделение переменных и для уравнения свободной частицы (когда в (3.1)  $a = 0$ ). Таким образом, возможными системами координат являются указанные в табл. 6 системы, которые должны удовлетворять дополнительному требованию, а именно должны допускать решения с  $R$ -разделенными переменными и тогда, когда к гамильтониану свободной частицы добавляется потенциал  $a/x^2$ . Мы видим, что при этом теряется только орбита 2 табл. 6. Результаты приводятся в табл. 9, причем, как обычно,  $t = v$ .

Заметим, что для каждой из орбит 1 и 2 мы привели по две системы координат: хотя эти системы и эквивалентны относи-

Таблица 9

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ  
УРАВНЕНИЯ  $(i\partial_t + \partial_{xx} - a/x^2)\Psi(t, x) = 0$   
С  $R$ -РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Оператор $K$	Координаты $\{u, v\}$	Множитель $R = e^{i\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1a $K_{-2}$	$x = u$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
1b $K_2$	$x = uv$	$\mathcal{R} = u^2v/4$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
2a $K^0$	$x = u\sqrt{v}$	$\mathcal{R} = 0$	Произведение функции Уиттекера и экспоненциальной функции
2b $K_2 + K_{-2}$	$x = u[\pm(1-v^2)]^{1/2}$	$\mathcal{R} = \pm u^2v/4$	Произведение функции Уиттекера и экспоненциальной функции
3 $K_2 - K_{-2}$	$x = u(1+v^2)^{1/2}$	$\mathcal{R} = u^2v/4$	Произведение функции Лагерра и экспоненциальной функции

тельно  $SL(2, R)$ , они не эквивалентны относительно подгруппы «очевидных операторов симметрии», порожденной сдвигами по времени и растяжениями. Связь между этими операторами описывается соотношениями

$$J(K_2 + K_{-2})J^{-1} = K^0, \quad J^2 K_{-2} J^{-2} = -K_2, \quad (3.5)$$

где  $J$  и  $J^2$  даются формулами (1.21) и (1.22).

По аналогии с рассуждениями разд. 2.1 операторы (3.2) можно интерпретировать как операторы, образующие алгебру Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве  $L_2(R_+)$  комплекснозначных интегрируемых с квадратом по Лебегу функций, определенных на положительной вещественной полуоси  $0 < x < \infty$ . Это достигается тем, что мы заменяем в выражениях (3.2)  $\partial_t$  на  $i\partial_{xx} - ia/x^2$  и рассматриваем  $t$  как фиксированный параметр. Если полученные операторы умножить на  $i$  и рассматривать на множестве бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в  $R_+$ , то по теореме Вейля (см. [119]) эти операторы будут самосопряженными, если  $a \geq 3/4$ . В дальнейшем в этом разделе будем считать последнее условие выполненным. Нетрудно видеть, что рассматриваемые операторы являются вещественными линейными комбинациями кососимметрических операторов

$$\mathcal{K}_{-2} = i\partial_{xx} - ia/x^2, \quad \mathcal{K}_2 = ix^2/4, \quad K^0 = x\partial_x + 1/2, \quad (3.6)$$

к которым они сводятся при  $t = 0$ . Аналогичным образом кососимметрические операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \mathcal{K}^0 = x\partial_x + 1/2, & \mathcal{L}_2 &= \mathcal{K}_{-2} + \mathcal{K}_2 = i\partial_{xx} - ia/x^2 + ix^2/4, \\ \mathcal{L}_3 &= \mathcal{K}_{-2} - \mathcal{K}_2 = i\partial_{xx} - ia/x^2 - ix^2/4 \end{aligned} \quad (3.7)$$

удовлетворяют соотношениям (3.3);  $L_i$  сводится к  $\mathcal{L}_i$  при  $t = 0$ .

По аналогии с (1.26) находим, что

$$\begin{aligned} \exp(t\mathcal{K}_{-2})\mathcal{K}_j \exp(-t\mathcal{K}_{-2}) &= K_j, \\ \exp(t\mathcal{K}_{-2})\mathcal{L}_j \exp(-t\mathcal{K}_{-2}) &= L_j, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\exp(t\mathcal{K}_{-2})$  — унитарный оператор в  $L_2(R_+)$ . Поэтому для произвольной  $f \in L_2(R_+)$  функция  $\Psi(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})f(x)$  удовлетворяет уравнению  $\partial_t\Psi = \mathcal{K}_{-2}\Psi$ , или  $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + \Psi a/x^2$ , и условию  $\Psi(0, x) = f(x)$ . Итак, унитарные операторы  $\exp(K) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})\exp(\mathcal{K})\exp(-t\mathcal{K}_{-2})$ ,  $\mathcal{K} \in sl(2, R)$  отображают решения уравнения  $\partial_t\Psi = \mathcal{K}_{-2}\Psi$  в решения

