

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ЛАПЛАСА С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

3.1. Уравнение Гельмгольца

$$(\Delta_3 + \omega^2) \Psi = 0$$

Вопрос о разделении переменных для уравнения Гельмгольца с тремя переменными или приведенного волнового уравнения

$$(\Delta_3 + \omega^2) \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \Delta_3 = \partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2} + \partial_{x_3 x_3}, \quad \omega > 0, \quad (1.1)$$

изучен подробно, и возможные системы координат, допускающие разделение переменных для этого уравнения, известны [99, 101]. Впервые указания на связь между системами координат, допускающими разделение переменных для уравнения (1.1), и евклидовой группой симметрии $E(3)$ этого уравнения появились в работе [76]. Однако лишь в последнее время наблюдается систематическое использование этой связи с теорией групп для установления свойств решений уравнения Гельмгольца с разделенными переменными.

Пользуясь нашими обычными методами, находим, что (помимо тривиальной симметрии E) алгебра симметрии уравнения (1.1) шестимерна, имеет базис

$$P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

$$J_1 = x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3, \quad J_2 = x_1 \partial_3 - x_3 \partial_1, \quad J_3 = x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2$$

и удовлетворяет соотношениям коммутирования

$$[J_l, J_m] = \sum_n \varepsilon_{lmn} J_n, \quad [J_l, P_m] = \sum_n \varepsilon_{lmn} P_n, \quad [P_l, P_m] = 0, \quad (1.3)$$

$$l, m, n = 1, 2, 3,$$

где ε_{lmn} — тензор, такой, что $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$, а все остальные компоненты равны нулю. В качестве алгебры симметрии уравнения (1.1) возьмем вещественную алгебру Ли $\mathcal{E}(3)$ с базисом (1.2). Уравнение Гельмгольца, записанное через операторы P , принимает следующий вид:

$$(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) \Psi = -\omega^2 \Psi. \quad (1.4)$$

В рассматриваемом случае $\mathcal{E}(3)$ изоморфна алгебре Ли евклидовой группы $E(3)$ в трехмерном пространстве, а подалгебра

$so(3)$ с базисом $\{J_1, J_2, J_3\}$ изоморфна алгебре Ли соответствующей группы поворотов $SO(3)$. Чтобы показать это в явном виде, рассмотрим сначала известную реализацию группы $SO(3)$ как группы вещественных (3×3) -матриц A , таких, что $A^t A = E_3$ и $\det A = 1$ (см., например, [86, 130]); здесь через E_3 обозначается единичная (3×3) -матрица $(E_3)_{jl} = \delta_{jl}$ и $(A^t)_{jl} = A_{lj}, j, l = 1, 2, 3$. Алгебра Ли группы $SO(3)$ в этой реализации является пространством кососимметрических (3×3) -матриц \mathcal{A} ($\mathcal{A}^t = -\mathcal{A}$); базис для этой алгебры Ли дается матрицами

$$\mathcal{J}'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (1.5)$$

соотношения коммутирования в соответствии с (1.3) имеют вид $[\mathcal{J}'_l, \mathcal{J}'_m] = \sum_n \epsilon_{lmn} \mathcal{J}'_n$. Соответствующая параметризация группы $SO(3)$ при помощи эйлеровых углов (ϕ, θ, ψ) имеет вид

$$A(\phi, \theta, \psi) = \exp(\phi \mathcal{J}'_3) \exp(\theta \mathcal{J}'_1) \exp(\psi \mathcal{J}'_3), \quad (1.6)$$

$$0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi.$$

По мере того как эйлеровы углы пробегают область своих значений, $A(\phi, \theta, \psi)$ пробегает все элементы группы $SO(3)$. Координаты на групповом многообразии взаимно однозначны, за исключением тех элементов, для которых $\theta = 0, \pi$, а в этих случаях однозначно определена только сумма $\phi + \psi$. Более подробное обсуждение этих координат можно найти во многих работах (например, [86, 122, 130]).

