2.6. Базисы и матричные элементы смешанных базисов для уравнения Шредингера

Из (5.20) и (5.27) следует, что базисные функции $oc_{n,m}(\mathbf{x})$ отображаются в о. н. базисные функции $Oc_{n,m}(t,\mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})oc_{n,m}(\mathbf{x})$, которые являются решениями уравнения Шредингера и имеют вид

$$Oc_{n,m}(t,\mathbf{x}) = \\ = (2^{m+n+1}\pi n!m!)^{1/2}\exp\left[\frac{i\pi(m+n-1)}{2} - \frac{(u^2+v^2)(1-iw)}{4}\right]\times \\ \times\left(\frac{w+i}{w-i}\right)^{(m+n)/2}(w-i)^{-1}H_m(u/\sqrt{2})H_n(v/\sqrt{2}), \qquad (6.1)$$

причем

$$x_1 = u(1+w^2)^{1/2}, \qquad x_2 = v(1+w^2)^{1/2}, \qquad t = w.$$

Функции (6.1) соответствуют допускающей разделение переменных системе координат Oc из табл. 12.

Вычислим спектральное разложение для системы координат Or:

$$i(\mathscr{K}_{-2} - \mathscr{K}_2)f = \lambda f, \qquad \mathscr{M}^2 f = \mu f.$$

Базис собственных функций имеет вид

$$\begin{aligned} or^+_{n,m}(\mathbf{x}) &= [m!/2^m\pi(n+m)!]^{1/2}\exp(-r^2/4)\,r^m L_n^{(m)}(r^2/2)\cos m\theta, \\ or^-_{n,m}(\mathbf{x}) &= \operatorname{tg}(n\theta)\,or^+_{n,m}(\mathbf{x}), \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где m, n — целые числа, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$, и $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$. Собственные значения λ и μ связаны с m и n соотношениями $\lambda = 2n + m + 1$, $\mu = -m^2$. При $m = 0$ имеется добавочный собственный вектор

$$or^+_{\lambda,0}(\mathbf{x}) = (2/\pi n!)^{1/2}\exp(-r^2/4)\,L_n^{(0)}(r^2/2), \qquad (6.3)$$

где $L_n^{(\alpha)}(r)$ — многочлены Лагерра. Соотношения ортогональности записываются так:

$$\langle or^{\varepsilon}_{n,m}, or^{\varepsilon'}_{n',m'}\rangle = \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{nn'}\delta_{mm'}, \qquad \varepsilon,\ \varepsilon' = \pm.$$

Базисные функции $Or_{n,m}(t,\mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})or_{n,m}(\mathbf{x})$ от трех переменных определяются соотношениями

$$Or^+_{n,m}(t,\mathbf{x}) = K\left(\frac{m!}{\pi^3 2^m(n+m)!}\right)^{1/2}\frac{(-1)^{m+n}}{2^{2m}}\frac{(w+i)^{m/2+n}}{(w-i)^{m/2+n+1}}\times \\ \times\exp\left[\frac{u^2(iw-1)}{4}\right]L_n^m\left(\frac{u^2}{2}\right)\cos mv, \\ Or^-_{n,m}(t,\mathbf{x}) = \operatorname{tg}(mv)\,Or^+_{n,m}(t,\mathbf{x}), \qquad m \geqslant 1. \qquad (6.4)$$

При $m=0$ имеем $K=\sqrt{2}$; в противном случае $K=1$. Кроме того,

$$x_1=(1+w^2)^{1/2}u\cos v,\qquad x_2=(1+w^2)^{1/2}u\sin v,\qquad t=w.$$

В уравнениях для системы координат Oe

$$i(\mathscr{K}_{-2}-\mathscr{K}_2)f=\lambda f,\qquad (\mathscr{M}^2-\mathscr{P}_2^2-\mathscr{B}_2^2)f=\mu f,$$

переменные разделяются в эллиптических координатах $x_1=\operatorname{ch}\zeta\cos\eta$, $x_2=\operatorname{sh}\zeta\sin\eta$. Мы получаем о. н. базис

$$\begin{aligned} oe^+_{p,\,m}(\mathbf{x})&=\pi^{-1}hc^m_p(i\zeta,\ {}^1/_2)\,hc^m_p(\eta,\ {}^1/_2),\\ oe^-_{p,\,m}(\mathbf{x})&=\pi^{-1}hs^m_p(i\zeta,\ {}^1/_2)\,hs^m_p(\eta,\ {}^1/_2),\end{aligned}\tag{6.5}$$

где

$$hc^m_p(\eta,\ {}^1/_2)=\exp(-{}^1/_4\cos 2\eta)\,C^m_p(\eta,\ {}^1/_2),$$
$$hs^m_p(\eta,\ {}^1/_2)=\exp(-{}^1/_4\cos 2\eta)\,S^m_p(\eta,\ {}^1/_2),$$

