Нетрудно убедиться, что имеют место следующие соотношения:

$$\langle rr^{+}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle = \delta_{mm'}(2/n!)^{m/2-i\lambda}[(m+n)!/m!]^{1/2}\times$$
$$\times\Gamma((m+1-i\lambda)/2)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (m+1-i\lambda)/2\\ & m+1\end{matrix}\middle|\,2\right), \quad (6.37)$$

$$\langle rr^{-}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle = -i(-1)^{\operatorname{sign} m}\langle rr^{+}_{\lambda m}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.38)$$

$$\langle rr^{+}_{\lambda 0}, or_{nm'}\rangle = \delta_{0m'}\left(2^{-1/2-i\lambda}/(n!)^{1/2}\right)\Gamma((1-i\lambda)/2)\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n, & (1-i\lambda)/2\\ & 1\end{matrix}\middle|\,2\right); \quad (6.39)$$

$$\langle oc_{n_1n_2}, or^{\pm}_{nm}\rangle = K\delta_{n_1+n_2,\,2n+m}\,i^{n_1}\left(2^{2n+m+1}n!n_2!\,(n+m)!/n_1!\right)^{1/2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\Big[i^m\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\,\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2+m)/2\\ & (n_2-n_1-m)/2\end{matrix}\middle|\,-1\right)\pm i^{-m}\{\Gamma((n_1+n_2-m)/2)\times$$
$$\times\Gamma((n_2-n_1+m)/2)\}^{-1}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n_1, & 1-(n_1+n_2-m)/2\\ & (n_2-n_1+m)/2\end{matrix}\middle|\,-1\right)\Big]. \quad (6.40)$$

Для базиса re имеем

$$\langle re^{+}_{\lambda m}, or^{+}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\bar{A}^{m}_{m'}(2\pi)^{1/2}\langle rr^{+}_{\lambda m'}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.41)$$

$$\langle re^{-}_{\lambda m}, or^{-}_{nm'}\rangle = {}^1/_2\left(1+(-1)^{m-m'}\right)\bar{B}^{m}_{m'}(2\pi)^{1/2}\langle rr^{-}_{\lambda m'}, or_{nm'}\rangle, \quad (6.42)$$

где $\bar{A}^{m}_{m'}$ и $\bar{B}^{m}_{m'}$ — коэффициенты в разложениях функций $gc_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ и $gs_m(\theta, {}^1/_4, -\lambda)$ соответственно в тригонометрические ряды (Б.26); см. [127].

2.7. Вещественное и комплексное уравнения теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy})\Phi = 0$

Уравнение теплопроводности в трехмерном пространстве-времени, нормированное надлежащим образом, имеет вид

$$Q\Phi = 0, \qquad Q = \partial_t - \partial_{x_1x_1} - \partial_{x_2x_2}, \quad (7.1)$$

где t, x_1, x_2 — вещественные переменные времени и пространства соответственно. Поскольку это уравнение можно получить из уравнения Шредингера (5.2), заменив в последнем t на $-it$, алгебры симметрии этих двух уравнений тесно связаны между

собой. Алгебра симметрии уравнения (7.1) девятимерна и имеет базис

$$\begin{gathered} H_2 = t^2\partial_t + tx_1\partial_{x_1} + tx_2\partial_{x_2} + t + (x_1^2 + x_2^2)/4, \quad H_{-2} = \partial_t, \\ P_j = \partial_{x_j}, \quad B_j = t\partial_{x_j} + x_j/2, \quad M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \\ H^0 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2t\partial_t + 1, \quad H_0 = 1, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Соотношения коммутирования алгебры симметрии этого уравнения имеют вид

$$\begin{gathered} [H^0, H_{\pm 2}] = \pm 2H_{\pm 2}, \quad [H^0, B_j] = B_j, \quad [H^0, P_j] = -P_j, \\ [P_j, H_2] = B_j, \quad [P_j, B_j] = {}^1/_2 H_0, \quad [P_j, B_l] = 0, \\ [H_{-2}, H_2] = H^0, \quad [H_{\pm 2}, M] = [H_2, B_j] = [H_{-2}, P_j] = [H^0, M] = 0, \\ [B_j, M] = (-1)^{l+1} B_l, \quad [H_{-2}, B_j] = P_j, \quad [P_j, M] = (-1)^{l+1} P_l, \\ j, l = 1, 2, \quad j \neq l, \end{gathered} \tag{7.3}$$

а H_0 принадлежит центру алгебры. Обозначим через $\mathcal{G}_3'$ вещественную алгебру Ли с базисом (7.2). Пятимерная подалгебра Вейля $\mathcal{W}_2$ алгебры $\mathcal{G}_3'$ натягивается на операторы B_j, P_j, H_0, и локальная теория Ли определяет соответствующее локальное действие группы

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}, \mathbf{z}, \rho)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} + \frac{t}{4}\mathbf{w}\cdot\mathbf{w} + \rho\right]\Psi(t, \mathbf{x} + t\mathbf{w} + \mathbf{z}), \tag{7.4}$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{w} = x_1w_1 + x_2w_2$ и w_j, z_j, $\rho \in R$. Эти операторы действуют на пространство $\mathcal{F}$ функций $\Psi(t, \mathbf{x})$, аналитических в некоторой заданной области $\mathcal{D}$ трехмерного пространства. Кроме того, эти операторы отображают решения уравнения теплопроводности в решения.

