Полагая $z=0$, находим

$$(d+bs)^{2l}\exp\left(\frac{as+c}{d+bs}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(A)\,\Gamma(n-2l)\,\frac{s^n}{n!},\qquad \left|\frac{bs}{d}\right|<1;$$

сравнивая это выражение с (4.22) при $m=0$, получаем

$$c_n(A)=\exp\left(\frac{ac}{1+bc}\right)\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}\,a^{-2l}\left(-\frac{ab}{1+bc}\right)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b(1+bc)}\right),$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad 2l\neq 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Полагая $c=0$, получаем в результате соотношение

$$(1+abs)^{-1}\exp\left[\frac{(a+bz)\,s}{a^{-1}+bs}\right](a^2zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(\frac{2\,(zs)^{1/2}}{a^{-1}+bs}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}(-abs)^n L_n^{(-2l-1)}\left(\frac{a}{b}\right)L_n^{(-2l-1)}(z),\qquad |abs|<1. \quad (4.26)$$

Если $a=1$, $b=0$, то формула (4.26) принимает вид

$$e^s(zs)^{(2l+1)/2}J_{-2l-1}\left(2\,(zs)^{1/2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(-2l-1)}(z)\,s^n/\Gamma(n-2l),$$

если же $a=iy^{1/2}$, $b=iy^{-1/2}$, то соотношение (4.26) сводится к формуле Хилле — Харди

$$(1-s)^{-1}(-ysz)^{(2l+1)/2}\exp\left[-\frac{s\,(y+z)}{1-s}\right]J_{-2l-1}\left(\frac{2i\,(ysz)^{1/2}}{1-s}\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n-2l)}L_n^{(-2l-1)}(y)\,L_n^{(-2l-1)}(z)\,s^n,\qquad |s|<1; \quad (4.27)$$

см. [17].

2.5. Разделение переменных для уравнения Шредингера $(i\partial_t+\partial_{xx}+\partial_{yy})\Psi=0$

Применим рассмотренные в разд. 2.1 методы к временны́м уравнениям Шредингера с двумя пространственными переменными

$$i\partial_t\Psi=-\partial_{xx}\Psi-\partial_{yy}\Psi+V(x,\,y)\Psi, \quad (5.1)$$

где V — потенциал. Бойер [20] дал классификацию всех уравнений вида (5.1), которые допускают нетривиальную алгебру симметрии дифференциальных операторов первого порядка. Он показал, что (а) максимальная размерность для алгебры сим-

метрии равна девяти; (б) этот максимум имеет место только для четырех потенциалов V, представленных в табл. 11; (в) алгебры максимальной размерности изоморфны. (В действительности существуют четыре класса таких потенциалов, которые соответствуют орбитам алгебры симметрии. В табл. 11 мы просто перечислили по одному представителю из каждого класса.) Нидерер [104] показал, что все четыре уравнения с максимальной алгеброй симметрии фактически эквивалентны. Мы проведем подробный анализ этой эквивалентности и свяжем ее с разделением переменных.

Таблица 11

ПОТЕНЦИАЛЫ $V(x, y)$ С МАКСИМАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

	V	Название системы
(1)	0	Свободная частица
(2)	$k(x^2+y^2),\quad k>0$	Гармонический осциллятор
(3)	$-k(x^2+y^2),\ k>0$	Репульсивный осциллятор
(4)	$ax,\ a\neq 0$	Движение в однородном внешнем поле (линейный потенциал)

Как и в разд. 2.1, начнем с анализа уравнения Шредингера для свободной частицы, которое мы запишем в следующем виде:

$$Q\Psi = 0, \quad Q = i\partial_t + \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2}, \quad (x_1, x_2) = (x, y). \tag{5.2}$$

Комплексная алгебра симметрии $\mathcal{G}_3^c$ этого уравнения девятимерна и имеет базис

$$\begin{gathered} K_2 = -t^2\partial_t - t(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}) - t + i(x_1^2 + x_2^2)/4, \quad K_{-2} = \partial_t, \\ P_j = \partial_{x_j}, \quad B_j = -t\partial_{x_j} + ix_j/2, \quad j = 1, 2, \\ M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad E = i, \quad D = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2t\partial_t + 1 \end{gathered} \tag{5.3}$$

и соотношения коммутирования вида

$$\begin{gathered} [D, K_{\pm 2}] = \pm 2K_{\pm 2}, \quad [D, B_j] = B_j, \quad [D, P_j] = -P_j, \\ [D, M] = 0, \quad [M, K_{\pm 2}] = 0, \quad [P_j, M] = (-1)^{j+1} P_l, \\ [B_j, M] = (-1)^{j+1} B_l, \quad [K_2, K_{-2}] = D, \quad [K_2, B_j] = 0, \\ [K_{-2}, B_j] = -P_j, \quad [K_{-2}, P_j] = 0, \quad [P_j, K_2] = B_j, \\ [P_j, B_j] = {}^1/_2 E, \quad [P_j, B_l] = 0, \quad j, l = 1, 2, \ j \neq l, \end{gathered} \tag{5.4}$$

причем оператор E лежит в центре алгебры $\mathcal{G}_3^c$. Ниже мы будем исследовать только *алгебру Шредингера* $\mathcal{G}_3$, т. е. вещественную алгебру Ли с базисом (5.3).

