Функции $\langle f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}\rangle$ имеют тот же самый смысл, что и аналогичные функции, описанные в разд. 2.1. В силу простоты базиса $\{f_\lambda^{(1)}\}$ имеется единственный нетривиальный случай:

$$\langle f_n^{(3)}, f_\lambda^{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(n+1+\mu/2)}{\pi n!}\, 2^{\mu/2-2i\lambda-1}\right]^{1/2} \frac{\Gamma(-i\lambda/2+\mu/4+1/2)}{\Gamma(1+\mu/2)} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ i\lambda/2+\mu/4+1/2\\ 1+\mu/2\end{matrix}\middle|\, 2\right). \qquad (3.20)$$

В частности, отметим, что функции $\langle f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}\rangle$ зависят от представителей $f_\lambda^{(i)}, f_\zeta^{(j)}$, выбранных на каждой орбите. Наиболее общий способ определить эти функции состоит в изучении матричных элементов смешанных базисов $\langle f_\lambda^{(i)}, \mathbf{U}(g) f_\zeta^{(j)}\rangle$, $g \in \widetilde{SL}(2, R)$. Некоторые из этих элементов подсчитаны в работе [22].

2.4. Комплексное уравнение $(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\,\Phi(\tau, x) = 0$

В этом разделе мы рассмотрим комплексификацию уравнения (3.1). Теперь переменные t и x могут принимать комплексные значения, а константа a может быть любым заданным комплексным числом. Введя новую переменную $\tau = it$, уравнение (3.1) можно записать в виде

$$(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\,\Phi(\tau, x) = 0. \qquad (4.1)$$

Легко видеть, что комплексная алгебра симметрий уравнения (4.1) трехмерна и что в качестве элементов базиса можно взять операторы

$$J^+ = \tau^2\partial_\tau + \tau x\partial_x + \tau/2 + x^2/4,$$
$$J^- = -\partial_\tau, \quad J^0 = i\partial_\tau + {}^1/_2 x\partial_x + {}^1/_4, \qquad (4.2)$$

для которых имеют место соотношения коммутирования

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^0. \qquad (4.3)$$

Ниже мы покажем, что эта алгебра Ли изоморфна алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. Поэтому, вычисляя экспоненты операторов (4.2), можно с помощью операторов $\mathbf{T}(A)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$, действующих на пространстве решений уравнения (4.1), получить локальное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$. Более того, очевидно, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует на алгебру симметрий $sl(2, \mathbb{C})$ посредством сопряженного представления и разлагает эту алгебру на $SL(2, \mathbb{C})$-орбиты. Непосредственные вычисления показывают, что в $sl(2, \mathbb{C})$ существуют точно две орбиты, представителями

которых являются операторы J^- и J^0. (Две орбиты алгебры $sl(2, R)$ (см. (3.4)) с представителями $K_{-2} - K_2$ и K^0 принадлежат орбите в $sl(2, \mathbb{C})$ с представителем J^0, орбита же с представителем K_2 принадлежит комплексной орбите с представителем J^- (а также орбите с представителем J^+).) Подобным образом можно показать, что уравнение (4.1) допускает решения с R-разделенными переменными в точности в двух комплексных аналитических системах координат. (Как обычно, мы считаем две системы эквивалентными, если одну из них можно отобразить в другую при помощи одного из операторов $\mathbf{T}(A)$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$.) В табл. 10 представлены системы координат, допускающие разделение переменных.