Аналогичным образом трехмерная подалгебра $sl(2, R)$ натягивается на операторы $H_{\pm 2}$, H_0, которые определяют операторы

$$\begin{gathered} \mathbf{T}(A)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{\beta}{4}(\delta + t\beta)^{-1}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]\times \\ \times(\delta + t\beta)^{-1}\Psi\left(\frac{\gamma + t\alpha}{\delta + t\beta}, (\delta + t\beta)^{-1}\mathbf{x}\right), \\ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, R), \qquad \Psi \in \mathcal{F}, \end{gathered} \tag{7.5}$$

характеризующие локальное представление группы $SL(2, R)$. Оператор M определяет локальное представление группы $SO(2)$:

$$\mathbf{T}(\theta)\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x}\Theta), \quad \Theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

При помощи выражений, аналогичных (5.10) и (5.11), локальную группу Ли G_3' операторов симметрии $\mathbf{T}$ можно представить в виде полупрямого произведения W_2 и $SL(2, R)\times SO(2)$.

Здесь необходимо указать в явном виде частный случай формул (7.5), когда

$$A_0 = 2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а именно случай

$$\mathbf{T}(A_0)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{1}{4}(1+t)^{-1}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]\frac{\sqrt{2}}{1+t}\Psi\left(\frac{t-1}{t+1}, \frac{\sqrt{2}}{t+1}\mathbf{x}\right),$$

$$\mathbf{T}(A_0^2)\Psi(t, \mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{1}{4t}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\right]t^{-1}\Psi(-t^{-1}, t^{-1}\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{T}(A_0^4)\Psi(t, \mathbf{x}) = -\Psi(t, -\mathbf{x}) \tag{7.7}$$

(где $\mathbf{T}(A_0^2)$ — *преобразование Аппеля* [4, 14]), который будет полезен нам в дальнейшем.

Задача R-разделения переменных для уравнения теплопроводности (7.1) аналогична задаче для уравнения Шредингера для свободной частицы (5.2), и результаты, получаемые в этих задачах, подобны [55]. Решения уравнения (7.1) с R-разделенными переменными имеют вид

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[\mathcal{R}(u, v, w)]\,U(u)\,V(v)\,W(w), \quad \mathcal{R} \text{ вещественно}, \tag{7.8}$$

где либо $\mathcal{R} \equiv 0$, либо $\mathcal{R} \not\equiv 0$ нельзя записать в виде суммы $\mathcal{R} = A(u) + B(v) + C(w)$. Необходимо, чтобы система $\{u, v, w\}$ была вещественной аналитической системой координат, такой, чтобы подстановка (7.8) в (7.1) сводила это дифференциальное уравнение в частных производных к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям, причем каждому из множителей U, V, W должно соответствовать одно уравнение. Две системы координат считаются эквивалентными, если в результате сопряженного действия группы G_3' из одной системы можно получить другую.

В работе [55] указывается, что каждому случаю R-разделения переменных для уравнения (7.1) можно поставить в соответствие пару дифференциальных операторов H, S, таких, что

1) H и S являются операторами симметрии уравнения (7.1) и $[H, S] = 0$;

2) $H \in \mathcal{G}_3'$, т. е. H — оператор первого порядка по x_1, x_2 и t;

3) S — оператор второго порядка по x_1, x_2 и не содержит членов с ∂_t.

Процедура R-разделения переменных определяется системой уравнений

$$Q\Phi = 0, \quad H\Phi = i\lambda\Phi, \quad S\Phi = \mu\Phi, \tag{7.9}$$

где собственные значения λ, μ — обычные константы разделения для решений Φ с R-разделенными переменными.

Из этих замечаний следует, что S можно всегда представить как симметричную квадратичную форму от B_j, P_j, E и M. Возможные системы координат и их характеристики представлены в табл. 13.

Для каждой системы координат, представленной в табл. 13, имеет место соотношение $w = t$ и решение с разделенными переменными от переменной w является экспоненциальной функцией. В последнем столбце таблицы сначала дается решение от переменной u, а затем решение от переменной v. Функции ангармонического осциллятора являются решениями дифференциального уравнения вида

$$f''(u) + (\lambda u^2 + \alpha u^4 - \beta) f(u) = 0. \tag{7.10}$$

С точки зрения группы симметрии галилеевых преобразований и растяжений существуют 26 различных систем координат. Если же учитывать только G_3'-симметрию, то мы имеем всего лишь 17 систем. Легко показать, что две системы, обозначения которых различаются только верхними индексами, лежат на одной и той же G_3'-орбите. В самом деле, системы вида Fa^1 и Fa^2 либо вида La^1 и La^2 связаны оператором $\mathbf{T}(A_0^2)$, определенным в (7.7), а системы вида Ra^1 и Ra^2 связаны оператором $\mathbf{T}(A_0)$. Только эти системы и являются эквивалентными относительно G_3'.