а m, p — целые числа, причем $0\leqslant m\leqslant p$, $(-1)^{m-p}=1$. Связь λ и μ с p и m определяется соотношениями $\lambda=p+1$, $\mu=\lambda/2+a^m_p(1/2)$ или $\mu=\lambda/2+b^m_p(1/2)$; соотношения ортогональности имеют вид

$$\langle oe^{\varepsilon}_{p,\,m},\ oe^{\varepsilon'}_{p',\,m'}\rangle=\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{pp'}\delta_{mm'},\qquad \varepsilon,\ \varepsilon'=\pm.$$

Функции $C^m_p(\eta,\zeta)$, $S^m_p(\eta,\zeta)$ являются многочленами Айнса [7], т. е. полиномиальными решениями уравнения Уиттекера — Хилла

$$\frac{d^2v}{d\eta^2}+\zeta\sin 2\eta\frac{dv}{d\eta}+(a-p\zeta\cos 2\eta)\,v=0\tag{6.6}$$

с периодом, равным 2π. Обстоятельный анализ этого уравнения был выполнен Арскоттом [8], и условные обозначения для решений и собственных значений, которые мы здесь используем, принадлежат именно ему. Через $C^m_p(\eta,\zeta)$ обозначаются многочлены порядка p от $\cos\eta$, соответствующие собственным значениям $a=a^m_p(\zeta)$, через $S^m_p(\eta,\zeta)$ — многочлены порядка p от $\sin\eta$, соответствующие собственным значениям $a=b^m_p(\zeta)$.

Базисные функции $Oe_{p,\,m}(t,\mathbf{x})=\exp(t\mathscr{K}_{-2})\,oe_{p,\,m}(\mathbf{x})$ от трех переменных определяются соотношением

$$\begin{aligned} Oe^+_{p,\,m}(t,\ \mathbf{x})=(\lambda^{m+}_p/\pi)\exp[iw(\operatorname{sh}^2u+\cos^2v)/4]\times\\ \times(w-i)^{(p/2)+1}(w+i)^{-p/2}\,hc^m_p(iu,\ {}^1/_2)\,hc^m_p(v,\ {}^1/_2),\end{aligned}\tag{6.7}$$

где

$$x_1=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{ch}u\cos v,\qquad x_2=(1+w^2)^{1/2}\operatorname{sh}u\sin v,\qquad t=w.$$

Чтобы определить $Oe^{-}_{p,m}(t, \mathbf{x})$, в формуле (6.7) следует заменить фазовую постоянную λ_p^{m+}, $|\lambda_p^{m+}|=1$, на λ_p^{m-}, а функции $hc_p^m(\eta, \zeta)$ — на $hs_p^m(\eta, \zeta)$. Зная явный вид многочленов Айнса, можно вычислить константы $\lambda_p^{m\pm}$. Заметим, что формула $Oe_{p,m} = \exp(t\mathscr{H}_{-2})oe_{p,m}$ является нетривиальным соотношением, которому удовлетворяют произведения многочленов Айнса. Этот интеграл можно вычислить (способ вычисления аналогичен вычислению (3.38) в разд. 1.3), так как нам заранее известно, что этот интеграл является решением уравнения Шредингера с R-разделенными переменными u, v, w.

В остальных случаях, перечисленных в табл. 12, с каждой орбитой всегда связаны две системы координат. Для простоты мы всегда будем рассматривать только систему координат с верхним индексом 1. Соответствующие результаты для систем с индексом 2 получаются немедленно после применения унитарных операторов J или J^2 (см. (5.16) и (5.17)).

Система Fc определяется так:

$$i\mathscr{H}_2 f = -{}^1/_4\gamma^2 f, \qquad \mathscr{B}_1 f = {}^1/_2 i\gamma\cos(\alpha) f$$

и имеет базис обобщенных собственных функций

$$\begin{gathered} fc_{\gamma,\alpha}(\mathbf{x}) = r^{-1/2}\delta(r-\gamma)\,\delta(\theta-\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \gamma, \\ \langle fc_{\gamma,\alpha}, fc_{\gamma',\alpha'}\rangle = \delta(\gamma-\gamma')\,\delta(\alpha-\alpha'), \quad x_1 = r\cos\theta, \; x_2 = r\sin\theta. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Базисные функции от трех переменных $Fc_{\gamma,\alpha}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) fc_{\gamma,\alpha}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$Fc_{\gamma,\alpha}(t, \mathbf{x}) = \frac{\gamma^{1/2}}{4\pi i t}\exp\left\{\frac{i[(x_1-\gamma\cos\alpha)^2 + (x_2-\gamma\sin\alpha)^2]}{4t}\right\}. \tag{6.9}$$