Таблица 10

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ $(\partial_\tau - \partial_{xx} + a/x^2)\,\Phi = 0$ С R-РАЗДЕЛЕННЫМИ ПЕГЕМЕННЫМИ

Оператор J	Координаты $\{u, v\}$	Множитель R	Решения с разделенными переменными
1 J^-	$x = u,\ \tau = v$	$R = 1$	Произведение функции Бесселя и экспоненциальной функции
2 J^0	$x = u\sqrt{v},\ \tau = v$	$R = 1$	Произведение многочлена Лагерра и экспоненциальной функции

Для того чтобы вывести соотношения, связывающие различного рода решения уравнения (4.1) с разделяющимися переменными, можно использовать метод Вейснера и рассмотреть разложение произвольной аналитической функции в ряд по функциям Лагерра (орбита 2). Эти результаты подробно описаны в [83, гл. 5], и поэтому наше изложение будет весьма кратким.

Как подсказывает соотношение (3.16) и строка 2 табл. 10, решения уравнения (4.1), выражающиеся через функции Лагерра, соответствуют координатам $\{s, z\}$, где

$$s = \tau, \quad z = -x^2/4\tau. \tag{4.4}$$

Преобразуем для удобства уравнение (4.1), которое мы записываем в виде $Q\Psi = 0$, к эквивалентному виду $Q'\Psi' = 0$, где $\Psi' = R^{-1}\Psi = s^{1/4}z^{\beta}\Psi$ и $Q' = R^{-1}QR$. Алгебра симметрии нового уравнения образована операторами $J' = R^{-1}JR$, где J принадлежит алгебре симметрии уравнения (4.1). Явный вид этих опе-

раторов дается следующими соотношениями:

$$J'^{+} = s^2\partial_s + sz\partial_z - sz - ls, \quad J'^{-} = -\partial_s + \frac{z}{s}\partial_z - l/s, \quad J'^{0} = s\partial_s, \tag{4.5}$$
$$\beta = l + {}^1/_4, \quad a = 4({}^1/_{16} - l^2), \qquad l \in \mathbf{C}.$$

Дифференциальное уравнение $Q'\Psi' = 0$ запишется следующим образом:

$$[z\partial_{zz} - (2l + z)\partial_z + s\partial_s + l]\Psi'(z, s) = 0. \tag{4.6}$$

(Ниже штрих будет опущен, поскольку мы будем иметь дело только с операторами (4.5) и уравнением (4.6).)

Теперь рассмотрим решения Ψ уравнения (4.6), которые являются собственными функциями оператора J^0:

$$J^0\Psi = m\Psi \Rightarrow \Psi = f_m(z)\, s^m.$$

Подставив это решение в (4.6) и разделив результат на s^m, получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида (Б.7). Таким образом, $f_m(z)$ являются конфлюентными гипергеометрическими функциями. В частности, функции вида

$$\Psi_m(z, s) = L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)\, s^m \tag{4.7}$$

удовлетворяют этим уравнениям.

Заметим, что при $l \in \mathbf{C}$, $2l \neq 0, 1, 2, \ldots$, и $m = -l + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, решения Ψ_m хорошо известны и сводятся к многочленам от z, т. е. многочленам Лагерра $L_n^{(-2l-1)}(z)$ (см. (Б.9i)). Чтобы выяснить значение этих полиномиальных решений, рассмотрим систему уравнений

$$J^{-}\Phi = 0, \quad J^0\Phi = -l\Phi,$$

решение которой $\Phi(z, s) = s^{-l}$ единственно с точностью до мультипликативной константы. Легко проверить, что Φ также удовлетворяет уравнению (4.6). Зная алгебру симметрии уравнения (4.6), можно построить новые решения. Если $\Phi(z, s)$ — произвольная аналитическая функция от z и s, то простое следствие теории Ли дает соотношение

$$\exp(\alpha J^{+})\Phi(z, s) = (1 - \alpha s)^l \exp\left[-\frac{\alpha z s}{(1 - \alpha s)}\right]\Phi\left(\frac{z}{1 - \alpha s}, \frac{s}{1 - \alpha s}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}(J^{+})^n\Phi(z, s), \qquad |\alpha s| < 1. \tag{4.8}$$

Кроме того, если Φ — решение уравнения (4.1), то $(J^{+})^n\Phi$ и $\exp(\alpha J^{+})\Phi$ — также решения, коль скоро они определены. Под-