Для рассматриваемого нами уравнения особый интерес представляют собственные функции коммутирующей пары H^0, M^2. Из табл. 13 видно, что соответствующие собственные функции разделяются в переменных $u = [(x^2 + y^2)/t]^{1/2} = rt^{-1/2}$, $v = \theta$, $w = t$, где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Кроме того, решения $\Phi_{m,n}(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности (ограниченные в точке $\mathbf{x} = 0$), удовлетворяющие соотношениям

$$H^0\Phi_{m,n} = (m + 2n + 1)\Phi_{m,n}, \quad M\Phi_{m,n} = im\Phi_{m,n}, \tag{7.11}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = n, n-1, \ldots, n,$$

можно представить в виде многочленов Лагерра

$$\Phi_{m,n}(t, \mathbf{x}) = t^n (re^{i\theta})^m L_n^{(m)}(-r^2/(4t)). \tag{7.12}$$

Анализ разложений решений уравнения теплопроводности по многочленам Лагерра можно найти в работах [28] и [135].

Известно, что если $f(\mathbf{x})$ — ограниченная непрерывная функция, определенная в плоскости R_2, то существует единственное решение $\Phi(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности, ограниченное и непрерывное по $(t, \mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in R_2$, $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируемое по t, дважды непрерывно дифференцируемое по

Таблица 13

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $(\partial_t - \partial_{xx} - \partial_{yy})\,\Phi = 0$

	Операторы H, $\mathcal{S}$	Координаты $\{u, v, w\}$	Множитель $e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
1а	Fc^1 H_2, B_1^2	$x = uw$ $y = vw$	$\mathcal{R} = -(u^2 + v^2)\,w/4$	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
1б	Fc^2 H_{-2}, P_1^2	$x = u$ $y = v$	0	Экспоненциальная функция Экспоненциальная функция
2а	Fr^1 H_2, M^2	$x = uw \cos v$ $y = uw \sin v$	$-u^2 w/4$	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
2б	Fr^2 H_{-2}, M^2	$x = u \cos v$ $y = u \sin v$	0	Функция Бесселя Экспоненциальная функция
3а	Fp^1 H_2, $\{B_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)\,w/2$ $y = uvw$	$-(u^2 + v^2)^2\,w/16$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
3б	Fp^2 H_{-2}, $\{P_2, M\}$	$x = (u^2 - v^2)/2$ $y = uv$	0	Функции параболического цилиндра
4а	Fe^1 H_2, $M^2 - B_2^2$	$x = w \operatorname{ch} u \cos v$ $y = w \operatorname{sh} u \sin v$	$-(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)\,w/4$	Модифицированная функция Матье Функция Матье

4б	Fe^2 $H_{-2},\ M^2 - P_2^2$	$x = \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \operatorname{sh} u \sin v$
5а	Lc^1 $H_2 - 2aP_1 - 2bP_2,$ $B_2^2 - 2bP_2H_0$	$x = uw + a/w$ $y = vw + b/w$
5б	Lc^2 $H_{-2} + 2aB_1 + 2bB_2,$ $P_1^2 + 2aB_1H_0$	$x = u + aw^2$ $y = v + bw^2$
6а	Lp^1 $H_2 - aP_1,$ $\{B_2, M\} - aP_2^2$	$x = (u^2 - v^2)\, w/2 + a/w$ $y = uvw$
6б	Lp^2 $H_{-2} - 2aB_1,$ $\{P_2, M\} + 2aB_2^2$	$x = (u^2 - v^2)/2 + aw^2$ $y = uv$
7	Oc $H_{-2} + H_2,$ $P_1^2 + B_1^2$	$x = u\,(1 + w^2)^{1/2}$ $y = v\,(1 + w^2)^{1/2}$
8	Or $H_{-2} + H_2,\ M^2$	$x = (1 + w^2)^{1/2}\, u \cos v$ $y = (1 + w^2)^{1/2}\, u \sin v$

0	Модифицированная функция Матье Функция Матье
$-(u^2+v^2)\,w/4+$ $+(au+bv)/2w$	Функция Эйри Функция Эйри
$-(au+bv)\,w$	Функция Эйри Функция Эйри
$-(u^2+v^2)^2\,w/16+$ $+a\,(u^2-v^2)/4w$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
$-a\,(u^2-v^2)\,w/2$	Функция ангармонического осциллятора Функция ангармонического осциллятора
$-(u^2+v^2)\,w/4$	Функция параболического цилиндра Функция параболического цилиндра
$-u^2w/4$	Функция Уиттекера Экспоненциальная функция

Продолжение табл. 13

	Операторы H, S	Координаты $\{u, v, w\}$
9	Oe $H_{-2} + H_2$, $M^2 - P_2^2 - B_2^2$	$x = (1 + w^2)^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = (1 + w^2)^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$
10а	Rc^1 H^0, $\{B_1, P_1\}$	$x = \lvert w \rvert^{1/2} u$ $y = \lvert w \rvert^{1/2} v$
10б	Rc^2 $H_{-2} - H_2$, $P_1^2 - B_1^2$	$x = u \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2}$ $y = v \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2}$
11а	Rr^1 H^0, M^2	$x = \lvert w \rvert^{1/2} u \cos v$ $y = \lvert w \rvert^{1/2} u \sin v$
11б	Rr^2 $H_{-2} - H_2$, M	$x = \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2} u \cos v$ $y = \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2} u \sin v$
12а	Re^1 H_0, $M^2 - {}^1/_2 \{B_2, P_2\}$	$x = \lvert w \rvert^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \lvert w \rvert^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$