Еще один полезный базис для $\mathcal{G}_3$ дается операторами B_j, P_j, E, порождающими пятимерную алгебру Вейля $\mathcal{W}_2$, оператором M и тремя операторами L_1, L_2, L_3, где

$$L_1 = D, \quad L_2 = K_2 + K_{-2}, \quad L_3 = K_{-2} - K_2. \tag{5.5}$$

Для L_j выполняются соотношения коммутирования

$$[L_1, L_2] = -2L_3, \quad [L_3, L_1] = 2L_2, \quad [L_2, L_3] = 2L_1, \tag{5.6}$$

и поэтому они образуют базис алгебры Ли $sl(2, R)$; сравните с (1.11). Следовательно, $\mathcal{G}_3$ — полупрямое произведение алгебр $sl(2, R) \oplus o(2)$ и $\mathcal{W}_2$, где $o(2)$ — одномерная алгебра Ли, натянутая на M.

Используя стандартные формулы теории Ли, можно вычислить экспоненту операторов (5.3), с тем чтобы получить локальную группу Ли G_3 (*группу Шредингера*) операторов, действующих на пространство $\mathcal{F}$ локально аналитических функций от вещественных переменных t, x_j и отображающих решения уравнения (5.2) в решения. Необходимые вычисления выполняются с помощью формул (1.15)—(1.19).

Действие группы Вейля W_2 определяется операторами

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho) = \exp(w_1 B_1) \exp(z_1 P_1) \exp(w_2 B_2) \exp(z_2 P_2) \exp(\rho E),$$
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2),$$

такими, что

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\, \mathbf{T}(\mathbf{w}', \mathbf{z}', \rho') = \mathbf{T}(\mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{z} + \mathbf{z}', \rho + \rho' + {}^1/_2 \mathbf{w}' \cdot \mathbf{z}), \tag{5.7}$$

где

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[i(2\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} - t\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 4\rho)/4]\, \Phi(t, \mathbf{x} - t\mathbf{w} + \mathbf{z}),$$
$$\Phi \in \mathcal{F}.$$

Здесь $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = x_1 w_1 + x_2 w_2$. Действие группы $SO(2)$ определяется операторами $\mathbf{T}(\theta) = \exp(\theta M)$,

$$\mathbf{T}(\theta)\, \mathbf{T}(\theta') = \mathbf{T}(\theta + \theta'),$$

где

$$\mathbf{T}(\theta)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}\Theta), \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

И наконец, действие группы $SL(2, R)$ определяется операторами $\mathbf{T}(A)$,

$$\mathbf{T}(A)\, \Phi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[\frac{i\beta \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{4(\delta + i\beta)}\right] (\delta + i\beta)^{-1}\, \Phi\left[\frac{\gamma + i\alpha}{\delta + i\beta}\, (\delta + i\beta)^{-1} \mathbf{x}\right],$$
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R), \tag{5.9}$$

причем

$$\mathbf{T}(A)\,\mathbf{T}(B) = \mathbf{T}(AB), \qquad A,\ B \in SL(2,\ R).$$

Однопараметрические подгруппы группы $SL(2, R)$, порождаемые операторами $K_{\pm 2}$, L_1, L_2, L_3 соответственно, определяются формулами (1.17). Сопряженные действия групп $SO(2)$ и $SL(2, R)$ на W_2 определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{T}^{-1}(A)\,\mathbf{T}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho)\,\mathbf{T}(A) = \mathbf{T}(\mathbf{w}',\ \mathbf{z}',\ \rho'),$$

$$\rho' = \rho + (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{z}' - \mathbf{w} \cdot \mathbf{z})/4, \quad \mathbf{w}' = \delta\mathbf{w} + \beta\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = \alpha\mathbf{z} + \gamma\mathbf{w}, \tag{5.10}$$

$$\mathbf{T}^{-1}(\theta)\,\mathbf{T}(\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho)\,\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{T}(\mathbf{w}\Theta,\ \mathbf{z}\Theta,\ \rho).$$

Эти соотношения определяют G_3 как полупрямое произведение групп $SL(2, R) \oplus SO(2)$ и W_2:

$$g = (A,\ \theta,\ \mathbf{v}) \in G_3, \quad A \in SL(2,\ R), \quad \theta \in SO(2), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{w},\ \mathbf{z},\ \rho) \in W_2;$$

$$\mathbf{T}(g) = \mathbf{T}(A)\,\mathbf{T}(\theta)\,\mathbf{T}(\mathbf{v}). \tag{5.11}$$

Группа G_3 действует на алгебру Ли $\mathcal{G}_3$ дифференциальных операторов посредством сопряженного представления

$$K \to K^g = \mathbf{T}(g)\,K\mathbf{T}^{-1}(g),$$

и в результате этого действия $\mathcal{G}_3$ разбивается на G_3-орбиты. Дадим классификацию структуры орбит факторалгебры $\tilde{\mathcal{G}} \cong \mathcal{G}_3/\{E\}$, где $\{E\}$ — центр алгебры $\mathcal{G}_3$. Пусть $K \in \mathcal{G}_3$, и пусть a_2, a_0, a_{-2} суть коэффициенты при операторах K_2, D, K_{-2} в разложении оператора $K \neq 0$ по элементам базиса (5.3). Полагая, что $\alpha = a_2 a_{-2} + a_0^2$, находим, что α инвариантно относительно сопряженного представления.