ставляя в (4.8) наше решение $\Phi = s^{-l}$, получаем

$$(1-\alpha s)^{2l} s^{-l} \exp[-\alpha z s/(1-\alpha s)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \Phi_n(z, s),$$
$$\Phi_n = (1/n!)(J^+)^n \Phi, \quad \Phi_0 = \Phi, \quad |\alpha s| < 1. \tag{4.8'}$$

На основании определения Φ_n и соотношений коммутирования (4.3) простое вычисление с применением индукции дает рекуррентные соотношения

$$J^0\Phi_n = (n-l)\Phi_n, \quad J^+\Phi_n = (n+1)\Phi_{n+1}, \quad J^-\Phi_n = (2l-n+1)\Phi_{n-1}, \tag{4.9}$$
$$\Phi_{-1} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Далее, сравнивая эти результаты с рекуррентными формулами (Б.8) и учитывая, что $\Phi_0 = s^{-l}$, получаем

$$\Phi_n(z, s) = \Psi_{n-l}(z, s) = L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^{n-l}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.10}$$

Таким образом, (4.8′) приводит к производящей функции для многочленов Лагерра:

$$(1-\alpha)^{2l} \exp[-\alpha z/(1-\alpha)] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n L_n^{(-2l-1)}(z), \qquad |\alpha| < 1. \tag{4.11}$$

Для того чтобы вывести еще несколько тождеств для многочленов Лагерра, нужно найти операторы $\mathbf{T}(A)$, определяющие действие локальной группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ на пространство решений уравнения (4.6). Напомним, что $SL(2, \mathbb{C})$ является комплексной группой Ли комплексных (2×2)-матриц A с детерминантом $+1$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1. \tag{4.12}$$

Алгебра Ли $sl(2, \mathbb{C})$ этой группы, как известно, состоит из всех комплексных (2×2)-матриц A с нулевым следом

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

В качестве базиса алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ можно принять матрицы

$$\mathcal{J}^+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

удовлетворяющие следующим соотношениям коммутирования:

$$[\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^\pm] = \pm\mathcal{J}^\pm, \quad [\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-] = 2\mathcal{J}^0.$$

Поскольку эти соотношения совпадают с соотношениями (4.3), алгебра симметрии уравнения (4.1) изоморфна алгебре $sl(2, \mathbb{C})$.

Простыми вычислениями (см. [83, разд. 1.4]) можно показать, что если $A \in SL(2, \mathbb{C})$ имеет вид (4.12) и $d \neq 0$, то

$$\begin{gathered} A = \exp(\beta \mathcal{J}^+) \exp(\gamma \mathcal{J}^-) \exp(\tau \mathcal{J}^0), \\ e^\tau = d^{-2}, \quad \beta = -b/d, \quad \gamma = -cd. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Эти соотношения помогают параметризовать окрестность единицы в $SL(2, \mathbb{C})$. Теперь вычислим экспоненты операторов (4.5), с тем чтобы найти соответствующее локальное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ посредством операторов $\mathbf{T}(A)$, действующих на аналитические функции $\Phi(z, s)$. В соответствии с (4.14) имеем

$$\mathbf{T}(A) = \exp(-(b/d) J^+) \exp(-cdJ^-) \exp(-2(\ln d) J^0) \tag{4.15}$$

для элемента A, лежащего в малой окрестности единичного элемента. Результат вычисления $\exp(\alpha J^+)$ дается формулой (4.8). Аналогичные вычисления дают

$$\begin{gathered} \exp(\gamma J^-) \Phi(z, s) = (1 - \gamma/s)^l \Phi\left(\frac{z}{1 - \gamma/s}, s - \gamma\right), \\ \exp(\tau J^0) \Phi(z, s) = \Phi(z, e^\tau s). \end{gathered}$$