Множитель $e^{\mathcal{R}}$	Решения с разделенными переменными
$-(\mathrm{sh}^2 u + \cos^2 v)\, w/4$	Функция Айнса Функция Айнса
0	Функция Эрмита Функция Эрмита
$-\varepsilon (u^2 + v^2)\, w/4$ $\varepsilon = \mathrm{sign}\,(1 - w^2)$	Функция Эрмита Функция Эрмита
0	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
$-\varepsilon u^2 w/4$	Функция Лагерра Экспоненциальная функция
0	Многочлен Айнса Многочлен Айнса

12б	Re^2 $H_{-2} - H_2$, $M^2 - P_2^2 + B_2^2$	$x = \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2} \operatorname{ch} u \cos v$ $y = \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2} \operatorname{sh} u \sin v$
13	$L1$ P_1, $B_2^2 + 2bP_2H_0$	$x = u$ $y = vw + bw$
14	$L2$ P_1, $P_2^2 + 2aB_2H_0$	$x = u$ $y = v + aw^2$
15	$O1$ P_1, $P_2^2 + B_2^2$	$x = u$ $y = v(1 + w^2)^{1/2}$
16	$R1$ P_1, $\{B_2, P_2\}$	$x = u$ $y = v \lvert w \rvert^{1/2}$
17	$R2$ P_1, $P_2^2 - B_2^2$	$x = u$ $y = v \lvert 1 - w^2 \rvert^{1/2}$

$-\varepsilon(\mathrm{sh}^2 u + \cos^2 v)\, w/4$	Многочлен Айнса Многочлен Айнса
$-v^2 w/4 + bv/2w$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
$-avw$	Экспоненциальная функция Функция Эйри
$-v^2 w/4$	Экспоненциальная функция Функция параболического цилиндра
0	Экспоненциальная функция Функция Эрмита
$-\varepsilon v^2 w/4$	Экспоненциальная функция Функция Эрмита

x_1, x_2 для всех $\mathbf{x} \in R_2$, $t > 0$ и такое, что $\Phi(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ [109], а именно решение

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = (4\pi t)^{-1} \int\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})/(4t)] f(\mathbf{y})\, dy_1\, dy_2 = \\ = I^t(f), \qquad t > 0. \tag{7.13}$$

Построим иную модель алгебры симметрии (7.2) (аналогичную работу мы уже выполняли в разд. 2.2). Прежде всего ограничим операторы (7.2) на пространство решений уравнения теплопроводности, что даст нам возможность заменить в формулах для этих операторов ∂_t на Δ_2 и рассматривать $t \geqslant 0$ как фиксированный параметр. Теперь операторы (7.2) являются операторами симметрии в фиксированный момент времени t. При $t = 0$ операторы (7.2) принимают вид

$$\begin{gathered} \mathscr{H}_2 = (x_1^2 + x_2^2)/4, \quad \mathscr{H}_{-2} = \Delta_2, \quad \mathscr{P}_j = \partial_{x_j}, \quad \mathscr{B}_j = x_j/2, \\ \mathscr{M} = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}, \quad \mathscr{H}^0 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 1, \\ \mathscr{H}_0 = 1, \quad j = 1, 2, \end{gathered} \tag{7.14}$$

и, когда эти операторы действуют на пространство, скажем, $\mathscr{F}_0$ бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathbf{x})$ в R_2 с компактным носителем, они удовлетворяют обычным соотношениям коммутирования (7.3).

Так же как в разд. 2.2, выражение (7.13) можно представить в виде

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = I^t(f) = \exp(t\Delta_2) f(\mathbf{x}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) f(x), \quad f \in \mathscr{F}_0, \quad t > 0, \tag{7.15}$$

и показать, что операторы H (7.2) и $\mathscr{H}$ (7.14) связаны соотношением

$$H \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2})\, \mathscr{H}, \tag{7.16}$$

где $H \in \mathscr{G}_3'$ и оператор $\mathscr{H}$ получается из H, если положить $t = 0$. Кроме того, имеет место соотношение

$$\exp(aH) \exp(t\mathscr{H}_{-2}) = \exp(t\mathscr{H}_{-2}) \exp(a\mathscr{H}), \tag{7.17}$$

и можно показать, что уравнения

$$\partial_t \Phi = (\Delta_2 + a_1 \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + a_2\partial_{x_1} + a_3\partial_{x_2} + a_4(x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1}) + \\ + a_5 x_1 + a_6 x_2 + a_7(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}) + a_8)\Phi, \qquad a_j \in R, \tag{7.18}$$

имеют изоморфные алгебры симметрии и эквивалентны уравнению (7.1). Рассмотренные нами в разд. 2.2 способы решения задачи Коши применимы и для уравнений вида (7.18).