Приведенный ниже список является полным множеством представителей орбит в том смысле, что каждый оператор $K \neq 0$ лежит на одной G_3-орбите в точности с одним из перечисленных в этом списке операторов:

$$\begin{array}{lll} \text{Случай 1} & (\alpha < 0) & K_{-2} - K_2 + \beta^2 M, \quad |\beta| \neq 1, \quad K_{-2} - K_2 + M + \gamma B_1, \\ \text{Случай 2} & (\alpha > 0) & D + \beta M, \\ \text{Случай 3} & (\alpha = 0) & K_2 + M, \quad K_2 + P_1, \quad K_2, \quad M, \quad P_1 + B_2, \quad P_1. \end{array} \tag{5.12}$$

Теперь рассмотрим задачу определения дифференциальных операторов S более высокого порядка, которые являются симметриями уравнения (5.2). Специальная структура уравнения (5.2) позволяет нам несколько упростить эту задачу. Поскольку мы всего лишь применяем оператор S к решениям Ψ уравнения $Q\Psi = 0$, без потери общности можно потребовать, чтобы S совсем не содержал производных по t. Иначе говоря, каждый раз, когда в S появляется оператор ∂_t, его можно заменить на

$i(\partial_{x_1x_1}+\partial_{x_2x_2})$. К этому вопросу можно подойти с иной точки зрения, заметив, что если S — оператор симметрии, то и $S'=S+XQ$, где X — произвольный дифференциальный оператор, также является оператором симметрии. Более того, для любого решения Ψ уравнения (5.2) выполняется соотношение $S'\Psi=S\Psi$. Имеется единственный такой выбор X, что оператор S' не содержит производных по t.

Учитывая сказанное выше, мы видим, что только операторы P_j, B_j, E, порождающие алгебру Вейля, и оператор M являются дифференциальными операторами порядка не выше первого по переменной x_j. Операторы $K_2=-i(B_1^2+B_2^2)$, $K_{-2}=i(P_1^2+P_2^2)$ и $D=-i[\{B_1, P_1\}+\{B_2, P_2\}]$ имеют второй порядок. (Эти равенства справедливы с учетом замены ∂_t на $i(\partial_{x_1x_1}+\partial_{x_2x_2})$.) Вообще говоря, можно вычислить все операторы симметрии S_2 порядка не выше второго по переменным x_1 и x_2:

$$S=\sum_{i,\,j=1}^{2} a_{ij}(\mathbf{x},\,t)\,\partial_{x_ix_j}+\sum_{j=1}^{2} b_j(\mathbf{x},\,t)\,\partial_{x_j}+c(\mathbf{x},\,t).$$

Довольно утомительные вычисления показывают, что такие операторы образуют двадцатимерное векторное пространство. Базис такого пространства образован оператором нулевого порядка E, пятью операторами первого порядка P_j, B_j, M и тремя перечисленными ранее операторами второго порядка $iK_{\pm 2}$, iD плюс одиннадцать операторов второго порядка

$$B_1^2-B_2^2,\quad B_1P_1-B_2P_2,\quad P_1^2-P_2^2,\quad \{B_1, M\},\quad \{B_2, M\},\quad \{P_1, M\},$$
$$\{P_2, M\},\quad B_1B_2,\quad P_1P_2,\quad B_1P_2+B_2P_1,\quad M^2. \tag{5.13}$$

Следовательно, все симметрии второго порядка суть симметрические квадратичные формы от B_j, P_j, E и M.

Задача об R-разделении переменных для уравнения (5.2) была решена в [23]. Здесь мы рассмотрим только те системы, которые не просто допускают решения с R-разделенными переменными, но обладают еще и тем свойством, что любое допустимое решение состоит из произведения трех сомножителей, каждый из которых удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению по своей переменной. Поскольку (5.2) — уравнение с тремя переменными, теперь мы имеем две константы разделения, которые связаны с каждой системой координат, допускающей разделение переменных.

Связь между орбитами симметрий первого порядка (5.12) и системами координат, допускающими разделение переменных, теперь довольно слабая. Правда, можно найти новую (не единственную) систему координат $\{u, v, w\}$, соответствующую любому оператору симметрии первого порядка K и такую, что переменную u можно выделить из уравнения (5.2) (см. аналогич-

ные рассуждения относительно уравнения Гельмгольца в разд. 1.2). Однако получающееся при этом уравнение относительно переменных v, w может и не допускать разделения этих переменных. Следовательно, диагонализация оператора симметрии K может соответствовать частичному, а не полному разделению переменных.

Рассмотрим результаты, полученные в [23]. Можно найти пару дифференциальных операторов K и S, соответствующих каждому R-разделению переменных для уравнения (5.2) и таких, что

1) K и S суть операторы симметрии уравнения (5.2) и $[K, S] = 0$;
2) $K \in \tilde{\mathcal{G}}_3$, т. е. K — оператор первого порядка по переменным x_1, x_2 и t;
3) S — оператор второго порядка по переменным x_1, x_2 и не содержит членов с ∂_t.