Ниже мы докажем, что операторы  $\mathcal{K}_{\pm 2}$ ,  $\mathcal{K}^0$  порождают глобальное унитарное неприводимое представление универсальной накрывающей группы  $\widetilde{SL}(2, R)$  группы  $SL(2, R)$  при помощи операторов  $U(g)$ ,  $g \in \widetilde{SL}(2, R)$ , определенных на  $L_2(R_+)$ ; соотношения (1.37) — (1.40) определяют параметризацию  $SL(2, R)$ .

Принимая это во внимание, мы видим, что операторы  $T(g) = \exp(t\mathcal{K}_{-2})U(g)\exp(-t\mathcal{K}_{-2})$  определяют группу унитарных симметрий уравнения (3.1) с соответствующим инфинитезимальным оператором  $K = \exp(t\mathcal{K}_{-2})\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{K}_{-2})$ . Это замечание устанавливает связь между нашей алгеброй Ли операторов  $\mathcal{K}$  и уравнением Шредингера для изотропной свободной частицы.

Теперь рассмотрим оператор  $\mathcal{L}_3 \in sl(2, R)$ . Если  $f \in L_2(R_+)$ , то функция  $\Psi(t, x) = \exp(t\mathcal{L}_3)f(x)$  удовлетворяет уравнению  $\partial_t\Psi = \mathcal{L}_3\Psi$ , или  $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + a\Psi/x^2 + x^2\Psi/4$ , т. е. уравнению Шредингера для изотропного гармонического осциллятора. Унитарные операторы  $V(g) = \exp(t\mathcal{L}_3)U(g)\exp(-t\mathcal{L}_3)$  являются симметриями этого уравнения, и соответствующие инфинитезимальные операторы  $\exp(t\mathcal{L}_3)\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{L}_3)$  можно записать в виде линейных дифференциальных операторов первого порядка по переменным  $x$  и  $t$ . Аналогичным образом, если  $f \in L_2(R_+)$ , то  $\Psi(t, x) = \exp(t\mathcal{L}_2)f(x)$  удовлетворяет уравнению  $\partial_t\Psi = \mathcal{L}_2\Psi$ , или  $i\partial_t\Psi = -\partial_{xx}\Psi + a\Psi/x^2 - x^2\Psi/4$ , т. е. уравнению Шредингера для изотропного репульсивного осциллятора. Операторы  $W(g) = \exp(t\mathcal{L}_2)U(g)\exp(-t\mathcal{L}_2)$  определяют группу симметрии этого уравнения; соответствующие инфинитезимальные операторы  $\exp(t\mathcal{L}_2)\mathcal{K}\exp(-t\mathcal{L}_2)$  можно записать как дифференциальные операторы первого порядка по переменным  $x$  и  $t$ .

Из этих замечаний следует, что уравнения Шредингера с потенциалами (5) — (7) в табл. 5 имеют изоморфные алгебры операторов симметрии. Для каждого из этих уравнений алгебра операторов симметрии при  $t=0$  является алгеброй  $sl(2, R)$  с базисом (3.6). Несмотря на то что эту алгебру мы впервые получили, рассматривая уравнение Шредингера с потенциалом (5), ее можно было бы также получить при изучении уравнения с потенциалом (6) или (7) табл. 5. Более того, мы показали, как отобразить решение одного из этих уравнений в решение другого.

Из (3.4) видно, что операторы  $\mathcal{K}_{-2}$ ,  $\mathcal{L}_3$ ,  $\mathcal{L}_2$ , соответствующие гамильтонианам изотропной свободной частицы, а также изотропных репульсивного и гармонического осцилляторов, лежат на тех же  $SL(2, R)$ -орбитах, что и три представителя орбит  $\mathcal{K}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  и  $\mathcal{K}^0$  соответственно. Три наших гамильтониана соответствуют трем орбитам  $sl(2, R)$ . И в данном случае имеют место замечания к формулам (1.31) — (1.33) и инвариантность спектров операторов, лежащих на одной орбите; исключение составляет вид скалярного произведения