Взяв композицию этих операторов, получим

$$\begin{gathered} \mathbf{T}(A) \Phi(z, s) = (d + bs)^l \left(a + \frac{c}{s}\right)^l \exp\left[\frac{bzs}{d + bs}\right] \times \\ \times \Phi\left(\frac{zs}{(as + c)(d + bs)}, \frac{as + c}{d + bs}\right), \qquad \left|\frac{c}{as}\right| < 1, \quad \left|\frac{bs}{d}\right| < 1, \end{gathered} \tag{4.16}$$

причем оператор $\mathbf{T}(A)$ определен для всех таких аналитических функций $\Phi(z, s)$, для которых правая часть имеет смысл. Заметим, что $\mathbf{T}(A)$ отображает аналитические решения уравнения (4.6) в решения же.

Применим оператор $\mathbf{T}(A)$ к Φ_m и результат разложим по элементам базиса $\{\Phi_n\}$:

$$\mathbf{T}(A) \Phi_m(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A) \Phi_n(z, s). \tag{4.17}$$

Если матрица A близка к единичной, то матричные элементы $T_{nm}(A)$ можно определить непосредственно из соотношений (4.9). Вычисления упрощаются, если построить иную модель представления нашей алгебры Ли (4.9). Следуя [83, разд. 5.2], возьмем базисные функции в виде

$$f_n(w) = \frac{1}{n!} \Gamma(n - 2l) w^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и введем следующие операторы:

$$J^+ = w^2 \frac{d}{dw} - 2lw, \quad J^- = -\frac{d}{dw}, \quad J^0 = w\frac{d}{dw} - l. \tag{4.18}$$

Легко проверить, что для этих операторов выполняются соотношения (4.3), а новые базисные функции и операторы удовлетворяют (4.9). Далее, применяя (4.15), можно показать, что соответствующее действие локальной группы $SL(2, \mathbb{C})$, определяемое операторами $\mathbf{T}(A)$, можно представить в виде

$$\mathbf{T}(A) f(w) = (bw + d)^{2l} f\left(\frac{aw + c}{bw + d}\right), \qquad |bw/d| < 1. \tag{4.19}$$

Матричные элементы определяются соотношениями

$$\mathbf{T}(A) f_m(w) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A) f_n(w),$$

или

$$d^{2l-m}(1 + bw/d)^{2l-m}(aw + c)^m \Gamma(m - 2l)/m! =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_{nm}(A)\Gamma(n - 2l) w^n/n!, \qquad |bw/d| < 1. \tag{4.20}$$

Раскладывая левую часть формулы (4.20) в степенной ряд по w и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w^n, получаем

$$T_{nm}(A) = \frac{a^n d^{2l-m} c^{m-n} \Gamma(m - 2l)}{\Gamma(m - n + 1)\Gamma(n - 2l)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, m - 2l \\ m - n + 1 \end{matrix} \middle| \frac{bc}{ad}\right). \tag{4.21}$$

Более того, $\mathbf{T}(AA') = \mathbf{T}(A)\mathbf{T}(A')$, если A и A' принадлежат некоторой малой окрестности единицы группы $SL(2, \mathbb{C})$, и поэтому

$$T_{nm}(AA') = \sum_{k=0}^{\infty} T_{nk}(A) T_{km}(A').$$

Подставляя в (4.17) функции (4.10) и используя (4.21), получаем тождество

$$\left(1 + \frac{bs}{d}\right)^{2l-m}\left(1 + \frac{c}{as}\right)^m \exp\left[\frac{bzs}{d + bs}\right] \times$$
$$\times L_m^{(-2l-1)}\left[\frac{z}{1 + bc}\left(1 + \frac{c}{as}\right)^{-1}\left(1 + \frac{bs}{d}\right)^{-1}\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{m!}\left(-\frac{sb}{d}\right)^{n-m} \Gamma(n - m + 1)^{-1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, n - 2l \\ n - m + 1 \end{matrix} \middle| \frac{bc}{ad}\right) L_n^{(-2l-1)}(z),$$
$$|bs/d| < 1, \quad d = (1 + bc)/a, \tag{4.22}$$