Для R-разделения переменных необходимо, чтобы одновременно выполнялись уравнения

$$Q\Psi = 0, \quad K\Psi = i\lambda\Psi, \quad S\Psi = \mu\Psi, \tag{5.14}$$

где собственные значения λ и μ — обычные константы разделения для решений Ψ с R-разделенными переменными.

Следовательно, K принадлежит алгебре симметрии $\tilde{\mathcal{G}}_3$, а оператор S можно представить как симметричную квадратичную форму относительно B_j, P_j, E и M. Таким образом, возможные системы координат, в которых уравнение (5.2) имеет решения с R-разделенными переменными, можно всегда охарактеризовать при помощи уравнений для собственных функций операторов не выше второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $\mathcal{G}_3$. В табл. 12 перечислены возможные коммутирующие операторы K, S, системы координат $\{u, v, w\}$, допускающие R-разделение переменных, и решения с разделенными переменными.

Следует сказать несколько слов относительно обозначений, введенных нами для систем координат в табл. 12. Системы координат 13—17 не представляют для нас большого интереса, так как они являются следствием того факта, что в результате диагонализации P_1 уравнение Шредингера для свободной частицы (5.2) фактически сводится к уравнению (1.2). Остальные системы координат связаны с гамильтонианами свободной частицы, линейного потенциала, гармонического осциллятора и репульсивного осциллятора точно таким образом, как это описано в разд. 2.1. Каждая система в таблице обозначается через Ab^l. При этом прописная буква указывает тип гамильтониана, $F \leftrightarrow$ свободная частица, $L \leftrightarrow$ линейный потенциал, $O \leftrightarrow$ гар-

Таблица 12

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(i\partial_t + \partial_{xx} + \partial_{yy})\Psi = 0$

	Операторы K, S	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{i\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1а	Fc^1 K_2, B^2	$x = uw$ $y = vw$	$\mathcal{R} = (u^2 + v^2)\, w/4$	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
1б	Fc^2 K_{-2}, P_1^2	$x = u$ $y = v$	0	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
2а	Fr^1 K_2, M^2	$x = uw \cos v$ $y = uw \sin v$	$u^2 w/4$	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
2б	Fr^2 K_{-2}, M^2	$x = u \cos v$ $y = u \sin v$	0	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
3а	Fp^1 K_2, $\{B_2, M\}$	$x = w\,(u^2 - v^2)/2$ $y = uvw$	$(u^2 + v^2)^2\, w/16$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
3б	Fp^2 K_{-2}, $\{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2$ $y = uv$	0	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра

4а	Fe^1 $K_2,\ M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v$ $y = w \operatorname{sh} u\ u \sin v$
4б	Fe^2 $K_{-2},\ M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \operatorname{sh} u \sin v$
5а	Lc^1 $K_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$ $B_2^2 + 2bEP_2$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$
5б	Lc^2 $K_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$ $P_1^2 - 2aEB_1$	$x = u + aw^2$ $y = v + bw^2$
6а	Lp^1 $K_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2)\, w/2 + a/w$ $y = uvw$
6б	Lp^2 $K_{-2} - aB_1,$ $\{P_2, M\} + aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2/2$ $y = uv$
7	Oc $K_{-2} - K_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u\ (1 + w^2)^{1/2}$ $y = v\ (1 + w^2)^{1/2}$

$(\mathrm{sh}^2 u + \cos^2 v)\, w/4$	Модифицированная функция Матье Функция Матье
0	Модифицированная функция Матье Функция Матье
$(u^2 + v^2)\, w/4 -$ $- (au + bv)/2w$	Функция Эйри Функция Эйри
$(au + bv)\, w$	Функция Эйри Функция Эйри
$(u^2 + v^2)^2\, w/16 -$ $- (u^2 - v^2)\, a/4w$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
$(u^2 - v^2)\, aw/4$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
$(u^2 + v^2)\, w/4$	Функция Эрмита Функция Эрмита

Продолжение табл. 12

	Операторы K, S	Координаты $\{u, v, w\}$
8	Or $K_{-2} - K_2$, M^2	$x = u\,(1 + w^2)^{1/2} \cos v$ $y = u\,(1 + w^2)^{1/2} \sin v$
9	Oe $K_{-2} - K_2$, $M^2 - P_2^2 - B_2^2$	$x = (1 + w^2)^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = (1 + w^2)^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$
10а	Rc^1 D, $\{B_1, P_1\}$	$x = u \mid w \mid^{1/2}$ $y = v \mid w \mid^{1/2}$
10б	Rc^2 $K_{-2} + K_2$, $P_1^2 - B_1^2$	$x = u \mid w^2 - 1 \mid^{1/2}$ $y = v \mid w^2 - 1 \mid^{1/2}$
11а	Rr^1 D, M^2	$x = u \mid w \mid^{1/2} \cos v$ $y = u \mid w \mid^{1/2} \sin v$
11б	Rr^2 $K_{-2} + K_2$, M^2	$x = \mid w^2 - 1 \mid^{1/2} u \cos v$ $y = \mid w^2 - 1 \mid^{1/2} u \sin v$

