только в тех случаях, когда $l = 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, для положительного целого числа l существует точно $2l + 1$ таких решений, соответствующих $2l + 1$ различным собственным значениям λ. Эти решения (в точности по одному для каждой пары собственных значений λ, l) можно представить в виде конечных рядов, называемых *многочленами Ламе*. Существует восемь типов многочленов Ламе, причем каждый из них имеет вид

$$\operatorname{sn}^s \alpha \operatorname{cn}^c \alpha \operatorname{dn}^d \alpha F_p(\operatorname{sn}^2 \alpha), \qquad s,\ c,\ d = 0,\ 1, \qquad s + c + d + 2p = l,$$

где $F_p(z)$ — многочлен от z порядка p. Более подробно эти функции будут рассмотрены в разд. 3.3.

3.2. Модель гильбертова пространства: сфера S_2

По аналогии с методами, рассмотренными в гл. 1, можно в пространство решений уравнения (1.1) ввести некоторую структуру гильбертова пространства таким образом, что решения с разделенными переменными будут являться собственными функциями самосопряженных операторов в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(3)$. Используя результаты, полученные в разд. 1.3, можно показать, что если функцию $\Psi(\mathbf{x})$ можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = \iint\limits_{S_2} \exp(i\omega\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{k}})\, h(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = I(h), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad \hat{\mathbf{k}} = (k_1,\ k_2,\ k_3),$$

то она удовлетворяет уравнению $(\Delta_3 + \omega^2)\Psi(\mathbf{x}) = 0$. В формуле (2.1) $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор ($\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1$), пробегающий единичную сферу S_2: $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, $d\Omega$ — обычная мера телесного угла на этой сфере и h — произвольная комплекснозначная измеримая функция на S_2 (относительно $d\Omega$), такая, что

$$\iint\limits_{S_2} |h(\hat{\mathbf{k}})|^2\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) < \infty.$$

Множество $L_2(S_2)$ таких функций h образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle h_1,\ h_2 \rangle = \iint\limits_{S_2} h_1(\hat{\mathbf{k}})\, \bar{h}_2(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}); \tag{2.2}$$

в сферических координатах на S_2

$$\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad -\pi \leqslant \varphi < \pi,$$
$$d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{2.3}$$

это произведение записывается в виде

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} h_1(\theta, \varphi)\, \bar{h}_2(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta.$$

Элементы $g(A, \mathbf{a})$ группы $E(3)$ действуют на решения рассматриваемого уравнения Гельмгольца посредством операторов $\mathbf{T}(g)$; см. формулы (1.9), (1.12). При помощи (2.1) мы находим, что

$$\mathbf{T}(g)\,\Psi(\mathbf{x}) = I(\mathbf{T}(g)\,h) \tag{2.4}$$

каждый раз, когда $\Psi = I(h)$, причем операторы $\mathbf{T}(g)$ в $L_2(S_2)$ определяются следующими соотношениями:

$$\mathbf{T}(g)\,h(\hat{\mathbf{k}}) = \exp(i\omega\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}A)\,h(\hat{\mathbf{k}}A), \tag{2.5}$$
$$g = (A, \mathbf{a}), \qquad A \in SO(3), \quad \mathbf{a} \in R^3.$$

Таким образом, операторы $\mathbf{T}(g)$, действуя на Ψ, индуцируют операторы (которые мы также обозначаем $\mathbf{T}(g)$), действующие на h. Легко непосредственно проверить, что операторы (2.5) обладают свойством гомоморфизма $\mathbf{T}(g_1g_2) = \mathbf{T}(g_1)\mathbf{T}(g_2)$. Более того, эти операторы унитарны в $L_2(S_2)$:

$$\langle \mathbf{T}(g)\,h_1, \mathbf{T}(g)\,h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle, \qquad h_j \in L_2(S_2).$$

Этот результат и соотношение (2.5) зависят от инвариантности меры при повороте: $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}A) = d\Omega(\mathbf{k})$.