Евклидову группу $E(3)$ в трехмерном пространстве можно реализовать как группу вещественных (4×4) -матриц. Элементы $E(3)$ имеют вид

$$g(A, \mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & A & & \\ & & 0 & \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \in SO(3), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3, \quad (1.7)$$

а групповое произведение определяется произведением матриц

$$g(A, \mathbf{a}) g(A', \mathbf{a}') = g(AA', \mathbf{a}A' + \mathbf{a}'). \quad (1.8)$$

Группа $E(3)$ действует как группа преобразований в трехмерном пространстве R^3 . Групповой элемент $g(A, \mathbf{a})$ отображает точку $\mathbf{x} \in R^3$ в точку

$$\mathbf{x}g = \mathbf{x}A + \mathbf{a} \in R^3. \quad (1.9)$$

Из этого определения следует, что $x(gg') = (xg)g'$ для всех $x \in R^3$, $g, g' \in E(3)$, и что $xg(E_3, 0) = x$, где $g(E_3, 0)$ — единичный элемент группы $E(3)$. Геометрически g соответствует повороту A относительно начала координат $(0, 0, 0) \in R^3$ с последующим переносом на вектор a [86].

Базис алгебры Ли матричной группы $E(3)$ дается матрицами

$$\mathcal{J}_l = \begin{bmatrix} 0 & & \\ J_l & 0 & \\ & 0 & \end{bmatrix}, \quad l = 1, 2, 3; \quad \mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

причем соотношения коммутирования идентичны соотношениям (1.3). Отсюда видно, что алгебра Ли $\mathcal{E}(3)$ с базисом (1.2) изоморфна алгебре Ли группы $E(3)$. Явное соотношение между порождающими элементами (1.10) алгебры Ли и элементами (1.7) группы $E(3)$ имеет вид

$$g(\varphi, \theta, \psi, a) = g(A(\varphi, \theta, \psi), a) = \\ = \exp(\varphi J_3) \exp(\theta J_1) \exp(\psi J_3) \exp(a_1 \mathcal{P}_1 + a_2 \mathcal{P}_2 + a_3 \mathcal{P}_3). \quad (1.11)$$

Используя стандартную теорию Ли, можно при помощи производных Ли (1.2) расширить действие алгебры $\mathcal{E}(3)$ на пространство \mathcal{F} функций, аналитических на некотором открытом связном множестве $\mathcal{D} \subseteq R^3$, до локального представления T группы $E(3)$ на \mathcal{F} . Мы имеем

$$T(g)\Phi(x) = \{\exp(\varphi J_3) \exp(\theta J_1) \exp(\psi J_3) \times \\ \times \exp(a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3)\} \Phi(x) = \Phi(xg), \quad (1.12)$$

где xg дается соотношением (1.9). Таким образом, действие группы $E(3)$ как группы преобразований, определяемое соотношением (1.9), в точности совпадает с действием производных (1.2) алгебры Ли. Как обычно, имеет место соотношение

$$T(gg') = T(g)T(g'), \quad g, g' \in E(3), \quad (1.13)$$

и операторы $T(g)$ отображают решения уравнения Гельмгольца в решения же.

Определяя пространство \mathcal{F} симметрий второго порядка уравнения (1.1), мы видим, что это уравнение является уравнением класса I. В самом деле, факторизуя пространство \mathcal{q} тривиальных

симметрий RQ , $R \in \mathcal{F}$, $Q = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + \omega^2$ (напомним, что RQ — нулевой оператор на пространстве решений уравнения (1.1)), находим, что факторпространство \mathcal{S}/\mathcal{q} 41-мерно и имеет базис, состоящий из единичного оператора E , 6 операторов первого порядка J_i , P_i и 34 симметризованных операторов чисто второго порядка. Пространство $\mathcal{E}(3)^2$ симметризованных операторов второго порядка натянуто на элементы $\{J_i, J_m\}$, $\{J_i, P_m\}$, $\{P_i, P_m\} = 2P_i P_m$, которые подчинены двум соотношениям $J \cdot P = J_1 P_1 + J_2 P_2 + J_3 P_3 \equiv 0$ и $P \cdot P = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = -\omega^2$, причем последнее соотношение выполняется на пространстве решений уравнения (1.1) (см. [76]).

Группа $E(3)$ действует на $\mathcal{E}(3)$ посредством сопряженного представления и разбивает $\mathcal{E}(3)$ на три типа орбит с представителями

$$P_3, \quad J_3, \quad J_3 + aP_3, \quad a \neq 0. \quad (1.14)$$

Заметим, что $\exp(aP_3)$ — перенос вдоль оси x_3 , $\exp(\varphi J_3)$ — поворот относительно этой оси, а $\exp(\varphi J_3 + \varphi aP_3) = \exp(\varphi J_3)\exp(\varphi aP_3)$ — поворот относительно оси x_3 с последующим переносом вдоль этой оси (*винтовое смещение*). Таким образом, мы получили на языке алгебры Ли формулировку теоремы о том, что любое евклидово преобразование является переносом, поворотом или винтовым смещением (см. [86]).