Множитель $e^{i\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
$u^2w/4$	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
$(\mathrm{sh}^2\, u + \cos^2 v)\, w/4$	Функция Айнса Функция Айнса
0	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
$\varepsilon\,(u^2 + v^2)\, w/4$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
0	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция
$\varepsilon u^2 w/4$	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция

12a	Re^{I} $D,$ $M^2 - {}^1/_2\,\{B_2,\ P_2\}$	$x = \lvert w \rvert^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \lvert w \rvert^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$
12б	Re^2 $K_{-2} + K_2,$ $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \lvert w^2 - 1 \rvert^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \lvert w^2 - 1 \rvert^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$
13	$L1$ $P_1,\ B_2^2 - 2bEP_2$	$x = u$ $y = vw + b/w$
14	$L2$ $P_1,\ P_2^2 - 2aEB_2$	$x = u$ $y = v + aw^2$
15	$O1$ $P_1,\ P_2^2 + B_2^2$	$x = u$ $y = v\,(1 + w^2)^{1/2}$
16	$R1$ $P_1,\ \{B_2,\ P_2\}$	$x = u$ $y = v \lvert w \rvert^{1/2}$
17	$R2$ $P_1,\ P_2^2 - B_2^2$	$x = u$ $y = v \lvert w^2 - 1 \rvert^{1/2}$

0	Функция Айнса Функция Айнса
$\varepsilon\,(\mathrm{sh}^2\,u + \cos^2 v)/4$	Функция Айнса Функция Айнса
$wv^2/4 - bv/2w$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
avw	Экспоненциальная функция Функция Эйри
$wu^2/4$	Экспоненциальная функция Функция Эрмита
0	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра
$\varepsilon v^2 w/4$	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра

монический осциллятор, $R \longleftrightarrow$ репульсивный осциллятор[1]); строчная буква указывает тип системы координат, используемой в каждом из этих гамильтонианов: $c \longleftrightarrow$ декартовы координаты, $r \longleftrightarrow$ радиальные (полярные) координаты, $p \longleftrightarrow$ параболические и $e \longleftrightarrow$ эллиптические координаты[2]). Индекс j служит для различения двух систем на одной и той же G_3-орбите.

В каждом случае $w = t$, а решение с разделенными переменными для переменной w является экспоненциальной функцией. В последнем столбце табл. 12 сначала дается решение для переменной u, а затем — решение для переменной v. Символ $\varepsilon = \pm 1$ показывает знак выражения $1 - w^2$, а функции ангармонического осциллятора суть решения дифференциального уравнения вида

$$f''(u) + (\lambda u^2 + \alpha u^4 - \beta) f(u) = 0, \qquad \alpha, \beta \in R. \tag{5.15}$$

С точки зрения группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений существует 26 неэквивалентных систем координат. (Как указано в замечаниях к табл. 6, этот список 26 систем координат, неэквивалентных относительно группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений, не является списком орбит, поскольку определенные пары орбит группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений позволяют вычислить допускающие разделение переменных координаты, отличающиеся только знаком параметра.) Однако две системы координат можно считать эквивалентными, если под действием некоторого $g \in G_3$ первую систему можно преобразовать во вторую. С точки зрения операторов система координат, описанная операторами K, S, эквивалентна системе координат, описанной операторами K', S', если в результате сопряженного действия группы G_3 на обертывающую алгебру алгебры $\mathcal{G}_3$ двумерное пространство, натянутое на K, S, может быть отображено в двумерное пространство, натянутое на K', S'. Согласно этому более общему отношению эквивалентности, не все из 26 вышеуказанных систем координат являются неэквивалентными. В самом деле, системы координат, обозначенные через Ab^1 и Ab^2, принадлежат одним и тем же двумерным орбитам; следовательно, имеется только 17 классов неэквивалентных орбит. (Для удобства в приложениях представители орбит 5, 6, 13, 14 содержат параметры a, b. При помощи симметрии растяжения некоторые из этих параметров можно нормировать так, чтобы они приняли значение ± 1.)

---

[1]) Первые буквы английских названий: free particle, linear potential, harmonic oscillator, repulsive oscillator соответственно. — *Прим. перев.*

[2]) Первые буквы английских названий: Cartesian, radial, parabolic, elliptic соответственно. — *Прим. перев.*

Эти эквивалентности можно описать при помощи оператора $J = \exp[\pi(K_2 - K_{-2})/4]$:

$$J\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{2}}{(1+t)} \exp\left[i\,(1+t)^{-1}\,\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{4}\right] \times$$
$$\times\, \Phi\left(\frac{t-1}{t+1},\ \sqrt{2}\,(t+1)^{-1}\,\mathbf{x}\right), \qquad \Phi \in \mathcal{F}. \tag{5.16}$$

Заметим, что $J^2 = \exp[\pi(K_2 - K_{-2})/2]$ и что

$$\begin{aligned} &J^2\Phi(t, \mathbf{x}) = t^{-1}\exp[i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4t]\,\Phi(-t^{-1}, t^{-1}\mathbf{x}), \\ &J^4\Phi(t, \mathbf{x}) = -\Phi(t, -\mathbf{x}), \quad J^8\Phi(t, \mathbf{x}) = \Phi(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Легко показать, что $J(K_{-2} + K_2)J^{-1} = D$, и, анализируя сопряженное действие оператора J на операторы второго порядка, можно доказать, что три системы координат Rc^2, Rr^2 и Re^2 эквивалентны относительно J трем системам Rc^1, Rr^1 и Re^1 соответственно.