Система координат Fr определяется уравнениями

$$i\mathscr{H}_2 f = -{}^1/_4\gamma^2 f, \qquad i\mathscr{M} f = -mf$$

с базисом

$$fr_{\gamma,m}(\mathbf{x}) = (2\pi r)^{-1/2}\delta(r-\gamma)\,e^{im\theta}, \qquad \langle fr_{\gamma,m}, fr_{\gamma',m'}\rangle = \delta(\gamma-\gamma')\,\delta_{mm'}, \tag{6.10}$$

где $0 \leqslant \gamma$, $m = 0, \pm 1, \ldots$, а r, θ — полярные координаты. Базисными функциями от трех переменных являются

$$Fr_{\gamma,m}(t, \mathbf{x}) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{i^{m-1}}{2t}\exp\left[\frac{i(r^2+\gamma^2)}{4t}\right]\exp(im\theta)\,J_m\left(\frac{-r\gamma}{2t}\right), \tag{6.11}$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя.

Система Fp определяется уравнениями

$$i\mathscr{H}_2 f = -{}^1/_4\gamma^2 f, \qquad \{\mathscr{B}_2, \mathscr{M}\} f = -\mu\gamma f,$$

причем базис собственных функций имеет вид

$$fp^{+}_{\gamma,\mu}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (2\pi r)^{-1/2}(1+\cos\theta)^{-i\mu/2-1/4}(1-\cos\theta)^{i\mu/2-1/4}\,\delta(r-\gamma), & -\pi \leqslant \theta < 0, \\ 0, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$fp^{-}_{\gamma,\mu}(\mathbf{x}) = fp^{-}_{\gamma,\mu}(r,\ \theta) = fp^{+}_{\gamma,\mu}(r,\ -\theta), \tag{6.12}$$

где r, θ — полярные координаты, $0 \leqslant \gamma$, $-\infty < \mu < \infty$, спектр непрерывен и имеет кратность, равную двум. Соотношения ортогональности записываются так:

$$\langle fp^{\pm}_{\gamma,\mu},\ fp^{\pm}_{\gamma',\mu'}\rangle = \delta(\gamma-\gamma')\,\delta(\mu-\mu'), \quad \langle fp^{\pm}_{\gamma,\mu},\ fp^{\mp}_{\gamma',\mu'}\rangle = 0.$$

Базисные функции от трех переменных определяются соотношениями

$$Fp^{+}_{\gamma,\mu}(t,\ \mathbf{x}) = \frac{i\gamma^{1/2}\exp(i\gamma^2/4t)}{2^3\pi t\cos(i\mu\pi)}\exp\left(\frac{i(\xi^2+\eta^2)^2}{16t}\right)\times$$
$$\times[D_{-i\mu/2-1/2}(\sigma\xi t^{-1/2})\,D_{i\mu/2-1/2}(\sigma\eta t^{-1/2}) + D_{-i\mu/2-1/2}(-\sigma\xi t^{-1/2})\times$$
$$\times D_{i\mu/2-1/2}(-\sigma\eta t^{-1/2})], \qquad t>0,$$
$$Fp^{+}_{\gamma,\mu}(-t,\ \mathbf{x}) = \overline{Fp}^{+}_{\gamma,-\mu}(t,\ \mathbf{x}),$$
$$Fp^{-}_{\gamma,\mu}(t,\ x_1,\ x_2) = Fp^{+}_{\gamma,\mu}(t,\ x_1,\ -x_2), \tag{6.13}$$

где $\sigma = \gamma^{1/2}\exp(i\pi/4)$ а ξ, η — параболические координаты

$$2x_1 = \xi^2 - \eta^2, \qquad x_2 = \xi\eta.$$

Система Fe определяется уравнениями

$$i\mathscr{K}_2 f = -{}^1/_4\gamma^2 f, \qquad (\mathscr{M}^2 + 4\mathscr{B}_1^2 - 4\mathscr{B}_2^2)\,f = -\mu f$$

(эквивалентными уравнениям строки 4а табл. 12, так как $\mathscr{K}_2 = -i(\mathscr{B}_1^2 + \mathscr{B}_2^2)$). Базисные функции имеют вид

$$fe_{\gamma,n}(\mathbf{x}) = (r\pi)^{-1/2}\,\delta(r-\gamma)\begin{cases} \mathrm{ce}_n(\theta,\ \gamma^2/2), & n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \mathrm{se}_{-n}(\theta,\ \gamma^2/2), & n=-1,\ -2,\ \ldots, \end{cases}$$
$$\gamma \geqslant 0, \qquad \langle fe_{\gamma,n},\ fe_{\gamma',n'}\rangle = \delta(\gamma-\gamma')\,\delta_{nn'}, \tag{6.14}$$