Здесь полезно рассмотреть метод построения в явном виде решений уравнения теплопроводности, который с равным успехом применяется и при решении многих других уравнений, исследуемых в настоящей книге. Каждая система координат, допускающая R-разделение переменных для уравнения (7.1), связана с парой коммутирующих операторов, один из которых является оператором первого порядка. Диагонализируя этот оператор первого порядка, можно выделить соответствующую координату и тем самым свести уравнение теплопроводности к некоторому уравнению, в котором число переменных на единицу меньше, чем в исходном. Например, диагонализируя оператор симметрии ∂_t, мы выделяем переменную t и получаем решения

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp(-k^2 t) F(\mathbf{x}),$$

где F — любое решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta_2 F + k^2 F = 0. \tag{7.19}$$

Это довольно очевидное утверждение оказывается менее тривиальным, если учесть тот факт, что каждый оператор симметрии $\mathbf{T}(g)$, определяемый формулами (7.4)—(7.6), отображает Φ в другое решение $\mathbf{T}(g)\Phi$. Например, если $g = A_0$, где A_0 определено в (7.7), то

$$\mathbf{T}(A_0)\Phi(t, \mathbf{x}) = \exp[(-k^2(t-1) - {}^1/_2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})/(t+1)] \times \\ \times 2^{1/2}(t+1)^{-1} F(2^{1/2}\mathbf{x}/(t+1)), \tag{7.20}$$

где F — произвольное решение уравнения Гельмгольца (7.19), является решением уравнения теплопроводности. Выбирая соответствующие групповые элементы g и решения F, можно построить такие решения уравнения теплопроводности, которые удовлетворяли бы целому ряду начальных и граничных условий. Примеры таких решений можно найти в работе Бейтмена [14].

Теперь рассмотрим комплексное уравнение теплопроводности, т. е. уравнение (7.1), где t, x_1, x_2 — комплексные переменные. Очевидно, что алгебра симметрии $\mathscr{G}_3^c$ этого уравнения девятимерна (и комплексна) и имеет базис (7.2). Вычисляя экспоненты операторов базиса, можно получить локальную группу Ли G_3^c операторов симметрии, действующую на пространстве $\mathscr{F}$ функций $\Psi(t, \mathbf{x})$, аналитических в некоторой области $\mathscr{D}$ комплексного пространства (t, x_1, x_2). Действие этой группы определяется соотношениями (7.4)—(7.6), где теперь параметры $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ и ρ принимают произвольные комплексные значения, а матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ принадлежат группе $SL(2, \mathbb{C})$. Само собой разу-

меется, эти операторы отображают решения комплексного уравнения теплопроводности в решения же.

Задача R-разделения переменных для этого уравнения формулируется точно так же, как для комплексного уравнения теплопроводности $(\partial_t - \partial_{xx})\Phi = 0$ в разд. 2.2. Предполагается, что все системы, допускающие R-разделение переменных для нашего уравнения, соответствуют паре коммутирующих операторов симметрии в обвертывающей алгебре алгебры $\mathcal{G}_3^c$. Ясно, что все перечисленные в табл. 12 и 13 вещественные системы, допускающие R-разделение переменных, можно аналитически продолжить, с тем чтобы получить системы, допускающие R-разделение переменных для комплексного уравнения теплопроводности. Следует заметить, что каждая система Aa табл. 12 комплексно эквивалентна системе Aa табл. 13, а системы Oc, Or, Oe комплексно эквивалентны системам Rc, Rr, Re соответственно.

Существуют и такие допускающие R-разделение переменных системы, которые не являются комплексными эквивалентами систем, представленных в табл. 12 и 13. Например, если диагонализировать оператор ∂_t, то уравнение (7.1) сведется к комплексному уравнению Гельмгольца; из табл. 3 находим решения с разделенными переменными для этого уравнения, которые являются произведениями функций Бесселя и, очевидно, не являются эквивалентами какого бы то ни было решения из табл. 12 и 13.

Задача разделения переменных для уравнения (7.1) полностью решена Э. Г. Калнинсом (информация получена неофициально), который нашел 38 нетривиальных систем, допускающих разделение переменных для этого уравнения, причем каждая система характеризуется парой коммутирующих операторов симметрии. Мы не будем заниматься анализом результатов, полученных Калнинсом, а просто воспользуемся готовыми системами, допускающими разделение переменных для уравнения (7.1), с тем чтобы применить метод Вейснера.