Обозначая сопряженное действие оператора J^2 на $K \in \mathcal{G}_3$ через $K' = J^2KJ^{-2}$, находим $P_j' = -B_j$, $B_j' = P_j$, $K_{-2}' = -K_2$, $K_2' = -K_{-2}$, $D' = -D$, $M' = M$, $E' = E$, откуда следует, что шесть пар вида Fa^1, Fa^2 или La^1, La^2 эквивалентны относительно J^2.

Теперь покажем, что операторы (5.3) можно представить как алгебру Ли кососимметрических операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R_2)$ комплекснозначных функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу в плоскости. Для этого предположим, что t — фиксированный параметр, и заменим в формулах (5.3) ∂_t на $i(\partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2})$. Тогда легко показать, что получающиеся в результате операторы, умноженные на i и ограниченные на множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в R_2, имеют единственные самосопряженные расширения. Действительно, эти операторы являются вещественными линейными комбинациями операторов

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_2 = i\,(x_1^2 + x_2^2)/4, \quad \mathcal{H}_{-2} = i\,(\partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2}), \quad \mathcal{P}_j = \partial_{x_j}, \\ &\mathcal{B}_j = ix_j/2, \quad \mathcal{M} = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad \mathcal{E} = i, \\ &\mathcal{D} = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Заметим, что при $t = 0$ операторы (5.3) сводятся к виду (5.18). Таким образом, операторы (5.18) удовлетворяют тем же соотношениям коммутирования (5.4), что и операторы (5.3). Например, выполняется общее тождество

$$\exp(t\mathcal{H}_{-2})\,\mathcal{H}\exp(-t\mathcal{H}_{-2}) = K, \tag{5.19}$$

которое связывает операторы $\mathcal{H}$ (5.18) и K (5.3). Здесь $\exp(t\mathcal{H}_{-2})$ — унитарный оператор в $L_2(R_2)$, соответствующий сдвигу по времени в задаче о свободной частице. В [67] пока-

зано, что

$$\exp(a\mathscr{K}_{-2})f(\mathbf{x}) = \text{l. i. m.}\,(4\pi ia)^{-1}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4ia}\right]f(\mathbf{y})\,dy_1\,dy_2, \tag{5.20}$$

$$f \in L_2(R_2).$$

Если $f \in L_2(R_2)$, то можно показать, что $\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{K}_{-2}\Psi$, или уравнению $i\partial_t\Psi = -\Delta_2\Psi$ (почти для всех t), каждый раз, когда f находится в области определения оператора $\mathscr{K}_{-2}$ и $\Psi(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Кроме того, унитарные операторы $\exp(\alpha K) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\exp(\alpha\mathscr{K})\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$ отображают функцию Ψ в функцию $\Phi = \exp(\alpha K)\Psi$, которая также удовлетворяет уравнению $i\partial_t\Phi = -\Delta_2\Phi$ для каждой линейной комбинации $\mathscr{K}$ операторов (5.18). Таким образом, операторы $\exp(\alpha K)$ являются операторами симметрии уравнения (5.2).

Ниже мы увидим, что операторы (5.18) порождают глобальное унитарное неприводимое представление группы G_3 в $L_2(R_2)$. Принимая во внимание этот факт, будем считать, что $\mathbf{U}(g)$, $g \in G_3$, суть соответствующие унитарные операторы, и положим $\mathbf{T}(g) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$. Отсюда следует, что $\mathbf{T}(g)$ являются унитарными операторами симметрии соотношений (5.2) с соответствующими инфинитезимальными операторами $K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$.

Теперь рассмотрим оператор $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2 = i\left[\Delta_2 - {}^1/_4(x_1^2 + x_2^2)\right]$. Если $f \in L_2(R_2)$, то $\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{L}_3)f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_3\Psi$, или уравнению

$$i\partial_t\Psi = -\Delta_2\Psi + {}^1/_4(x_1^2 + x_2^2)\Psi, \tag{5.21}$$

и условию $\Psi(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Аналогичным образом унитарные операторы $\mathbf{V}(g) = \exp(t\mathscr{L}_3)\mathbf{U}(g)\exp(-t\mathscr{L}_3)$ являются операторами симметрии уравнения (5.21) — уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, и соответствующие инфинитезимальные операторы $\exp(t\mathscr{L}_3)\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{L}_3)$ можно представить как дифференциальные операторы первого порядка по t и $\mathbf{x}$. Аналогичные утверждения справедливы для оператора $\mathscr{L}_2 = \mathscr{K}_{-2} + \mathscr{K}_2 = i\left(\Delta_2 + {}^1/_4(x_1^2 + x_2^2)\right)$, который соответствует уравнению $\partial_t\Psi = \mathscr{L}_2\Psi$, или

$$i\partial_t\Psi = -\Delta_2\Psi - {}^1/_4(x_1^2 + x_2^2)\Psi \tag{5.22}$$

(уравнение Шредингера для репульсивного осциллятора), а также для оператора $\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{B}_1 = i(\Delta_2 - x_1/2)$ с соответствующим уравнением вида $\partial_t\Psi = (\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{B}_1)\Psi$, или

$$i\partial_t\Psi = -\Delta_2\Psi + {}^1/_2 x_1\Psi \tag{5.23}$$

(уравнение Шредингера для линейного потенциала).