где $\mathrm{ce}_n(\theta, q)$, $\mathrm{se}_n(\theta, q)$ — периодические функции Матье (Б.26) и r, θ — полярные координаты. Все собственные значения $\mu = \mu_n$ дискретны и имеют кратность, равную единице. Базисные функции $Fe_{\gamma,n}(t, \mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,fe_{\gamma,n}(\mathbf{x})$ записываются в виде

$$Fe_{\gamma,n}(t,\ \mathbf{x}) = \frac{A_{\gamma,n}}{4\pi i\tau}\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/2}\exp[i\tau(\cos^2\sigma + \mathrm{sh}^2\rho + \gamma^2)]\times$$
$$\times\begin{cases} \mathrm{ce}_n(\sigma,\ \gamma^2/2)\,\mathrm{Ce}_n(\rho,\ \gamma^2/2), & n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \\ \mathrm{se}_{-n}(\sigma,\ \gamma^2/2)\,\mathrm{Se}_{-n}(\rho,\ \gamma^2/2), & n=-1,\ -2,\ \ldots, \end{cases} \tag{6.15}$$

где $A_{\gamma,n}$ — константа нормировки, $\mathrm{Se}_n(\rho, q)$ и $\mathrm{Ce}_n(\rho, q)$ — модифицированные функции Матье (3.40) (см. разд. 1.3) и

$$x_1 = -2\tau \operatorname{ch}\rho \cos\sigma, \qquad x_2 = -2\tau \operatorname{sh}\rho \sin\sigma, \qquad t = \tau.$$

Система Lc (преобразованная таким образом, что $b = 0$) определяется уравнениями

$$i(\mathscr{K}_2 + a\mathscr{P}_1) f = \lambda f, \qquad \mathscr{B}_2^2 f = -{}^1/_4\rho^2 f, \qquad a \neq 0,$$

с базисными функциями вида

$$lc_{\lambda,\rho}(\mathbf{x}) = \frac{\delta(x_2 - \rho)}{(2\pi|a|)^{1/2}} \exp\left[-ia^{-1}\left(\lambda x_1 + \frac{\rho^2 x_1}{4} + \frac{x_1^3}{12}\right)\right], \tag{6.16}$$

$$\langle lc_{\lambda,\rho}, lc_{\lambda',\rho'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta(\rho - \rho'), \qquad -\infty < \lambda, \rho < \infty.$$

Базисные функции от трех переменных имеют вид

$$Lc_{\lambda,\rho}(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \frac{(9a)^{-1/3}}{8iw\,(2\pi|a|)^{1/2}} \exp\left[i\left((u^2 + v^2)\frac{w}{4} - \frac{au}{w} - \frac{\rho v}{2} - \frac{a}{3w^3} - \frac{\lambda}{w}\right)\right] \times$$

$$\times \mathrm{Ai}\left[(36a)^{-1/3}\left(\frac{u}{a} + \frac{\lambda}{a} + \frac{\rho^2}{4a}\right)\right], \tag{6.17}$$

где $\mathrm{Ai}(z)$ — функция Эйри ((1.52), разд. 2.1). В данном случае

$$x_1 = uw + a/w, \qquad x_2 = vw, \qquad t = w.$$

Система Lp определяется уравнениями

$$i(\mathscr{K}_2 + a\mathscr{P}_1) f = \lambda f, \qquad (\{\mathscr{B}_2, \mathscr{M}\} + a\mathscr{P}_2^2) f = \mu f,$$

причем базисные функции имеют вид

$$lp_{\lambda,n}(\mathbf{x}) = (2\pi|a|)^{-1/2} h_n(x_2) \exp[-i(\lambda x_1 + x_1 x_2^2/4 + x_1^3/12)/a],$$

$$\langle lp_{\lambda,n}, lp_{\lambda',n'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{nn'}, \qquad -\infty < \lambda < \infty, \tag{6.18}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

В данном случае функция ангармонического осциллятора $h_n(x)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2 h(x)}{dx^2} - \left(\frac{\mu}{a} + \frac{\lambda x^2}{a^2} + \frac{x^4}{4a^2}\right) h(x) = 0, \quad \lambda,\ a \text{ фиксированы}, \tag{6.19}$$

таким, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_n(x)|^2\, dx = 1. \tag{6.20}$$

Собственные значения $\mu = \mu_n(\lambda)$ уравнения (6.19) при условии (6.20) являются дискретными (см. [102]) и имеют кратность,

равную единице; предполагается, что эти собственные значения упорядочены таким образом, что $\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$. Функция ангармонического осциллятора $h_n(x)$ либо четна, либо нечетна для каждого значения n.