Выражения (7.12) наводят на мысль, что для решений уравнения (7.1) в виде многочленов Лагерра целесообразно ввести новые координаты

$$z = -(x_1^2 + x_2^2)/(4t), \quad s = i(x_1 + ix_2)/2, \quad \tau = t. \tag{7.21}$$

Тогда базисные функции (7.12) (соответствующим образом нормированные) примут вид

$$\begin{gathered} \Phi_{m,n}(t, s, z) = \tau^n s^m L_n^{(m)}(z), \quad H^0\Phi_{m,n} = (m + 2n + 1)\Phi_{m,n}, \\ M\Phi_{m,n} = im\Phi_{m,n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{7.22}$$

Эти выражения имеют смысл для любого $m \in \mathbb{C}$, такого, что m не является отрицательным целым числом. Поскольку много-

член Лагерра $L_n^{(m)}(z)$ можно представить в виде конфлюентной гипергеометрической функции (см. (Б.9i)), мы можем взять новое семейство собственных функций

$$\Psi_{m,n}(\tau, s, z) = \tau^n s^m {}_1F_1\left(\begin{matrix} n \\ m+1 \end{matrix}\middle| z\right), \quad \Phi_{m,n} = \binom{m+n}{n}\Psi_{m,n} \tag{7.23}$$

и линейно независимое семейство собственных функций

$$\Psi'_{m,n}(\tau, s, z) = \tau^n s^m z^{-m} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n-m \\ -m+1 \end{matrix}\middle| z\right). \tag{7.24}$$

Иначе говоря, $\Psi_{m,n}$ и $\Psi'_{m,n}$ образуют базис пространства решений уравнений на собственные значения (7.22) при фиксированных n и m.

В координатах τ, s, z операторы (7.2) принимают вид

$$\begin{gathered} H_2 = \tau^2\partial_\tau + \tau s\partial_s + \tau z\partial_z + \tau(1-z), \quad H_{-2} = \tau^{-1}(\tau\partial_\tau - z\partial_z), \\ H_{-1}^- = \partial_s + zs^{-1}\partial_z, \; H_{-1}^+ = s\tau^{-1}\partial_z, \; H_1^- = \tau\partial_s + \tau zs^{-1}\partial_z - \tau zs^{-1}, \\ H_1^+ = s\partial_z - s, \quad \tilde{H}^0 = s\partial_s, \quad H^0 = s\partial_s + 2\tau\partial_\tau + 1, \quad H_0 = 1, \end{gathered} \tag{7.25}$$

где

$$\begin{gathered} H_{-1}^- = -iP_1 - P_2, \quad H_{-1}^+ = -iP_1 + P_2, \quad H_1^- = -iB_1 - B_2, \\ H_1^+ = -iB_1 + B_2, \quad \tilde{H}^0 = iM. \end{gathered} \tag{7.26}$$

Заметим, что

$$[H^0, H_j^\alpha] = jH_j^\alpha, \quad [\tilde{H}_j^0, H_j^\alpha] = \alpha H_j^\alpha. \tag{7.27}$$

Из явных выражений (7.25) видно, что каждый из операторов алгебры Ли отображает многочлен по z в другой такой многочлен. Отсюда и из соотношений коммутирования (7.27) следует, что $H_j^\alpha\Psi_{m,n}$ равно произведению $\Psi_{m+(\alpha)1,\, n+[j-(\alpha)1]/2}$ на некоторую константу. Почленно дифференцируя степенной ряд (7.23), получаем

$$\begin{gathered} H_2\Psi_{m,n} = (m-n+1)\Psi_{m,n+1}, \quad H_{-2}\Psi_{m,n} = n\Psi_{m,n-1}, \\ H_{-1}^-\Psi_{m,n} = m\Psi_{m-1,n}, \qquad H_{-1}^+\Psi_{m,n} = -n(m+1)^{-1}\Psi_{m+1,n-1}, \\ H_1^-\Psi_{m,n} = m\Psi_{m-1,n+1}, \quad H_1^+\Psi_{m,n} = -(n+m+1)(m+1)^{-1}\Psi_{m+1,n}, \\ \tilde{H}^0\Psi_{m,n} = m\Psi_{m,n}, \qquad H^0\Psi_{m,n} = (m+2n+1)\Psi_{m,n}. \end{gathered} \tag{7.28}$$

Заметим, что первые шесть соотношений (7.28) точно соответствуют шести дифференциальным рекуррентным формулам (Б.8) для функций ${}_1F_1$. Таким образом, мы имеем рекуррентные формулы, определяющие действие алгебры симметрии комплексного уравнения теплопроводности.

Заметим также, что операторы $H_{\pm 2}$, H^0, образующие базис подалгебры $sl(2, \mathbb{C})$ алгебры $\mathcal{G}_3^c$, дают те же рекуррентные формулы для функций Лагерра, что и операторы $J^{\pm}, J^0$ (см. разд. 2.4, формулы (4.9)). Это объясняется тем, что уравнение (4.1) можно получить из уравнения (7.1), введя полярные координаты и отделив угловую переменную. Следовательно, все результаты разд. 2.4 можно получить как частные случаи результатов, относящихся к решению уравнения (7.1).

Кроме того, бо́льшая часть гл. 4 работы [83] автора настоящей книги посвящена соотношениям для функций Лагерра, получаемым при исследовании подалгебры алгебры $\mathcal{G}_3^c$ с базисом $\{H_{-1}^-, H_1^+, \tilde{H}^0, H_0\}$ и соотношениями коммутирования $(H_{\pm 1}^{\pm} = H^{\pm}, \tilde{H}^0 = H^0)$ вида

$$[H^0, H^{\pm}] = \pm H^{\pm}, \quad [H^+, H^-] = H_0, \quad [H_0, H] = 0. \tag{7.29}$$

(См. также работу [77].) Итак, совершенно очевидно, что теория специальных функций, связанная с рассматриваемым нами уравнением теплопроводности, изобилует полезными результатами. Мы приведем здесь всего лишь несколько примеров, иллюстрирующих связь между операторами симметрии этого уравнения и тождествами, которым удовлетворяют решения с разделенными переменными.