Поскольку (1.1) — уравнение с тремя переменными, с каждой системой координат, допускающей разделение переменных, связаны две константы разделения. Таким образом, можно предположить, что решения с разделенными переменными являются общими собственными функциями пары коммутирующих операторов симметрии в обвертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(3)$. Именно так и обстоит дело. Так же как и для уравнения Гельмгольца с двумя переменными, рассматриваемого в разд. 1.2, мы находим ряд довольно тривиальных систем координат, которые соответствуют диагонализации операторов первого порядка. Кроме того, имеется одиннадцать типов ортогональных систем координат, допускающих разделение переменных, каждая из которых соответствует паре независимых коммутирующих операторов S_1, S_2 в $\mathcal{E}(3)^2$. Соответствующие решения с разделенными переменными $\Psi = U(u)V(v)W(w)$ характеризуются уравнениями на собственные значения

$$(\Delta_3 + \omega^2)\Psi = 0, \quad S_1\Psi = \omega_1^2\Psi, \quad S_2\Psi = \omega_2^2\Psi, \quad (1.15)$$

где ω_1^2, ω_2^2 — константы разделения [76, 118]. (Можно показать, что нетривиальных решений с R -разделенными переменными не существует.)

С другой стороны, некоторая система координат, допускающая разделение переменных, связана с двумерным подпростран-

ством коммутирующих операторов в пространстве $\mathcal{E}(3)^2$, а операторы S_1, S_2 являются базисом (не единственным) для этого подпространства. Группа $E(3)$ действует на множество всех двумерных подпространств коммутирующих операторов в $\mathcal{E}(3)^2$ посредством сопряженного представления и разбивает это множество на орбиты эквивалентных подпространств. Как обычно, допускающие разделение переменных координаты, связанные с эквивалентными подпространствами, считаются эквивалентными, так как любую такую систему можно получить из любой другой при помощи евклидова преобразования. Как показано в [76], существует одиннадцать типов различных (нетривиальных) орбит, которые соответствуют в точности одиннадцати типам ортогональных разделяющих координат. Операторы, являющиеся представителями каждой орбиты, и соответствующие им системы координат перечислены в табл. 14.

Проведем краткий анализ каждой системы, представленной в табл. 14, с тем чтобы определить вид решения с разделенными переменными и смысл собственных значений коммутирующих операторов симметрии. Начнем с рассмотрения решений Ψ уравнения Гельмгольца, которые являются собственными функциями оператора P_3 :

$$P_3\Psi = i\lambda\Psi, \quad \Psi(x, y, z) = e^{i\lambda z}\Phi(x, y).$$

В этом случае можно отделить переменную z , после чего уравнение (1.1) примет вид

$$(\Delta_2 + [\omega^2 - \lambda^2])\Phi(x, y) = 0, \quad (1.16)$$

т. е. станет уравнением Гельмгольца в двух переменных. Из результатов, полученных в разд. 1.2 (см. табл. 1), вытекает, что это приведенное уравнение допускает разделение переменных точно в четырех ортогональных системах координат. Соответствующими системами для неприведенного уравнения (1.1) являются системы 1—4 в табл. 14.

Теперь рассмотрим решения Ψ уравнения (1.1), которые являются собственными функциями оператора J_3 :

$$iJ_3\Psi = m\Psi, \quad \Psi(x, y, z) = e^{im\varphi}\Phi(r, z).$$

Здесь r, φ, z — цилиндрические координаты 2 и $J_3 = -\partial_\varphi$. Отделяем переменную φ , и уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$(\partial_{rr} + r^{-1}\partial_r - m^2/r^2 + \partial_{zz} + \omega^2)\Phi = 0. \quad (1.17)$$

Несмотря на то что это уравнение получается в результате разделения переменных из уравнения, принадлежащего классу I, само оно принадлежит классу II. Приведенное уравнение (1.17) имеет решения с разделенными переменными в пяти системах координат, соответствующих системам 2, 5—8.