Аналогичным рассуждением можно показать, что образующие алгебры Ли в $L_2(S_2)$, индуцируемые образующими (1.2) на пространстве решений, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&P_1 = i\omega k_1 = i\omega \sin\theta\cos\varphi, \quad P_2 = i\omega k_2 = i\omega\sin\theta\sin\varphi,\\
&P_3 = i\omega k_3 = i\omega\cos\theta,\\
&J_1 = k_3\partial_{k_2} - k_2\partial_{k_3} = \sin\varphi\,\partial_\theta + \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\,\partial_\varphi,\\
&J_2 = k_1\partial_{k_3} - k_3\partial_{k_1} = -\cos\varphi\,\partial_\theta + \sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\,\partial_\varphi,\\
&J_3 = k_2\partial_{k_1} - k_1\partial_{k_2} = -\partial_\varphi.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

По аналогии с (1.12) связь между этими операторами и групповыми операторами (2.5) определяется соотношением

$$\mathbf{T}(g) = \exp(\varphi' J_3)\exp(\theta' J_1)\exp(\psi' J_3)\exp(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3),$$

где φ', θ', ψ' — эйлеровы углы для A. Кроме того, операторы (2.6) являются кососимметрическими эрмитовыми операторами на плотном подпространстве $\mathscr{D}$ пространства $L_2(S_2)$, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций в S_2.

Мы показали, что операторы $\mathbf{T}(g)$ определяют унитарное (неприводимое) представление группы $E(3)$ на $L_2(S_2)$. Легко видеть, что элементы алгебры $\mathscr{E}(3)^2$ являются симметрическими на $\mathscr{D}$; ниже мы покажем в явном виде, что области определения этих элементов можно расширить, с тем чтобы определить самосопряженные операторы в плотных подпространствах пространства $L_2(S_2)$. Для каждой пары коммутирующих операторов, перечисленных в табл. 14, можно найти соответствующую пару коммутирующих самосопряженных операторов S, S' на $L_2(S_2)$ и получить спектральное разложение этой пары. Эти результаты будут использованы нами для получения информации относительно пространства $\mathscr{H}$, состоящего из решений Ψ уравнения Гельмгольца, таких, что $\Psi = I(h)$ для некоторого элемента $h \in L_2(S_2)$; см. (2.1). Через $\mathscr{H}$ мы обозначаем гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) \equiv \langle h_1, h_2 \rangle, \qquad \Psi_j = I(h_j). \tag{2.7}$$

(Нетрудно показать, что не существует такого ненулевого элемента $h \in L_2(S_2)$, который при помощи оператора I можно было бы отобразить в нулевое решение уравнения Гельмгольца.) Следовательно, I является унитарным преобразованием из $L_2(S_2)$ в $\mathscr{H}$. Отсюда вытекает, что операторы $\mathbf{T}(g)$ в $\mathscr{H}$, определяемые формулами (1.9), (1.12), также унитарны.

Каждую функцию $\Psi(\mathbf{x})$ в $\mathscr{H}$ можно представить в виде скалярного произведения

$$\begin{gathered} \Psi(\mathbf{x}) = I(h) = \langle h, H(\mathbf{x}, \cdot) \rangle, \\ H(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = \exp(-i\omega\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \in L_2(S_2). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Так же как в разд. 1.3, существование унитарного отображения I дает нам возможность переходить в задачах от пространства $\mathscr{H}$ к пространству $L_2(S_2)$. В частности, если S и S' — пара коммутирующих операторов из табл. 14, мы можем представить эти операторы как пару коммутирующих самосопряженных операторов в $L_2(S_2)$ и определить базис собственных функций для $L_2(S_2)$:

$$Sf_{\lambda\mu} = \lambda f_{\lambda\mu}, \quad S'f_{\lambda\mu} = \mu f_{\lambda\mu}, \quad \langle f_{\lambda\mu}, f_{\lambda'\mu'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta(\mu - \mu'). \tag{2.9}$$

Тогда функции $\Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = I(f_{\lambda\mu})$ образуют в $\mathscr{H}$ соответствующий базис для операторов S, S', построенных из образующих (1.2):

$$S\Psi_{\lambda\mu} = \lambda\Psi_{\lambda\mu}, \qquad S'\Psi_{\lambda\mu} = \mu\Psi_{\lambda\mu}. \tag{2.10}$$

Последние выражения дают возможность вычислить интеграл для $\Psi_{\lambda\mu}$, так как они гарантируют, что $\Psi_{\lambda\mu}$ является решением

уравнения Гельмгольца с разделенными переменными, ассоциированными с операторами S, S'. Более того, если Ψ — решение уравнения (1.1), такое, что $\Psi = I(h)$ для некоторого $h \in L_2(S_2)$, то имеет место разложение

$$\mathbf{T}(g)\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda,\mu} \langle \mathbf{T}(g)h, f_{\lambda\mu}\rangle \Psi_{\lambda\mu}(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

сходящееся как поточечно, так и в смысле гильбертова пространства.