справедливое для всех целых $m \geqslant 0$ и всех $l \in \mathbb{C}$, таких, что $2l \neq 0, 1, 2, \ldots$. (В формулах (4.21) и (4.22) используется тот факт, что ${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}\middle| z\right)/\Gamma(\gamma)$ — целая функция от α, β, γ, и это позволяет придать им смысл, когда γ — отрицательное целое число.)

Если $a = d = s = 1$, $c = 0$, то последнее соотношение упрощается и принимает вид

$$(1-b)^{2l-m} \exp[-bz/(1-b)]\, L_m^{(-2l-1)}(z/(1-b)) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} b^n L_{m+n}^{(-2l-1)}(z), \qquad |b| < 1.$$

При $m = 0$ это выражение сводится к (4.11) с $\alpha = b$. Если $a = d = s = 1$, $b = 0$, то формула (4.22) упрощается и принимает вид

$$(1+c)^m L_m^{(-2l-1)}\left(\frac{z}{1+c}\right) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m-2l-1}{n} c^n L_{m-n}^{(-2l-1)}(z).$$

Аналогичные соотношения можно вывести и для базисных функций (4.7), которые не являются многочленами от z, т. е. в случае, когда $m + l \neq 0, 1, 2, \ldots$. По поводу этих результатов см. [83, разд. 5.8].

Используя возможности метода Вейснера в полной мере, можно вывести более общие соотношения для функций Лагерра. Если $\Psi(z, s)$ — аналитическое решение уравнения (4.6), разлагающееся в сходящийся ряд Лорана

$$\Psi(z, s) = \sum_m f_m(z) s^m,$$

то его коэффициенты $f_m(z)$ суть конфлюентные гипергеометрические функции (функции Лагерра), т. е. линейные комбинации функций $L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)$ и $z^{2l+1} L_{m-l-1}^{(2l+1)}(z)$, где $2l$ не является целым числом. Если дополнительно потребовать, чтобы функция Ψ была аналитической при $z = 0$, то $f_m(z) = c_m L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)$, $c_n \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\Psi(z, s) = \sum_m c_m L_{m+l}^{(-2l-1)}(z)\, s^m. \tag{4.23}$$

Формула (4.22) является примером подобного соотношения, и, воспользовавшись методами алгебр Ли, можно вычислить коэффициенты c_m в явном виде. Однако это уже неверно в случае $\mathrm{T}(A)\Psi_p$, $p \in \mathbb{C}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а Ψ_p дается выражением (4.7). В этом случае мы имеем

$$s^{-l}(1-s)^{l-p}\exp\left[-\frac{zs}{1-s}\right]L_{p+l}^{(-2l-1)}\left(\frac{zs}{1-s}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_{pn} L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^{-l+n}, \qquad |s| < 1.$$

Это соотношение не имеет вид соотношения (4.22), поскольку A отграничено от единицы и p не обязательно целое число. Полагая $z = 0$, легко вычислить коэффициенты c_{pn}. В результате получаем производящую функцию для многочленов Лагерра

$$(1-s)^{l-p}\exp\left[-\frac{zs}{1-s}\right]L_{p+l}^{(-2l-1)}\left(\frac{zs}{1-s}\right) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}(-s)^n \frac{\Gamma(l-p+1)\,\Gamma(p-l)}{\Gamma(n-2l)\,\Gamma(l-p-n+1)\,\Gamma(l+p+1)} L_n^{(-2l-1)}(z), \qquad (4.24)$$

$$|s| < 1.$$

В качестве следующего примера рассмотрим (4.23), когда функция Ψ является собственной функцией оператора J^-. Поскольку оператор J^- лежит на орбите 1 (см. табл. 10), в качестве Ψ можно взять решение с разделяющимися переменными в координатах x, τ и выразить его через функции Бесселя (следует учесть переход от уравнения (4.1) к (4.6)). Таким образом, совместное решение Ψ уравнения (4.6) и уравнения $J^-\Psi = -\Psi$ имеет вид

$$\Psi(z, s) = s^{-l}e^s (zs)^{(2l+1)/2} J_{-2l-1}\left(2(zs)^{1/2}\right). \qquad (4.25)$$