Обозначим общее решение уравнения (6.19) через $h_{\mu,\lambda,a}(x)$. Выполняя разделение переменных, легко показать, что базисные функции $Lp_{\lambda,n}(t,\mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{K}_{-2})\,lp_{\lambda,n}(\mathbf{x})$ имеют вид

$$Lp_{\lambda,n}(t,\mathbf{x}) = \\ = C_{\lambda,n}w^{-1}\exp\left\{i\left[\frac{(u^2+v^2)^2w}{16} - \frac{a(u^2-v^2)}{4w} - \frac{a^2}{12w^2} - \frac{\lambda}{w}\right]\right\}\times \\ \times h_{2\mu_n,\lambda,a/2}(u)\,h_{2\mu_n,\lambda,a/2}(iv), \qquad (6.21)$$

где обе функции h имеют ту же четность, что и функции $h_n(x)$, а $C_{\lambda,n}$ является константой нормировки. (Заметим, что поскольку уравнение (6.19) инвариантно по отношению замены $x \to -x$, то для каждого μ, λ, a это уравнение имеет как единственное четное решение по x, так и единственное нечетное решение с точностью до некоторой мультипликативной константы нормировки.) Кроме того,

$$x_1 = (u^2 - v^2)\,w/2 + a/w, \qquad x_2 = uvw, \qquad t = w.$$

Система Rc определяется уравнениями

$$i\mathscr{D}f = \rho f, \qquad \{\mathscr{B}_1, \mathscr{P}_1\}f = \mu f,$$

причем базисные собственные функции имеют вид

$$rc^{\varepsilon\varepsilon'}_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1}(x_1)_{\varepsilon}^{-i\lambda-1/2}(x_2)_{\varepsilon'}^{-i\mu-1/2}, \\ -\infty < \lambda,\ \mu < \infty, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm, \quad \lambda = \rho - \mu; \qquad (6.22)$$

см. (1.46). Соотношения ортогональности имеют вид

$$\left\langle rc^{\varepsilon\varepsilon'}_{\lambda,\mu},\ \overline{rc^{\varepsilon\varepsilon'}_{\bar\lambda,\bar\mu}}\right\rangle = \delta_{\varepsilon\bar\varepsilon}\delta_{\varepsilon'\bar\varepsilon'}\delta(\lambda-\bar\lambda)\,\delta(\mu-\bar\mu).$$

Собственные функции от трех переменных определяются соотношением

$$Rc^{++}_{\lambda\mu}(t,\mathbf{x}) = (8\pi^2 iw)^{-1}\left[\exp(i\pi/4)\,(2w)^{1/2}\right]^{-i(\lambda+\mu)+1}\times \\ \times\Gamma(1/2 - i\lambda)\,\Gamma(1/2 - i\mu)\exp\left[\frac{i(u^2+v^2)}{8}\right]\times \\ \times D_{i\lambda-1/2}\left(\frac{-u}{(2i)^{1/2}}\right)D_{i\mu-1/2}\left(\frac{-v}{(2i)^{1/2}}\right), \qquad t > 0, \qquad (6.23)$$

где $x_1 = |w|^{1/2}u$, $x_2 = |w|^{1/2}v$, $t = w$. Остальные базисные функции от трех переменных определяются равенствами

$$Rc_{\lambda\mu}^{++}(u, v) = \exp[\pi(i + \lambda + \mu)]\, Rc_{\lambda\mu}^{--}(-u, -v) = \\ = \exp[\pi(i/2 + \lambda)]\, Rc_{\lambda\mu}^{-+}(-u, v) = \\ = \exp[\pi(i/2 + \mu)]\, Rc_{\lambda\mu}^{+-}(u, -v). \tag{6.24}$$

Система Rr определяется уравнениями

$$\mathscr{D}f = i\rho f, \qquad \mathscr{M}f = imf.$$

Собственные функции вида

$$rr_{\rho, m}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1} r^{i\rho-1} e^{im\theta}, \quad -\infty < \rho < \infty, \ m = 0, \pm 1, \ldots, \\ x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\sin\theta, \tag{6.25}$$

удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности:

$$\langle rr_{\rho, m}, rr_{\rho', m'}\rangle = \delta_{mm'}\delta(\rho - \rho').$$

Базисные функции от трех переменных имеют вид

$$Rr_{\rho, m}(t, \mathbf{x}) = 2^{-m+i\rho-2} \exp\left[i\pi \frac{(3m - 1 + i\rho)}{4}\right] \pi^{-1} w^{i\rho/2-1/2} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{m + i\rho + 1}{2}\right) \frac{u^m}{\Gamma(m+1)}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix}(m + 1 - i\rho)/2 \\ m + 1\end{matrix}\middle| \frac{iu^2}{4}\right) \exp(imv), \tag{6.26}$$

