(Б.1):

$$H_\alpha(x/2)\,H_{\lambda-\alpha}(-ix/2)=\sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda-k}{k}c_k x^{\lambda-2k}. \qquad (7.41)$$

Вычислив в явном виде коэффициенты при $x^{\lambda-2k}$ в левой части этого равенства, можно представить c_k в виде конечного гипергеометрического ряда ${}_3F_2$.

Полиномиальные функции (7.38) можно использовать как еще один (но менее полезный) базис для решений уравнения теплопроводности. Следовательно, можно вычислить матричные элементы групповых операторов $\mathbf{T}(g)$ по этому базису, разложить произвольное решение Φ по элементам этого базиса и т. д.

Если λ и α — комплексные числа, то можно получить тождества в виде бесконечных рядов, аналогичные (7.40), но несколько усложненные.

2.8. Заключительные замечания

В заключение этой главы укажем (не проводя подробного анализа) несколько важных результатов, тесно связанных с рассматриваемым нами вопросом.

В статье [39] Винтернитц, Смородинский, Улир и Фриш определили все потенциалы $V(x, y)$, такие, что не зависящее от времени уравнение Шредингера

$$(-\Delta_2+V(x,\ y))\,\Phi=\lambda\Phi \qquad (8.1)$$

допускает некоторый оператор симметрии первого или второго порядка. Они показали, что возможные операторы симметрии имеют вид $L+f(x, y)$, где $L\in\mathscr{E}(2)$ (см. (1.6), (1.7) разд. 1.1), для симметрий первого порядка и вид $S+f(x, y)$, где S — симметрический оператор второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$, для симметрий второго порядка. В уравнениях, допускающих симметрии первого порядка, переменные разделяются в соответствующих системах координат (2.31) или (2.32); см. разд. 1.2. Уравнения, не допускающие симметрий первого порядка, но допускающие симметрии второго порядка, разделяются в одной из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1. Последние уравнения относятся к классу II. Следует заметить, что при рассмотрении этого вопроса появляется алгебра Ли $\mathscr{E}(2)$, хотя она и *не является* алгеброй симметрии уравнения (8.1), за исключением тривиального случая, когда $V(x, y)$ — постоянная величина. Появление $\mathscr{E}(2)$ объясняется тем, что члены L и S операторов симметрии первого либо второго порядка уравнения (8.1), содержащие операторы диффе-

ренцирования, обязательно коммутируют с оператором Лапласа Δ_2; поэтому из результатов, приведенных в разд. 1.1, следует, что L и S должны принадлежать обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$. Однако весь оператор симметрии, как правило, не будет принадлежать обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$, поскольку функциональная часть $f(x, y)$ этого оператора не будет ни нулем, ни даже постоянной величиной. Здесь $f(x, y)$ будет зависеть от потенциала.

Так же как в разд. 1.1, разделение переменных, соответствующее симметриям первого порядка, выполняется довольно тривиальным образом. Интерес представляют уравнения класса II, допускающие симметрии второго порядка и не допускающие ни одной нетривиальной симметрии первого порядка. Такие уравнения допускают разделение переменных в одной или более из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1. Каждая система координат, допускающая разделение переменных, определяется чисто дифференциальной частью оператора симметрии, т. е. той его частью, которая принадлежит обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(2)$. Таким образом, в результате появления оператора Δ_2 в (8.1) может быть не более четырех систем координат, допускающих разделение переменных для этого уравнения. Будут или не будут разделяться переменные для заданного уравнения (8.1), зависит от явного вида потенциала V. Установлено, что (8.1) разделяется в одной из четырех указанных выше систем координат тогда и только тогда, когда это уравнение допускает симметрию второго порядка $S + f(x, y)$, где чисто дифференциальный оператор S соответствует этой системе координат.

Все рассматриваемые в [39] интересные случаи уравнения (8.1) принадлежат классу II, но часто такие случаи возникают в результате частичного разделения переменных из уравнений класса I. Например, уравнение (8.1) получится из временнóго уравнения Шредингера (5.1), если выделить переменную времени, предположив, что $\Psi(x, y\ t) = e^{-i\lambda t}\Phi(x, y)$. Принадлежащие классу I уравнения гармонического осциллятора, репульсивного осциллятора и линейного потенциала, с которым мы сталкивались, рассматривая временнóе уравнение Шредингера, переходят в уравнения класса II, когда мы выделяем переменную t; см. [39]. Это происходит потому, что выделение переменной t приводит к значительному сокращению симметрии уравнения Шредингера.

Особый интерес представляет рассматриваемое в [39] уравнение класса II, которое соответствует потенциалу $V(x, y) = -\alpha/x^2 - \beta/y^2$, где α, β — вещественные константы, такие, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Этот потенциал приводится в работах [20] и [105], где авторы дают классификацию всех потенциалов $V(x, y)$, та-

ких, что временно́е уравнение Шредингера допускает нетривиальные операторы симметрии первого порядка. В работе [21] Бойер исследует уравнение Шредингера

$$(i\partial_t + \partial_{xx} + \partial_{yy} - \alpha/x^2 - \beta/y^2)\Psi = 0 \tag{8.2}$$

с точки зрения методов, развиваемых в настоящей книге. Он показал, что хотя это уравнение все еще принадлежит классу II, оно легко поддается изучению, поскольку его можно получить из принадлежащего классу I уравнения Шредингера для свободной частицы при помощи частичного разделения переменных. Бойер показал, что уравнение (8.2) допускает R-разделение переменных в 25 системах координат при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ и в 15 системах координат при $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Кроме того, он обнаружил, что каждая система координат, допускающая разделение переменных, соответствует паре коммутирующих операторов симметрии второго порядка уравнения (8.2). Полученные им тождества для специальных функций подобны тождествам, которые мы получили в разд. 2.5, но не совпадают с ними.

Армстронг [5, 6] применил методы, предложенные автором настоящей книги, и теорему Вигнера — Экхарта для изучения квантовомеханических систем, которые рассматривались нами в разд. 2.3 и которые допускают $SL(2, R)$ как динамическую группу симметрии. Он исследовал бесконечные семейства самосопряженных операторов в $L_2(R_+)$, которые неприводимо преобразуются под сопряженным действием группы $SL(2, R)$, и, пользуясь теорией групп, вычислил матричные элементы этих операторов по отношению к базису собственных векторов оператора L_3; см. также [100]. Дальнейшее развитие этой теории, которая с точки зрения применяемых методов идентична теории, излагаемой в настоящей книге, содержится в [87] и [88].

И наконец, в [26] при помощи теории групп и разделения переменных определяются все возможные «повышающие»[1]) операторы первого и второго порядка для гамильтонианов вида $H = -\Delta_2 - V(x, y)$. (*Повышающий оператор* R для H определяется соотношением коммутирования $[H, R] = \mu R$, $\mu > 0$. Если собственный вектор Ψ оператора H удовлетворяет соотношению $H\Psi = \lambda\Psi$, то формально $H(R\Psi) = (\lambda + \mu)R\Psi$, и, следовательно, R отображает собственный вектор, соответствующий собственному значению λ, в собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda + \mu$.) В [26] показано, что для того, чтобы H допускал повышающий оператор второго порядка, необходимо, чтобы уравнение (8.1) допускало разделение переменных в одной из четырех систем координат, перечисленных в табл. 1, и дан полный список возможных повышающих операторов.

---

[1]) Автор использует термин «raising operator». — *Прим. перев.*