Таблица 14

ОПЕРАТОРЫ И КООРДИНАТЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$(\Delta_3 + \omega^2) \Psi = 0 \quad ((x_1, x_2, x_3) = (x, y, z))$$

	Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие разделение переменных
1	P_2^2, P_3^2	Декартовы x, y, z
2	J_3^2, P_3^2	Цилиндрические $x = r \cos \varphi,$ $y = r \sin \varphi, z = z$
3	$\{J_3, P_2\}, P_3^2$	Парabolического цилиндра $x = (\xi^2 - \eta^2)/2,$ $y = \xi\eta, z = z$
4	$J_3^2 + d^2 P_1^2, P_3^2,$ $d > 0$	Эллиптического цилиндра $x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta,$ $y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, z = z$
5	$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}, J_3^2$	Сферические $x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$ $y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$ $z = \rho \cos \theta$
6	$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} - a^2 (P_1^2 + P_2^2), J_3^2,$ $a > 0$	Вытянутого сфероида $x = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \cos \varphi,$ $y = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \sin \varphi,$ $z = a \operatorname{ch} \eta \cos \alpha$
7	$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + a^2 (P_1^2 + P_2^2), J_3^2,$ $a > 0$	Сплющенного сфероида $x = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \cos \varphi,$ $y = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \sin \varphi,$ $z = a \operatorname{sh} \eta \cos \alpha$
8	$\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\}, J_3^2$	Парabolические $x = \xi\eta \cos \varphi,$ $y = \xi\eta \sin \varphi,$ $z = (\xi^2 - \eta^2)/2$
9	$J_3^2 - c^2 P_3^2 + c (\{J_2, P_1\} + \{J_1, P_2\}),$ $c (P_2^2 - P_1^2) + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\}$	Парabolоидальные $x = 2c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma,$ $y = 2c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma,$ $z = c (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta - \operatorname{ch} 2\gamma)/2$
10	$P_1^2 + a P_2^2 + (a+1) P_3^2 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{J},$ $J_2^2 + a (J_1^2 + P_3^2),$ $a > 1$	Эллипсоидальные $x = \left[\frac{(\mu-a)(v-a)(\rho-a)}{a(a-1)} \right]^{1/2},$ $y = \left[\frac{(\mu-1)(v-1)(\rho-1)}{1-a} \right]^{1/2},$ $z = \left[\frac{\mu v \rho}{a} \right]^{1/2},$

Продолжение табл. 14

Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие разделение переменных
11 $J \cdot J, J_1^2 + bJ_2^2,$ $1 > b > 0$	Конические $x = r \left[\frac{(b\mu - 1)(b\nu - 1)}{1 - b} \right]^{1/2},$ $y = r \left[\frac{b(\mu - 1)(\nu - 1)}{b - 1} \right]^{1/2},$ $z = r [b\mu\nu]^{1/2}$

Для сферических координат 5 уравнения с разделенными переменными ρ и θ имеют вид

$$P'' + \frac{2}{\rho} P' + \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) P = 0, \quad (1.18a)$$

$$\Theta'' + \operatorname{ctg} \theta \Theta' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0, \quad (1.18b)$$

$$J \cdot J \Psi = -l(l+1) \Psi.$$

Решения с разделенными переменными принимают вид

$$P(\rho) = \rho^{-1/2} J_{\pm(l+1/2)}(\omega\rho), \quad \Theta(\theta) = P_l^{\pm m}(\cos \theta), \quad (1.19)$$

где $J_v(z)$ — функция Бесселя, а $P_l^m(\cos \theta)$ функция Лежандра (см. (Б.6iv)). Чтобы полностью покрыть пространство R^3 , координаты ρ, θ, φ должны меняться в следующих интервалах:

$$0 \leq \rho, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Для координат вытянутого сферида (или эллипсоида) 6 (см. табл. 14) уравнения с разделенными переменными η, α записываются так:

$$H'' + \operatorname{cth}(\eta) H' + (-\lambda + a^2\omega^2 \operatorname{sh}^2 \eta - m^2/\operatorname{sh}^2 \eta) H = 0,$$

$$A'' + \operatorname{ctg}(\alpha) A' + (\lambda + a^2\omega^2 \sin^2 \alpha - m^2/\sin^2 \alpha) A = 0, \quad (1.20)$$

$$(J \cdot J - a^2 P_1^2 - a^2 P_2^2) \Psi = -\lambda \Psi.$$

Уравнения (1.20) — две формы *уравнения сфероидальной волны* [7, 80]. Соответствующие решения Ψ уравнения (1.1), ограниченные и однозначные в R^3 , имеют вид

$$H(\eta) A(\alpha) e^{im\varphi} = Ps_n^{1|m|}(\operatorname{ch} \eta, a^2\omega^2) Ps_n^{1|m|}(\cos \alpha, a^2\omega^2) e^{im\varphi}, \quad (1.21)$$

m — целое число, $n = 0, 1, \dots, -n \leq m \leq n$,

где $Ps_n^m(z, \gamma)$ — функция сфероидальной волны. Дискретные собственные значения $\lambda_n^{1|m|}(a^2\omega^2)$ являются аналитическими функ-