Более того, функция

$$\Psi' = \mathbf{T}(A)\Psi(z, s) = s^{-l}(d+bs)^{-1}\exp\left[\frac{(a+bz)s+c}{d+bs}\right]\times \\ \times (zs)^{(2l+1)/2} J_{-2l-1}\left(\frac{2(zs)^{1/2}}{d+bs}\right), \qquad \left|\frac{bs}{d}\right| < 1,$$

где матрица A дается формулой (4.12), также удовлетворяет уравнению (4.6) и уравнению $(J^-)'\Psi' = -\Psi'$, в котором

$$(J^-)' = \mathbf{T}(A)J^-\mathbf{T}(A^{-1}) = -b^2J^+ + d^2J^- - 2bdJ^0.$$

Поскольку $w^{-m}J_m(w)$ — целая функция от w при любом $m \in \mathbb{C}$, функция $\Psi'(z, s)$ имеет лорановское разложение по степеням s следующего вида:

$$\Psi'(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(A)\, L_n^{(-2l-1)}(z)\, s^n, \qquad |bs/d| < 1.$$

Полагая $z=0$, находим

$$(d+bs)^{2l}\exp\left(\frac{as+c}{d+bs}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(A)\,\Gamma(n-2l)\,\frac{s^n}{n!},\qquad \left|\frac{bs}{d}\right|<1;$$

сравнивая это выражение с (4.22) при $m=0$, получаем

$$c_n(A)=\exp\left(\frac{ac}{1+bc}\right)\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}\,a^{-2l}\left(-\frac{ab}{1+bc}\right)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b(1+bc)}\right),$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad 2l\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Полагая $c=0$, получаем в результате соотношение

$$(1+abs)^{-1}\exp\left[\frac{(a+bz)\,s}{a^{-1}+bs}\right](a^2zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(\frac{2\,(zs)^{1/2}}{a^{-1}+bs}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}(-abs)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b}\right)L_n^{(-2l-1)}(z),\qquad |abs|<1. \quad (4.26)$$

Если $a=1$, $b=0$, то формула (4.26) принимает вид

$$e^s(zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(2\,(zs)^{1/2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(-2l-1)}(z)\,s^n/\Gamma(n-2l),$$

если же $a=iy^{1/2}$, $b=iy^{-1/2}$, то соотношение (4.26) сводится к формуле Хилле — Харди

$$(1-s)^{-1}(-ysz)^{(2l+1)/2}\exp\left[-\frac{s\,(y+z)}{1-s}\right]J_{-2l-1}\left(\frac{2i\,(ysz)^{1/2}}{1-s}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}L_n^{(-2l-1)}(y)\,L_n^{(-2l-1)}(z)\,s^n,\qquad |s|<1; \quad (4.27)$$

см. [17].

2.5. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t+\partial_{xx}+\partial_{yy})\Psi=0$

Применим рассмотренные в разд. 2.1 методы к временны́м уравнениям Шредингера с двумя пространственными переменными

$$i\partial_t\Psi=-\partial_{xx}\Psi-\partial_{yy}\Psi+V(x,\,y)\Psi, \quad (5.1)$$

где V — потенциал. Бойер [20] дал классификацию всех уравнений вида (5.1), которые допускают нетривиальную алгебру симметрии дифференциальных операторов первого порядка. Он показал, что (а) максимальная размерность для алгебры сим-