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \int_0^\infty h_1(x) \bar{h}_2(x) dx, \quad h_j \in L_2(R_+). \quad (3.9)$$

Заметим, что если  $\{f_\lambda\}$  — базис обобщенных собственных векторов некоторого оператора  $\mathcal{K} \in sl(2, R)$ , то  $\{\Psi_\lambda(t, x) = \exp(i\mathcal{K}_{-2})f_\lambda(x)\}$  — базис собственных векторов оператора  $K = \exp(i\mathcal{K}_{-2})\mathcal{K}\exp(-i\mathcal{K}_{-2})$ ; функция  $\Psi_\lambda$  удовлетворяет уравнению Шредингера для изотропной свободной частицы. Подобные замечания относятся и к остальным гамильтонианам.

Приведем сначала известные результаты, полученные для спектра оператора  $\mathcal{L}_3$ . Имеем уравнение для собственных функций

$$i\mathcal{L}_3 f = \lambda f, \quad (-\partial_{xx} + a/x^2 + x^2/4)f = \lambda f;$$

нормированные собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} f_n^{(3)}(x) &= \left( \frac{n! 2^{-\mu/2}}{\Gamma(n+1+\mu/2)} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) x^{(\mu+1)/2} L_n^{(\mu/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right), \\ \lambda = \lambda_n &= -2n - \mu/2 - 1, \quad a = (\mu^2 - 1)/4, \quad \mu \geq 2, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $L_n^{(\alpha)}(z)$  — многочлен Лагерра (см. (Б.9i)). Функции  $\{f_n^{(3)}\}$  образуют о. н. базис в  $L_2(R_+)$  (см. [116]).

Используя известные рекуррентные формулы (4.9) для многочленов Лагерра, нетрудно проверить, что действие операторов  $\mathcal{L}_i$  на базис  $\{f_n^{(3)}\}$  определяет неприводимое представление алгебры  $sl(2, R)$ , принадлежащее к дискретной серии. Оператор Казимира будет иметь вид  $\mathcal{L}_1^2 + \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2 = -3/16 + a/4$ . Известно [11, 120], что представление этой алгебры Ли расширяется до глобального унитарного неприводимого представления группы  $\widetilde{SL}(2, R)$ . Матричные элементы оператора  $\mathbf{U}(g)$  в базисе  $\{f_n^{(3)}\}$  можно найти в [120] или [88].

Теперь вычислим операторы  $\mathbf{U}(g)$  непосредственно. Ясно, что

$$\begin{aligned} \exp(a\mathcal{K}^0) h(x) &= \exp(a/2) h(e^a x), \\ \exp(a\mathcal{K}_2) h(x) &= \exp(iax^2/4) h(x), \quad h \in L_2(R_+). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \exp(\beta\mathcal{L}_3) h(x) &= \frac{\exp[\mp i\pi(\mu+2)/4]}{2|\sin\beta|} \text{I. I. m.} \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times \\ &\times \exp\left(\pm \frac{i}{4}(x^2+y^2)|\operatorname{ctg}\beta|\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\sin\beta|}\right) h(y) dy, \\ 0 < |\beta| &< \pi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где берется верхний знак при  $\beta > 0$  и нижний знак при  $\beta < 0$ . Соотношение  $\exp(\pi\mathcal{L}_3) = \exp[-i\pi(1+\mu/2)]$  позволяет вычислить  $\exp(\beta\mathcal{L}_3)$  при любом  $\beta$ . Для доказательства применим интегральный оператор (3.11) к  $f_n^{(3)}$ ; далее, используя формулу

Хилле — Харди (4.27) и тот факт, что

$$\exp(\beta \mathcal{L}_3) f_n^{(3)} = \exp[-i\beta(2n + \mu/2 + 1)] f_n^{(3)},$$

проверим справедливость формулы (3.11). Поскольку (3.11) имеет место для элементов о. н. базиса и оператор  $\exp(\beta \mathcal{L}_3)$  унитарен, соотношение (3.11) должно иметь место для всех  $h \in L_2(R_+)$ .