где

$$x_1 = \sqrt{w}\, u\cos v, \qquad x_2 = \sqrt{w}\, u\sin v, \qquad t = w > 0.$$

Система Re определяется уравнениями

$$\mathscr{D}f = i\lambda f, \qquad (\mathscr{M}^2 + {}^1/_2\{\mathscr{B}_2, \mathscr{P}_2\})f = \mu f.$$

Ортонормальный базис собственных функций имеет вид

$$re_{\lambda m}^{+}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} r^{i\lambda-1} Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda), \tag{6.27а}$$

$$re_{\lambda m}^{-}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} r^{i\lambda-1} Gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda), \tag{6.27б}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

где $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ и введены следующие обозначения:

$$Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) = \exp[i\cos(2\theta)/16]\, gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda),$$
$$Gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) = \exp[i\cos(2\theta)/16]\, gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda).$$

Функции $gc_m(\theta, \alpha, \beta)$, $gs_m(\theta, \alpha, \beta)$ суть соответственно четное и нечетное неполиномиальные решения уравнения Уиттекера — Хилла

$$\frac{d^2g}{d\theta^2} + \left(\mu + \frac{\alpha^2}{8} + \alpha\beta\cos 2\theta - \frac{\alpha^2}{8}\cos 4\theta\right) g = 0 \tag{6.28}$$

с периодом, равным 2π. Нижний индекс m (число нулей на отрезке $[0, 2\pi]$) отмечает дискретные собственные значения $\mu = \mu_m$ оператора $\mathscr{M}^2 + {}^1/_2\{\mathscr{B}_2, \mathscr{P}_2\}$. Эти обозначения введены Урвином и Арскоттом [127]. Каждое из решений Gc_m и Gs_m можно представить в виде бесконечного тригонометрического ряда по $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$ соответственно, сходящегося для дискретных собственных значений μ_m. Соотношения ортогональности имеют вид

$$\langle re^{\pm}_{\lambda m}, re^{\pm}_{\lambda' m'}\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{mm'}, \qquad \langle re^{\pm}_{\lambda m}, re^{\mp}_{\lambda' m'}\rangle = 0,$$

причем базисные функции от трех переменных определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Re^{+}_{\lambda m}(t, \mathbf{x}) &= K^{\lambda+}_m w^{(i\lambda-1)/2} Gc_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(v, {}^1/_4, -\lambda), \\ Re^{-}_{\lambda m}(t, \mathbf{x}) &= K^{\lambda-}_m w^{(i\lambda-1)/2} Gs_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gs_m(v, {}^1/_4, -\lambda), \end{aligned} \tag{6.29}$$

где

$$x_1 = \sqrt{w}\,\mathrm{ch}\,u \cos v, \qquad x_2 = \sqrt{w}\,\mathrm{sh}\,u \sin v, \qquad t = w > 0.$$

В принципе константы $K^{\lambda\pm}_m$ можно вычислить; для этого нужно лишь выбрать частные значения параметров u, v, w. В самом деле, в процессе нахождения функций $Re^{\pm}$ при помощи разделения переменных мы получаем соотношения

$$K^{\lambda+}_m Gc_m(iu, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(v, {}^1/_4, -\lambda) = \exp[i(\mathrm{sh}^2 u + \cos^2 v)/4] \times$$
$$\times \int_{-\pi}^{\pi} Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) \exp[-i(\mathrm{ch}\,u \cos v \cos\theta + \mathrm{sh}\,u \sin v \sin\theta)^2/8] \times$$
$$\times D_{i\lambda-1}(-[\mathrm{ch}\,u \cos v \cos\theta + \mathrm{sh}\,u \sin v \sin\theta]/(2i)^{1/2})\, d\theta$$

и аналогичные соотношения для функций $Gs_n(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$. Константы $K^{\lambda\pm}_m$ вычисляются при конкретных значениях аргументов; например, если $Gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A^m_k \cos 2k\theta$, то

$$K^{\lambda+}_m = 2\pi D_{i\lambda-1}(0)\, A^m_0\, [Gc_m(\pi/2, {}^1/_4, -\lambda)\, Gc_m(0, {}^1/_4, -\lambda)]^{-1}.$$

На этом мы закончим определение базисов пространства решений уравнения Шредингера (5.2).