циями от $a^2\omega^2$. При $a = 0$ уравнение сфероидальной волны сводится к уравнению (1.18б) для функций Лежандра, причем $Ps_n^{l|m|}(\cos \alpha, 0) = P_n^{l|m|}(\cos \alpha)$. Кроме того, $\lambda_n^{l|m|}(0) = n(n+1)$. Переменные меняются в интервалах $0 \leq \alpha < 2\pi$, $\eta \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Для координат сплющенного сфероида (или эллипсоида) 7 получаются следующие уравнения с разделенными переменными η , α :

$$H'' + \operatorname{th}(\eta) H' + (-\lambda + a^2\omega^2 \operatorname{ch}^2 \eta + m^2/\operatorname{ch}^2 \eta) H = 0,$$

$$A'' + \operatorname{ctg}(\alpha) A' + (\lambda - a^2\omega^2 \sin^2 \alpha - m^2/\sin^2 \alpha) A = 0, \quad (1.22)$$

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + a^2 P_1^2 + a^2 P_2^2) \Psi = -\lambda \Psi.$$

Следует заметить, что эти уравнения также являются вариантами уравнения сфероидальной волны. Соответствующие решения Ψ уравнения (1.1), ограниченные и однозначные в R^3 , имеют вид

$$Ps_n^{l|m|}(-i \operatorname{sh} \eta, a^2\omega^2) Ps_n^{l|m|}(\cos \alpha, -a^2\omega^2) e^{l m \varphi}, \quad (1.23)$$

m — целое число, $n = 0, 1, 2, \dots$, $-n \leq m \leq n$,

с собственными значениями $\lambda_n^{l|m|}(-a^2\omega^2)$.

Для параболических координат 8 уравнения с разделенными переменными ξ , η записываются так:

$$\Xi'' + \xi^{-1} \Xi' + (\omega^2 \xi^2 - m^2/\xi^2 - \lambda) \Xi = 0,$$

$$H'' + \eta^{-1} H + (\omega^2 \eta^2 - m^2/\eta^2 + \lambda) H = 0, \quad (1.24)$$

$$(\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\}) \Psi = \lambda \Psi,$$

а решения с разделенными переменными имеют вид

$$\Xi(\xi) = \xi^m \exp(\pm i\omega\xi^2/2) {}_1F_1\left(\begin{array}{c} i\lambda/4\omega + (m+1)/2 \\ m+1 \end{array} \middle| \mp i\omega\xi^2\right), \quad (1.25)$$

$$H(\eta) = \eta^m \exp(\pm i\omega\eta^2/2) {}_1F_1\left(\begin{array}{c} -i\lambda/4\omega + (m+1)/2 \\ m+1 \end{array} \middle| \mp i\omega\eta^2\right).$$

Рассмотренные выше восемь систем координат — это единственны системы, для которых решения с разделенными переменными являются собственными функциями некоторого оператора второго порядка, т. е. квадрата оператора симметрии первого порядка. Анализ систем 9—11 выполняется не так просто.

Для параболоидальных координат 9 получаются уравнения с разделенными переменными α , β , γ :

$$A'' + (-q - \lambda c \operatorname{ch} 2\alpha + (\omega^2 c^2/2) \operatorname{ch} 4\alpha) A = 0,$$

$$B'' + (q + \lambda c \cos 2\beta - (\omega^2 c^2/2) \cos 4\beta) B = 0, \quad (1.26)$$

$$\Gamma'' + (-q + \lambda c \operatorname{ch} 2\gamma - (\omega^2 c^2/2) \operatorname{ch} 4\gamma) \Gamma = 0, \quad q = \mu - c^2\omega^2/2,$$