Формула группового умножения

$$\exp(\gamma \mathcal{K}_{-2}) = \exp(-\sin \theta \cos \theta \mathcal{K}_2) \exp(\ln \cos \theta \mathcal{K}^0) \exp(\theta \mathcal{L}_3),$$

где  $\gamma = \operatorname{tg} \theta$ , и соотношения (3.10), (3.11) позволяют получить формулу

$$\begin{aligned} \exp(\gamma \mathcal{K}_{-2}) h(x) &= \frac{\exp[\mp i\pi(\mu + 2)/4]}{2|\gamma|} \text{ l. i. m. } \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{x^2 + y^2}{4\gamma}\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\gamma|}\right) h(y) dy, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где берется верхний знак при  $\gamma > 0$  и нижний знак при  $\gamma < 0$ . Аналогичные теоретико-групповые соотношения дают

$$\begin{aligned} \exp(\varphi \mathcal{L}_2) h(x) &= \frac{\exp[\mp i\pi(\mu + 2)/4]}{2|\operatorname{sh} \varphi|} \text{ l. i. m. } \int_0^\infty (xy)^{1/2} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{i}{4}(x^2 + y^2) \operatorname{cth} \varphi\right) J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|\operatorname{sh} \varphi|}\right) h(y) dy. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.12) находим, что базисные функции  $f_n^{(3)}(x)$  отображаются в о. н. базисные функции  $\Psi_n^{(3)}(t, x) = \exp(t \mathcal{K}_{-2}) f_n^{(3)}(x)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(3)}(t, x) &= (-2)^n \exp\left[\pm i\pi \frac{\mu + 2}{4}\right] \left(\frac{x^2}{1+t^2}\right)^{(\mu+1)/4} \times \\ &\quad \times (t-i)^{-\mu/4-3/4-n} (t+i)^{\mu/4+1/4+n} \exp\left[\frac{x^2(it-1)}{4(1+t^2)}\right] L_n^{(\mu/2)}\left(\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right), \\ &\quad t \neq 0; \end{aligned} \quad (3.14)$$

эти функции суть решения уравнения (3.1) с  $R$ -разделенными переменными. (Формулу (3.14) можно получить на основании того, что функции  $\Psi_n^{(3)}$  — решения с  $R$ -разделенными переменными вида 3 в табл. 9.)

Заметим, что  $SL(2, R)$ -орбита, содержащая оператор  $\mathcal{L}_2$  (изотропный репульсивный осциллятор), также содержит оператор  $\mathcal{K}^0$ , и поэтому рассмотрим только спектральную теорию оператора  $\mathcal{K}^0$ . Эти результаты достаточно известны [37]. Уравнение для определения собственных функций имеет вид

$$i\mathcal{K}^0 f = \lambda f, \quad \mathcal{K}^0 = x\partial_x + \frac{1}{2}.$$

Известно, что спектр этого оператора непрерывен и однократно покрывает всю вещественную ось. Обобщенные собственные функции имеют вид

$$f_\lambda^{(2)}(x) = (2\pi)^{-1/2} x^{i\lambda - 1/2}, \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad \langle f_\lambda^{(2)}, f_\zeta^{(2)} \rangle = \delta(\lambda - \zeta). \quad (3.15)$$

Используя (3.12) и разделяя переменные, находим функцию  $\Psi_\lambda^{(2)}(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}) f_\lambda^{(2)}(x)$ :

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda^{(2)}(t, x) = & (2\pi)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{i\lambda}{2} - \frac{\mu}{4} + \frac{1}{2}\right) \exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{i\mu}{2} + i - \lambda\right)\right] 2^{i\lambda - \mu/2 - 1} \times \\ & \times t^{i\lambda/2 - 1/4} \left(\frac{x^2}{t}\right)^{(\mu+1)/4} L_{i\lambda/2 - (\mu+1)/2}^{(\mu/2)}\left(\frac{ix^2}{4t}\right), \quad t > 0; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Psi_\lambda^{(2)}(-t, x) = \bar{\Psi}_{-\lambda}^{(2)}(t, x).$$

Отсюда следует, что базисные функции удовлетворяют соотношению

$$\langle \Psi_\lambda^{(2)}(t, \cdot), \Psi_\zeta^{(2)}(t, \cdot) \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$$

и что по ним можно осуществить разложение любого элемента  $h \in L_2(R_+)$ .