Так же как в разд. 2.1, можно показать, что эти результаты приводят к целому ряду теорем относительно расширения гильбертова пространства. Так, если $\{f_{\lambda\mu}\}$ — о. н. базис для $L_2(R_2)$, то $\{\mathbf{U}(g) f_{\lambda\mu}\}$ для любого $g \in G_3$ также является о. н. базисом. В частности, каждая из построенных выше моделей в случае трех переменных обеспечивает базис для $L_2(R_2)$ (а также базис решений уравнения (5.2)). Кроме того, для каждого базиса

можно получить дискретные и непрерывные производящие функции.

Теперь определим некоторые м. э. с. б. $\langle Aa_{\lambda\mu}, Bb_{\lambda'\mu'}\rangle$, которые позволят нам разложить собственные функции $Aa_{\lambda\mu}$ по собственным функциям $Bb_{\lambda'\mu'}$. Полезность этих формул заключается в том, что они инвариантны под действием группы G, и, следовательно, эти же выражения позволят нам выполнить разложение $\mathbf{U}(g)Aa_{\lambda\mu}$ по $\mathbf{U}(g)Bb_{\lambda'\mu'}$, где результаты могут быть гораздо менее очевидными. Ниже мы вычислим некоторые представляющие определенный интерес м. э. с. б., используя для этого базисы по двум переменным. Вследствие инвариантности G_3 аналогичные результаты имеют место и для базисов по трем переменным.

Мы не рассматриваем здесь м. э. с. б., связанные с дискретным базисом *oe*. Этот базис представляет особый интерес, но определение таких м. э. с. б. связано с применением гильбертова пространства Баргманна — Сегала аналитических функций, рассматривать которое мы не будем. Подробные результаты можно найти в работе [24]; там же дается анализ интересной связи между многочленами Айнса и теорией представлений алгебры $SU(2)$. Для большинства остальных базисов мы даем м. э. с. б. с одним из дискретных базисов *oc* или *or*. (Принцип, по которому строятся нижеследующие вычисления, очевиден, поэтому все остальные м. э. с. б. читатель может определить сам.)

$$\langle fc_{\gamma,\alpha}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \gamma^{1/2} or^{\pm}_{nm}(\gamma\cos\alpha, \gamma\sin\alpha); \tag{6.30}$$

$$\langle fr_{\gamma,p}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \begin{cases} 0, \text{ если } p \neq \pm m; \\ \left[\dfrac{\gamma m!}{2^{m+1}(n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad \text{если берется знак } + \text{ и } p = \pm m \neq 0; \\ \dfrac{ip}{m}\left[\dfrac{\gamma m!}{2^{m+1}(n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad \text{если берется знак } - \text{ и } p = \pm m \neq 0; \\ \left(\dfrac{4\gamma}{n!}\right)^{1/2} \exp\left(\dfrac{-\gamma^2}{4}\right) L_n^{(0)}\left(\dfrac{\gamma^2}{2}\right), \\ \qquad\qquad \text{если } p = m = 0; \end{cases} \tag{6.31}$$

$$\langle fp^{+}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \left[\frac{\gamma m!}{2^m \pi (n+m)!}\right]^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma^2}{4}\right)\gamma^m L_n^{(m)}\left(\frac{\gamma^2}{2}\right) \times$$
$$\times \exp\left[-\pi i \frac{1 \mp 1}{4}\right](a_m \pm a_{-m});$$

$$\langle fp^{-}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{nm}\rangle = \langle fp^{+}_{\gamma\mu}, or^{\pm}_{n,-m}\rangle;$$

$$a_m = \exp\left[\pi\frac{i/2 - \mu}{2}\right]\Gamma(m + 1/2)\left[\frac{(-1)^m\Gamma(1/2 + i\mu)}{\Gamma(m + i\mu + 1/2)}\right] \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} {}^1/_2 + i\mu, & {}^1/_2 + m \\ m + i\mu + 1 \end{matrix}\middle| -1\right) - \frac{i\Gamma({}^1/_2 - i\mu)}{\Gamma(m - i\mu + 1)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\begin{matrix} {}^1/_2 - i\mu, & {}^1/_2 + m \\ m - i\mu + 1 \end{matrix}\middle| -1\right)\Bigg]; \quad (6.32)$$

$$\langle fe_{\gamma,\,p},\ or^{+}_{nm}\rangle = \theta(p)\left(1 + (-1)^{m-p}\right) A^p_m \left[\frac{\gamma m!}{2^{m+2}\pi^2 (n+m)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{-\gamma^2}{4}\right) \gamma^m L^{(m)}_n\left(\frac{\gamma^2}{2}\right); \quad (6.33)$$