где

$$\begin{aligned} (J_3^2 - c^2 P_3^2 + c \{J_2, P_1\} + c \{J_1, P_2\}) \Psi &= -\mu \Psi, \\ (c P_2^2 - c P_1^2 + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\}) \Psi &= \lambda \Psi. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Каждое из уравнений (1.26) можно преобразовать в уравнение Уиттекера — Хилла (6.28); см. разд. 2.6 [127]. Однозначные решения уравнения (1.1) определяются формулой

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, \beta, \gamma) &= g c_n(i\alpha; 2c\omega, \lambda/2\omega) g c_n(\beta; 2c\omega, \lambda/2\omega) \times \\ &\times g c_n(i\gamma + \pi/2; 2c\omega, \lambda/2\omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu = \mu_n, \end{aligned} \quad (1.28)$$

либо тем же самым выражением, но с $g c_n$, замененным на $g s_n$.

Для эллипсоидальных координат μ, v, ρ , при $0 < \rho < 1 < v < a < \mu < \infty$ однозначно определяющих точку пространства, все уравнения с разделенными переменными принимают вид

$$\begin{aligned} \left(4(h(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} (h(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} + \lambda_1 \xi + \lambda_2 + \omega^2 \xi^2 \right) E(\xi) &= 0, \\ h(\xi) &= (\xi - a)(\xi - 1)\xi, \quad \xi = \mu, v, \rho, \end{aligned} \quad (1.29)$$

причем

$$\begin{aligned} (J \cdot J + P_1^2 + aP_2^2 + (a+1)P_3^2) \Psi &= \lambda_1 \Psi, \\ (J_2^2 + aJ_1^2 + aP_3^2) \Psi &= \lambda_2 \Psi. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Для удобства вычислений введем эквивалентные координаты α, β, γ , допускающие разделение переменных и определенные следующим образом:

$$\rho = \operatorname{sn}^2(\alpha, k), \quad v = \operatorname{sn}^2(\beta, k), \quad \mu = \operatorname{sn}^2(\gamma, k), \quad k = a^{-1/2}, \quad (1.31)$$

где $\operatorname{sn}(z, k)$ — эллиптическая функция Якоби (см. приложение В). Связь между α, β, γ и x, y, z дается соотношениями

$$\begin{aligned} x &= ik^{-1}(k')^{-1} \operatorname{dn} \alpha \operatorname{dn} \beta \operatorname{dn} \gamma, \quad y = -k(k')^{-1} \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{cn} \gamma, \\ z &= k \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn} \gamma, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $\operatorname{sn} \alpha$ и $\operatorname{dn} \alpha$ — эллиптические функции, а $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. Чтобы x, y, z имели вещественные значения, необходимо, чтобы α было вещественнонозвучным, β — комплекснозвучным и таким, что $\operatorname{Re} \beta = K$, а γ — комплекснозвучным и таким, что $\operatorname{Im} \gamma = K'$, где $K(k)$ определяется в (B.3) и $K' = K(k')$. Для того чтобы координаты x, y, z могли один раз пребегать все возможные вещественные значения, достаточно, чтобы α изменялось на отрезке $[-K, K]$, β — на отрезке $[K - iK', K + iK']$ (параллельном мнимой оси), а γ — на отрезке $[-K + iK', K + iK']$ (параллельном вещественной оси). В этих новых переменных урав-

нения с разделенными переменными принимают вид *уравнения эллипсоидальной волны*

$$\left\{ \frac{d^2}{d\xi^2} + k^2\lambda_2 + k^2\lambda_1 \operatorname{sn}^2 \xi + k^2\omega^2 \operatorname{sn}^4 \xi \right\} E(\xi) = 0, \quad \xi = \alpha, \beta, \gamma. \quad (1.33)$$

Из свойств периодичности эллиптических функций следует, что если в (1.32) заменить ξ на $\xi + 4Kn + 4iK'm$, где m, n — целые числа, а ξ — одна из переменных α, β, γ , то x, y, z не изменятся. Таким образом, однозначными функциями от x, y, z будут только те решения $E(\xi)$ уравнения (1.33), которые являются двоякопериодическими и однозначными функциями от переменной ξ с вещественным периодом $4K$ и мнимым периодом $4iK'$. Эти двоякопериодические однозначные решения уравнения (1.33) называются *функциями эллипсоидальной волны* и обозначаются символом $\operatorname{el}(\xi)$ в предложенной Арскоттом системе обозначений [7, гл. X]. Существует восемь типов таких функций, причем каждую из них можно представить в виде

$$\operatorname{sn}^s z \operatorname{cn}^c z \operatorname{dn}^d z F(\operatorname{sn}^2 z), \quad s, c, d = 0, 1,$$

где F — сходящийся степенной ряд от своего аргумента. Собственные значения счетны и дискретны.