Легко видеть, что основная производящая функция (4.11) для многочленов Лагерра появляется в том случае, когда решение $\exp(\alpha H_2)\Phi_{-2l-1,0}$ комплексного уравнения теплопроводности определяется двумя различными способами. Подобным образом, если мы применим оператор $\exp(\alpha H_1^-)$ к базисной функции $\Phi_{m,0}(\tau, s, z) = s^m$ и воспользуемся рекуррентной формулой $H_1^- \Phi_{l,n} = (n+1)\Phi_{l-1,n+1}$ и соотношением теории Ли

$$\exp(\alpha H_1^-)\Psi(\tau, s, z) = \exp(-\tau z \alpha/s)\Psi(\tau, s + \alpha\tau, z[1 + \alpha\tau/s]),$$

то получим производящую функцию

$$e^{-\alpha z}(1+\alpha)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n L_n^{(m-n)}(z), \qquad m \in \mathbb{C}, \quad |\alpha| < 1. \tag{7.30}$$

(Здесь мы полагаем $\tau = s$ и в обеих частях этого выражения выносим за скобки множитель s^m.)

Комбинируя (7.21) с (7.4)—(7.7), можно получить формулу, определяющую действие локальной группы симметрии G_3^c в координатах τ, s, z. В частности, преобразование Аппеля имеет простой вид

$$\mathbf{T}(A_0^2)\Phi(\tau, s, z) = \tau^{-1} e^z \Phi(-\tau^{-1}, s\tau^{-1}, -z). \tag{7.31}$$

Применяя этот оператор к базисной функции $\Psi_{m,n}$, определяемой выражением (7.23), где $m, n \in \mathbb{C}$ и m не является отрицательным целым числом, получаем

$$\mathbf{T}(A_0^2)\Psi_{m,n} = (-1)^n \tau^{-m-n-1} s^m e^z {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ m+1 \end{matrix}\middle| -z\right).$$

Это выражение является общей собственной функцией оператора H^0 и оператора M с собственными значениями $-m-2n-1$ и im соответственно. Кроме того, при $z=0$ правая часть последней формулы является функцией, аналитической по z. Следовательно, существует некоторая константа $c_{m,n}$, такая, что

$$\mathbf{T}(A_0^2)\Psi_{m,n} = c_{m,n}\Psi_{m,-m-n-1}.$$

Полагая в обеих частях этого равенства $z=0$, получаем соотношение $c_{m,n} = (-1)^n$, или

$$e^z {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ m+1 \end{matrix}\middle| -z\right) = {}_1F_1\left(\begin{matrix} m+n+1 \\ m+1 \end{matrix}\middle| z\right). \tag{7.32}$$

Последнее выражение является важной формулой преобразования функции ${}_1F_1$, которая рассматривается в приложении Б.

Уравнение теплопроводности можно представить в виде $(H_{-2} - P_1^2 - P_2^2)\Phi = 0$, или, что то же самое, в виде уравнения $(H_{-2} + H_{-1}^+ H_{-1}^-)\Phi = 0$. Из (7.25) следует, что в координатах $\{\tau, s, z\}$ это уравнение принимает вид

$$(z\partial_{zz} + (s\partial_s - z + 1)\partial_z + \tau\partial_\tau)\Phi = 0. \tag{7.33}$$

Применив метод Вейснера, можно видеть, что любое решение Φ уравнения (7.33), аналитическое по переменным τ, s, z в некоторой области, такой, что Φ можно разложить в ряд Лорана по τ, s в окрестности $\tau=0$, $s=0$ и что $\Phi(\tau, s, 0)$ ограничено в этой области, должно удовлетворять тождеству

$$\Phi(\tau, s, z) = \sum_{m,n} c_{m,n} L_n^{(m)}(z)\tau^n s^m, \tag{7.34}$$

где $c_{m,n}$ — комплексные константы. Наоборот, равномерно сходящийся ряд вида (7.34) в некоторой области пространства $(\tau\ s, z)$ определяет решение комплексного уравнения теплопроводности. Мы приходим к выводу, что любую производящую функцию вида (7.34) можно получить как решение уравнения теплопроводности. Один из способов нахождения таких функций Φ состоит в том, чтобы определить их как общие собственные функции пары коммутирующих операторов в обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{G}_3^c$. Например, уравнения

$$\{B_1, P_1\}\Phi = (4\alpha + 2)\Phi, \quad H^0\Phi = (\lambda + 1)\Phi, \qquad \alpha, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7.35}$$

соответствуют координатам u, v, w, которые определяются соотношениями

$$u=\tau^{-1/2}(s+\tau z/s),\quad v=\tau^{-1/2}(-s+\tau z/s),\quad w=\tau \tag{7.36}$$

(см. строку 10а табл. 13). В этих новых координатах мы имеем

$$H^0=2w\partial_w+1,\quad \{B_1,\ P_1\}=-8(\partial_{uu}-{}^1/_2u\partial_u-{}^1/_4)$$