Наконец, орбита, содержащая  $\mathcal{K}_{-2}$  и соответствующая уравнению для изотропной свободной частицы, содержит также оператор  $\mathcal{K}_2$ . Спектральная теория оператора  $\mathcal{K}_2$  элементарна, поскольку в нашей реализации этот оператор уже диагонализирован. Обобщенные собственные функции имеют вид (символически)

$$f_\lambda^{(1)}(x) = \delta(x - \lambda), \quad i\mathcal{K}_2 f_\lambda^{(1)} = (\lambda^2/4) f_\lambda^{(1)}, \quad \lambda \geq 0. \quad (3.17)$$

Спектр непрерывен и однократно покрывает положительную вещественную полуось. Мы имеем  $\Psi_\lambda^{(1)}(t, x) = \exp(t\mathcal{K}_{-2}) f_\lambda^{(1)}(x)$ , или

$$\Psi_\lambda^{(1)}(t, x) = \frac{\exp[\mp i\pi(\mu+2)/4]}{2|t|} (x\lambda)^{1/2} \exp\left(\frac{i(x^2 + \lambda^2)}{4t}\right) J_{\mu/2}\left(\frac{x\lambda}{2|t|}\right), \quad (3.18)$$

причем  $\langle \Psi_\lambda^{(1)}, \Psi_\zeta^{(1)} \rangle = \delta(\lambda - \zeta)$ . Разложение по элементам базиса  $\{\Psi_\lambda^{(1)}\}$  эквивалентно обратному преобразованию Ганкеля (см. [52]). Функции  $\Psi_\lambda^{(1)}$  являются базисными функциями оператора  $K_2$ .

Для каждого из наших базисов существует непрерывный аналог производящей функции вида (1.55), где в данном случае

$$k(t, x, y) = \frac{\exp[\pm i\pi(\mu+2)/4]}{2|t|} (xy)^{1/2} \exp\left[\frac{i(x^2 + y^2)}{4t}\right] J_{\mu/2}\left(\frac{xy}{2|t|}\right) \quad (3.19)$$

(см. [58]).

Функции  $\langle f_\lambda^{(I)}, f_\zeta^{(I)} \rangle$  имеют тот же самый смысл, что и аналогичные функции, описанные в разд. 2.1. В силу простоты базиса  $\{f_\lambda^{(I)}\}$  имеется единственный нетривиальный случай:

$$\langle f_n^{(3)}, f_\lambda^{(2)} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma(n+1+\mu/2)}{\pi n!} 2^{\mu/2-2i\lambda-1} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(-i\lambda/2 + \mu/4 + 1/2)}{\Gamma(1+\mu/2)} \times \\ \times {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, i\lambda/2 + \mu/4 + 1/2 \\ 1 + \mu/2 \end{matrix} \middle| 2 \right). \quad (3.20)$$

В частности, отметим, что функции  $\langle f_\lambda^{(I)}, f_\zeta^{(I)} \rangle$  зависят от представителей  $f_\lambda^{(I)}, f_\zeta^{(I)}$ , выбранных на каждой орбите. Наиболее общий способ определить эти функции состоит в изучении матричных элементов смешанных базисов  $\langle f_\lambda^{(I)}, U(g) f_\zeta^{(I)} \rangle$ ,  $g \in \widetilde{SL}(2, R)$ . Некоторые из этих элементов подсчитаны в работе [22].

## 2.4. Комплексное уравнение

$$(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2) \Phi(\tau, x) = 0$$

В этом разделе мы рассмотрим комплексификацию уравнения (3.1). Теперь переменные  $t$  и  $x$  могут принимать комплексные значения, а константа  $a$  может быть любым заданным комплексным числом. Введя новую переменную  $\tau = it$ , уравнение (3.1) можно записать в виде

$$(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2) \Phi(\tau, x) = 0. \quad (4.1)$$

Легко видеть, что комплексная алгебра симметрий уравнения (4.1) трехмерна и что в качестве элементов базиса можно взять операторы

$$J^+ = \tau^2 \partial_\tau + \tau x \partial_x + \tau/2 + x^2/4, \\ J^- = -\partial_\tau, \quad J^0 = i\partial_\tau + 1/2x\partial_x + 1/4, \quad (4.2)$$

для которых имеют место соотношения коммутиирования

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^0. \quad (4.3)$$

Ниже мы покажем, что эта алгебра Ли изоморфна алгебре  $sl(2, \mathbb{C})$ . Поэтому, вычисляя экспоненты операторов (4.2), можно с помощью операторов  $T(A)$ ,  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , действующих на пространстве решений уравнения (4.1), получить локальное представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Более того, очевидно, что группа  $SL(2, \mathbb{C})$  действует на алгебру симметрий  $sl(2, \mathbb{C})$  посредством сопряженного представления и разлагает эту алгебру на  $SL(2, \mathbb{C})$ -орбиты. Непосредственные вычисления показывают, что в  $sl(2, \mathbb{C})$  существуют точно две орбиты, представителями