Эти замечания показывают в явном виде эквивалентность уравнений (5.2) и (5.21)—(5.23). В самом анализе в качестве исходного уравнения мы взяли уравнение (5.2), но, взяв любое другое из этих уравнений, мы получили бы ту же самую алгебру симметрии (5.18).

Из табл. 12 видно, что, кроме координат 13—17, в сущности совпадающих с координатами, рассмотренными в разд. 2.1, каждая система координат, допускающая R-разделение переменных, соответствует G_3-орбите, которая содержит в точности один из гамильтоновых операторов $i\mathscr{K}_{-2}$, $i\mathscr{L}_3$, $i\mathscr{L}_2$ или $i(\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{B}_1)$. Следовательно, каждая система координат, как и следовало ожидать, связана с одним из этих четырех гамильтонианов. Более того, замечания, относящиеся к соотношениям (1.29), (1.30), справедливы и здесь: система координат, допускающая R-разделение переменных для задачи о свободной частице, соответствует системе координат, точно допускающей разделение переменных для одного из трех других уравнений Шредингера, а именно для того уравнения, гамильтониан которого диагонализируется этой системой.

Рассмотрим пару коммутирующих самосопряженных операторов $i\mathscr{K}$, $\mathscr{P}$, где $\mathscr{K} \in \mathscr{G}_3$, а $\mathscr{P}$ — симметрический квадратичный оператор в обвертывающей алгебре алгебры $\mathscr{G}_3$. Эти операторы имеют общее спектральное разложение, т. е. имеется полная система (обобщенных) собственных функций $f_{\lambda,\mu}(\mathbf{x})$ в $L_2(R_2)$, причем

$$i\mathscr{K} f_{\lambda,\mu} = \lambda f_{\lambda,\mu}, \quad \mathscr{P} f_{\lambda,\mu} = \mu f_{\lambda,\mu}, \quad \langle f_{\lambda,\mu}, f_{\lambda',\mu'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.24}$$

где

$$\langle h_1, h_2\rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} h_1(\mathbf{x})\,\bar{h}_2(\mathbf{x})\,dx_1\,dx_2, \qquad h_j \in L_2(R_2) \tag{5.25}$$

(см. [98]). Теперь предположим, что $i\mathscr{K}'$, $\mathscr{P}'$ — еще одна пара коммутирующих самосопряженных операторов, лежащих на той же G_3-орбите, что и пара $i\mathscr{K}$, $\mathscr{P}$. Тогда, перенормировав в случае необходимости эти операторы, мы получаем, что имеется некоторое $g \in G_3$, такое, что

$$\mathscr{K}' = \mathbf{U}(g)\,\mathscr{K}\,\mathbf{U}(g^{-1}), \quad \mathscr{P}' = \mathbf{U}(g)\,\mathscr{P}\,\mathbf{U}(g^{-1}).$$

Следовательно, спектральное разложение пары, отмеченной штрихами, идентично спектральному разложению первой пары. В самом деле, для $f'_{\lambda,\mu} = \mathbf{U}(g) f_{\lambda,\mu}$ имеем

$$i\mathscr{K}' f'_{\lambda,\mu} = \lambda f'_{\lambda,\mu}, \quad \mathscr{P}' f'_{\lambda,\mu} = \mu f'_{\lambda,\mu}, \quad \langle f'_{\lambda,\mu}, f'_{\lambda',\mu'}\rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mu\mu'}, \tag{5.26}$$

а $f'_{\lambda,\mu}$ образует полную о. н. систему в $L_2(R_2)$.

В дальнейшем мы часто будем прибегать к спектральному разложению пары $i\mathscr{K}$, $\mathscr{P}$, где $i\mathscr{K}$ — один из четырех перечислен-

ных выше гамильтонианов. Однако во многих случаях мы можем использовать унитарные операторы симметрии $\mathbf{U}(g)$ для того, чтобы построить эквивалентную пару $i\mathscr{K}'$, $\mathscr{P}'$, спектральное разложение которой вычисляется значительно проще, а эта информация даст нам в результате спектральное разложение исходной пары.

Чтобы продемонстрировать наши замечания на примере, рассмотрим оператор $\mathscr{K}_{-2} = i\Delta_2$. Если $\{f_{\lambda,\mu}\}$ — базис (5.24) обобщенных собственных функций для пары $\mathscr{K}$, $\mathscr{P}$, то $\{f'_{\lambda,\mu}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2}) f_{\lambda,\mu}(\mathbf{x})\}$ — соответствующий базис обобщенных собственных векторов для операторов

$$K = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{K}\exp(-t\mathscr{K}_{-2}), \qquad S = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,\mathscr{G}\exp(-t\mathscr{K}_{-2})$$

и $f'_{\lambda,\mu}(t, \mathbf{x})$ — также решения уравнения Шредингера для свободной частицы (5.2). Аналогичные рассуждения справедливы и для других гамильтонианов. Это проливает свет на взаимоотношения между моделями группы G_3 в случае двух переменных $(\mathbf{x})$ и в случае трех переменных (x, t).