и решения $\Phi^{\alpha,\lambda}$ уравнений (7.35) можно записать в виде $\Phi^{\alpha,\lambda}=w^{\lambda/2}U(u)V(v)$, причем

$$2U''-uU'+\alpha U=0,\quad 2V''+vV'+(\alpha-\lambda)V=0. \tag{7.37}$$

Сравнивая эти уравнения с (2.24) и (2.25), находим независимые решения $H_\alpha(u/2)$ и $\exp(u^2/4)H_{-\alpha-1}(iu/2)$ для U, а также $H_{\lambda-\alpha}(iv/2)$ и $\exp(-v^2/4)H_{\alpha-\lambda-1}(v/2)$ для V. Для определенности выберем решения следующего вида:

$$\Phi^{\alpha,\lambda}(u,\ v,\ w)=w^{\lambda/2}H_\alpha(u/2)\,H_{\lambda-\alpha}(iv/2). \tag{7.38}$$

Переходя в выражениях для операторов симметрии (7.25) алгебры $\mathscr{G}_3^c$ к координатам u, v, w и применяя затем эти операторы к функциям (7.38), можно получить семейство простых рекуррентных формул, которым удовлетворяют произведения функций Эрмита. Применим метод Вейснера к производящей функции (7.38) в случае, когда λ и α, $\alpha\leqslant\lambda$, являются целыми положительными числами. В этом случае функции Эрмита, входящие в (7.38), являются многочленами Эрмита. Из (7.34) и (7.36) получаем

$$\tau^{\lambda/2}H_\alpha[2^{-1}(\tau^{-1/2}s+\tau^{1/2}z/s)]\,H_{\lambda-\alpha}[i2^{-1}(-\tau^{-1/2}s+\tau^{1/2}z/s)]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\lambda}s^{\lambda-2k}\tau^kc_kL_k^{(\lambda-2k)}(z). \tag{7.39}$$

(Чтобы получить этот результат, мы воспользовались тем фактом, что $H_\alpha(x)$ — многочлен порядка α и что $H_\alpha(-x)=(-1)^\alpha H_\alpha(x)$.) Полагая $x=s\tau^{-1/2}$, находим

$$H_\alpha[2^{-1}(x+z/x)]\,H_{\lambda-\alpha}[i2^{-1}(-x+z/x)]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\lambda}x^{\lambda-2k}c_kL_k^{(\lambda-2k)}(z). \tag{7.40}$$

Для того чтобы найти простую производящую функцию для коэффициентов c_k, мы полагаем $z=0$ и используем тот факт, что $L_n^{(m)}(0)=\binom{m+n}{n}$, где $\binom{m+n}{n}$ — биномиальный коэффициент

(Б.1):

$$H_\alpha(x/2)\,H_{\lambda-\alpha}(-ix/2)=\sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda-k}{k}c_k x^{\lambda-2k}. \qquad (7.41)$$

Вычислив в явном виде коэффициенты при $x^{\lambda-2k}$ в левой части этого равенства, можно представить c_k в виде конечного гипергеометрического ряда ${}_3F_2$.

Полиномиальные функции (7.38) можно использовать как еще один (но менее полезный) базис для решений уравнения теплопроводности. Следовательно, можно вычислить матричные элементы групповых операторов $\mathbf{T}(g)$ по этому базису, разложить произвольное решение Φ по элементам этого базиса и т. д.

Если λ и α — комплексные числа, то можно получить тождества в виде бесконечных рядов, аналогичные (7.40), но несколько усложненные.

2.8. Заключительные замечания

В заключение этой главы укажем (не проводя подробного анализа) несколько важных результатов, тесно связанных с рассматриваемым нами вопросом.

В статье [39] Винтернитц, Смородинский, Улир и Фриш определили все потенциалы $V(x, y)$, такие, что не зависящее от времени уравнение Шредингера

$$(-\Delta_2+V(x,\ y))\,\Phi=\lambda\Phi \qquad (8.1)$$

допускает некоторый оператор симметрии первого или второго порядка. Они показали, что возможные операторы симметрии имеют вид $L+f(x, y)$, где $L\in\mathscr{E}(2)$ (см. (1.6), (1.7) разд. 1.1), для симметрий первого порядка и вид $S+f(x, y)$, где S — симметрический оператор второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$, для симметрий второго порядка. В уравнениях, допускающих симметрии первого порядка, переменные разделяются в соответствующих системах координат (2.31) или (2.32); см. разд. 1.2. Уравнения, не допускающие симметрий первого порядка, но допускающие симметрии второго порядка, разделяются в одной из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1. Последние уравнения относятся к классу II. Следует заметить, что при рассмотрении этого вопроса появляется алгебра Ли $\mathscr{E}(2)$, хотя она и *не является* алгеброй симметрии уравнения (8.1), за исключением тривиального случая, когда $V(x, y)$ — постоянная величина. Появление $\mathscr{E}(2)$ объясняется тем, что члены L и S операторов симметрии первого либо второго порядка уравнения (8.1), содержащие операторы диффе-