Чтобы рассмотреть конические координаты r, μ, v (система 11 табл. 14), для удобства положим $\mu = \operatorname{sn}^2(\alpha, k)$, $v = -\operatorname{sn}^2(\beta, k)$, где $k = b^{1/2} > 0$; тогда

$$\begin{aligned} x &= r(k')^{-1} \operatorname{dn}(\alpha, k) \operatorname{dn}(\beta, k), \quad y = irk(k')^{-1} \operatorname{cn}(\alpha, k) \operatorname{cn}(\beta, k), \\ z &= rk \operatorname{sn}(\alpha, k) \operatorname{sn}(\beta, k) \end{aligned} \quad (1.34)$$

и переменные меняются в следующих интервалах: $0 \leq r$, $-2K < \alpha < 2K$, $\beta \in [K, K + 2iK']$ (см. [7]). Уравнения с разделенными переменными записываются так:

$$\begin{aligned} R'' + 2r^{-1}R' + (\omega - l(l+1)r^{-2})R &= 0, \\ A'' + (\lambda - l(l+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha)A &= 0, \\ B'' + (\lambda - l(l+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \beta)B &= 0, \\ J \cdot J\Psi &= -l(l+1)\Psi, \quad (J_1^2 + bJ_2^2)\Psi = \lambda\Psi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Первое уравнение имеет решения вида $R(r) = r^{-1/2} J_{\pm(l+1/2)}(\omega r)$, что соответствует (1.18а). Два последующих уравнения являются *уравнениями Ламе*. Если α или β увеличить на целые, кратные $4K$ или $4iK'$, то x, y и z , как следует из (1.34), не изменятся. Таким образом, к однозначным функциям от x, y, z приводят только те решения $A(\alpha), B(\beta)$ уравнений (1.35), которые являются двоякопериодическими и однозначными функциями от переменных α, β соответственно. Известно (см. [7]), что двоякопериодические решения уравнения Ламе существуют

только в тех случаях, когда $l = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, для положительного целого числа l существует точно $2l+1$ таких решений, соответствующих $2l+1$ различным собственным значениям λ . Эти решения (в точности по одному для каждой пары собственных значений λ, l) можно представить в виде конечных рядов, называемых *многочленами Ламе*. Существует восемь типов многочленов Ламе, причем каждый из них имеет вид

$\text{sn}^s \alpha \text{cn}^c \alpha \text{dn}^d \alpha F_p(\text{sn}^2 \alpha)$, $s, c, d = 0, 1$, $s + c + d + 2p = l$,
где $F_p(z)$ — многочлен от z порядка p . Более подробно эти функции будут рассмотрены в разд. 3.3.

8.2. Модель гильбертова пространства: сфера S_2

По аналогии с методами, рассмотренными в гл. 1, можно в пространство решений уравнения (1.1) ввести некоторую структуру гильбертова пространства таким образом, что решения с разделенными переменными будут являться собственными функциями самосопряженных операторов в обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(3)$. Используя результаты, полученные в разд. 1.3, можно показать, что если функцию $\Psi(x)$ можно представить в виде

$$\Psi(x) = \iint_{S_2} \exp(i\omega x \cdot \hat{k}) h(\hat{k}) d\Omega(\hat{k}) = I(h), \quad (2.1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad \hat{k} = (k_1, k_2, k_3),$$

то она удовлетворяет уравнению $(\Delta_3 + \omega^2)\Psi(x) = 0$. В формуле (2.1) \hat{k} — единичный вектор ($\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$), пробегающий единичную сферу S_2 : $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, $d\Omega$ — обычная мера телесного угла на этой сфере и h — произвольная комплекснозначная измеримая функция на S_2 (относительно $d\Omega$), такая, что

$$\iint_{S_2} |h(\hat{k})|^2 d\Omega(\hat{k}) < \infty.$$

Множество $L_2(S_2)$ таких функций h образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle h_1, h_2 \rangle = \iint_{S_2} h_1(\hat{k}) \bar{h}_2(\hat{k}) d\Omega(\hat{k}); \quad (2.2)$$

в сферических координатах на S_2

$$\hat{k} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad (2.3)$$

$$d\Omega(\hat{k}) = \sin \theta d\theta d\varphi$$