Теперь вычислим в явном виде спектральные разложения пар коммутирующих операторов, перечисленных в табл. 12. Начнем с орбиты Oc и модели в случае двух переменных, т. е. определим спектральное разложение пары операторов $\mathscr{L}_3 = \mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2$, $\mathscr{P}_1^2 + \mathscr{B}_1^2$. Уравнения (5.24) имеют вид

$$[-\Delta_2 + (x_1^2 + x_2^2)/4]f = \lambda f, \qquad (\partial_{x_1x_1} - x_1^2/4)f = \mu f.$$

Заметим, что эти уравнения допускают разделение в переменных x_1, x_2. Сравнивая эти уравнения с (1.34), находим известный о. н. базис собственных функций

$$f_{\lambda,\mu} = oc_{n,m}(\mathbf{x}) = (2^{m+n}\pi n!\, m!)^{-1/2}\exp(-\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)\times$$
$$\times H_n(x_1/\sqrt{2})\,H_n(x_2/\sqrt{2}),$$
$$\mu = -n - {}^1/_2, \quad \lambda + \mu = m + {}^1/_2, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\langle oc_{n,m}, oc_{n'm'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}, \tag{5.27}$$

где $H_n(x)$ — многочлен Эрмита.

Здесь можно непосредственно показать, что, вычисляя экспоненты операторов (5.18), мы получаем глобальное унитарное неприводимое представление группы G_3. Действительно, из рекуррентных формул (2.28), (2.29), (2.33) для многочленов Эрмита можно видеть, что операторы $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$, действуя на oc-базис, определяют унитарное представление алгебры $sl(2, R)$, которое является прямой суммой представлений из дискретной серии, а операторы $\mathscr{W}_2$ определяют унитарное неприводимое представление W_2. Из работы Баргманна [11, 120] следует, что это представление алгебры Ли расширяется до глобального

представления группы G_3, которое неприводимо, поскольку его ограничение до W_2 также неприводимо.

Теперь вычислим унитарные операторы $\mathbf{U}(g)$ в $L_2(R_2)$. Операторы

$$\mathbf{U}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho) = \exp(w_1\mathscr{B}_1)\exp(z_1\mathscr{P}_1)\exp(w_2\mathscr{B}_2)\exp(z_2\mathscr{P}_2)\exp(\rho\mathscr{E}),$$

определяющие неприводимое представление группы W_2, будучи примененными к функции $h(\mathbf{x})$, дают

$$\mathbf{U}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\, h(\mathbf{x}) = \exp(i\rho + i\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}/2)\, h(\mathbf{x}+\mathbf{z}), \qquad h \in L_2(R_2). \quad (5.28)$$

Оператор $\mathbf{U}(\theta) = \exp(\theta\mathscr{M})$, будучи примененным к функции $h(\mathbf{x})$, дает

$$\mathbf{U}(\theta)\, h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}\Theta), \quad (5.29)$$

где Θ определяется в (5.8). Операторы $\mathbf{U}(A)$, $A \in SL(2, R)$, вычисляются значительно сложнее. Мы имеем интегральный оператор $\exp(a\mathscr{K}_{-2})$, определяемый в (5.20); кроме того, нетрудно получить следующие соотношения:

$$\exp(b\mathscr{K}_2)\, h(\mathbf{x}) = \exp(ib\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)\, h(\mathbf{x}), \quad \exp(c\mathscr{D})\, h(\mathbf{x}) = e^c h(e^c\mathbf{x}). \quad (5.30)$$

Выполняя групповое умножение в $SL(2, R)$, получаем следующее соотношение:

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2) = \exp(\operatorname{th}(\varphi)\mathscr{K}_2)\exp(\operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\mathscr{K}_{-2})\exp(-\ln(\operatorname{ch}\varphi)\mathscr{D}),$$

откуда

$$\exp(\varphi\mathscr{L}_2)\, h(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\operatorname{cth}(\varphi)\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)}{4\pi i\operatorname{sh}\varphi} \times$$

$$\times \operatorname{l.i.m.} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{4}\left(-\frac{2}{\operatorname{sh}\varphi}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \operatorname{cth}(\varphi)\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\right)\right] h(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2,$$

$$\varphi \neq 0. \quad (5.31)$$

(Сокращение l. i. m в этой и двух последующих формулах является общепринятым.) Аналогичные вычисления дают

$$\exp(\theta\mathscr{L}_3)\, h(\mathbf{x}) = \frac{\exp(i\operatorname{ctg}(\theta)\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}/4)}{4\pi i\sin\theta} \times$$

$$\times \operatorname{l.i.m.} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{4}\left(-\frac{2}{\sin\theta}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \operatorname{ctg}(\theta)\,\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\right)\right] h(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2,$$

$$\theta \neq n\pi, \quad (5.32)$$

$$\exp[\rho(\mathscr{K}_{-2} + a\mathscr{B}_1)]\, h(\mathbf{x}) = \frac{\exp[i(a\rho x_1/2 - a^2\rho^3/12)]}{4\pi i\rho} \times$$

$$\times \operatorname{l.i.m.} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{4\rho}[(x_1 - a\rho^2 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]\right\} h(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2,$$

$$\rho \neq 0. \quad (5.33)$$