здесь $\theta(x) = 1$, если $x \geqslant 0$, и $\theta(x) = 0$ в противном случае. Подобное выражение для $\langle fe_{\gamma,\,p},\ or^{-}_{nm}\rangle$ получается при замене в (6.33) $\theta(p)$ на $\theta(-p)$ и A^p_m на B^p_m. Здесь A^p_m, B^p_m — коэффициенты в разложениях в тригонометрические ряды четной и нечетной функций Матье соответственно. Кроме того,

$$\langle lc_{\lambda,\,p},\ oc_{n,\,m}\rangle = \exp\left(-\rho^2/4\right)\left(2^{m-1}\pi m!\right)^{-1/2} H_m\left(\rho/\sqrt{2}\right) C_n, \quad (6.34)$$

где константы C_n определяются из соотношения

$$2^{2/3}\exp\left[-i\left({}^1/_6 + \lambda + \rho^2/4 + \sqrt{2y}\right)\right] \mathrm{Ai}\left[2^{2/3}\left({}^1/_4 - i\lambda - i\rho^2/4 - i(2y)^{1/2}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left((2i)^{1/2} y\right)^n / n!\right] C_n$$

и все величины нормированы таким образом, что $a = -1$;

$$\langle lc_{\lambda,\,\rho},\ lp_{\mu,\,n}\rangle = (2\pi\ |a|)^{-1}\, \bar{h}_n(\rho)\, \delta\left[(\lambda - \mu)/a\right], \quad (6.35)$$

$$\langle rc^{++}_{\lambda\mu},\ oc_{n,\,m}\rangle = \pi^{-2}\left(2^{m+n+3} n! m!\right)^{-1/2} \mathscr{L}^{\lambda}_m \mathscr{L}^{\mu}_n, \quad (6.36)$$

где

$$\mathscr{L}^{\lambda}_m = \begin{cases} 2^{m+i\lambda-1/2}\Gamma(i\lambda/2 + 1/4)\,\Gamma((m+1)/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} -m/2, & i\lambda/2 + 1/4 \\ & 1/2 \end{matrix}\middle| 2\right), \\ \qquad\qquad m \text{ четное} \\ 2^{m+i\lambda+1}\Gamma(i\lambda/2 + 1/4)\,\Gamma(m/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} (1-m)/2, & i\lambda/2 + 3/4 \\ & 3/2 \end{matrix}\middle| 2\right), \\ \qquad\qquad m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Остальные м. э. с. б. для rc^{+-}, rc^{-+} и rc^{--} вычисляются при помощи равенств (6.24).

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\langle rr^{+}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle = \delta_{mm'}(2/n!)^{m/2-i\lambda}[(m+n)!/m!]^{1/2}\times$$
$$\times\Gamma((m+1-i\lambda)/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (m+1-i\lambda)/2\\ & m+1\end{matrix}\middle|\,2\right), \quad (6.37)$$

$$\langle rr^{-}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle = -i(-1)^{\operatorname{sign} m}\langle rr^{+}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.38)$$

$$\langle rr^{+}_{\lambda 0}, or_{nm'}\rangle = \delta_{0m'}\left(2^{-1/2-i\lambda}/(n!)^{1/2}\right)\Gamma((1-i\lambda)/2)\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (1-i\lambda)/2\\ & 1\end{matrix}\middle|\,2\right); \quad (6.39)$$

$$\langle oc_{n_1n_2}, or^{\pm}_{nm}\rangle = K\delta_{n_1+n_2,\,2n+m}\,i^{n_1}\left(2^{2n+m+1}n!n_2!\,(n+m)!/n_1!\right)^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\Big[i^m\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\,\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2+m)/2\\ & (n_2-n_1-m)/2\end{matrix}\middle|\,-1\right)\pm i^{-m}\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\times$$
$$\times\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2-m)/2\\ & (n_2-n_1+m)/2\end{matrix}\middle|\,-1\right)\Big]. \quad (6.40)$$

Для базиса re имеем

$$\langle re^{+}_{\lambda m}, or^{+}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\bar{A}^{m}_{m'}(2\pi)^{1/2}\langle rr^{+}_{\lambda m'}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.41)$$

$$\langle re^{-}_{\lambda m}, or^{-}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\bar{B}^{m}_{m'}(2\pi)^{1/2}\langle rr^{-}_{\lambda m'}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.42)$$

где $\bar{A}^{m}_{m'}$ и $\bar{B}^{m}_{m'}$ — коэффициенты в разложениях функций $gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ и $gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ соответственно в тригонометрические ряды (Б.26); см. [127].

2.7. Вещественное и комплексное уравнения теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в трехмерном пространстве-времени, нормированное надлежащим образом, имеет вид

$$Q\Phi = 0, \qquad Q = \partial_t - \partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2}, \quad (7.1)$$

где t, x_1, x_2 — вещественные переменные времени и пространства соответственно. Поскольку это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (5.2), заменив в последнем t на $-it$, алгебры симметрии этих двух уравнений тесно связаны между