Продолжим анализ нашей модели $L_2(S_2)$. Гармонический анализ, связанный с рассмотрением функций на сфере, сам по себе представляет значительный интерес. Как правило, такой анализ, при котором рассматриваются только сферические координаты 5 (см. табл. 14), дает в результате теоремы, касающиеся разложений по сферическим гармоникам. Мы же исследуем все представленные в табл. 14 одиннадцать систем координат на S_2. В некоторых случаях в нашем анализе мы будем использовать более простые модели представлений, нежели модель $L_2(S_2)$.

Поскольку подробный анализ системы сферических координат 5 можно найти во многих учебниках (см., например, [37, 43, 86, 130]), мы перечислим здесь без доказательств только наиболее важные результаты, относящиеся к этой системе. Все унитарные неприводимые представления группы $SO(3)$ конечномерны. Они обозначаются через D_l, $l = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\dim D_l = 2l + 1$. Если $\{J_1, J_2, J_3\}$ — операторы в пространстве V_l представлений D_l, соответствующие образующим (1.5) алгебры Ли, то существует о. н. базис $\{f_m^{(l)}: m = l, l-1, \ldots, -l\}$ для V_l, такой, что

$$J^0 f_m^{(l)} = m f_m^{(l)}, \qquad J^{\pm} f_m^{(l)} = [(l \pm m + 1)(l \mp m)]^{1/2} f_{m\pm 1}^{(l)}, \tag{2.12}$$

где $J^{\pm} = \mp J_2 + iJ_1$, $J^0 = iJ_3$, причем $J^+ f_l^{(l)} \equiv J^- f_{-l}^{(l)} \equiv 0$. Если группа параметризована при помощи эйлеровых углов (1.6), то матричные элементы операторов $\mathbf{D}(A) = \exp(\varphi J_3)\exp(\theta J_1)\exp(\psi J_3)$ относительно о. н. базиса $\{f_m^{(l)}\}$,

$$\mathbf{D}(A) f_m^{(l)} = \sum_{n=-l}^{l} D_{nm}^l(A) f_n^{(l)},$$

определяются соотношением

$$D_{nm}^l(A) = i^{n-m}\left[\frac{(l+m)!\,(l-n)!}{(l+n)!\,(l-m)!}\right]^{1/2} \exp[i(n\varphi + m\psi)]\, P_l^{-n,\,m}(\cos\theta), \tag{2.13}$$

где

$$P_l^{-n,\,m}(\cos\theta) = \frac{(\sin\theta)^{m-n}(1-\cos\theta)^{l+n-m}\,2^{-l}}{\Gamma(m-n+1)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(\begin{matrix} -l-n,\ m-l \\ m-n+1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}\right) \qquad (2.14)$$

— обобщенная сферическая функция. (Матричные элементы (2.13) известны как *D-функции Вигнера* [36].) Матричные элементы D^l_{nm} обладают обычными свойствами гомоморфизма и унитарности:

$$D^l_{nm}(AA') = \sum_{j=-l}^{l} D^l_{nj}(A)\,D^l_{jm}(A'), \qquad A,\ A' \in SO(3),$$
$$D^l_{nm}(A^{-1}) = \bar{D}^l_{mn}(A). \qquad (2.15)$$

Матричные элементы частного вида $D^l_{0m}(A)$ пропорциональны сферическим гармоникам

$$D^l_{0m}(\varphi,\ \theta,\ \psi) = i^m\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} Y^m_l(\theta,\ \psi), \qquad (2.16)$$

где

$$Y^m_l(\theta,\ \psi) = \left[\frac{(2l+1)\,(l-m)!}{4\pi\,(l+m)!}\right]^{1/2} P^m_l(\cos\theta)\,e^{im\varphi}, \qquad (2.17)$$

а $P^m_l(\cos\theta) = P^{0,\,-m}_l(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра.

Из (2.12) следует, что в V_l имеет место соотношение

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = -\,l\,(l+1)\,E, \qquad (2.18)$$

где E — единичный оператор.

Теперь рассмотрим неприводимое представление T группы $E(3)$ в $L_2(S_2)$, которое определяется соотношением (2.5). Если ограничить T на подгруппу $SO(3)$, то оно становится приводимым и разбивается на прямую сумму

$$T\,|\,SO(3) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l, \qquad (2.19)$$

т. е. $L_2(S_2)$ можно разложить на прямую сумму взаимно ортогональных подпространств V_l

$$L_2(S_2) \cong \sum_{l=0}^{\infty} \oplus V_l,$$

где $\dim V_l = 2l+1$ и действие операторов $\mathbf{T}(A)$ на инвариантное подпространство V_l унитарно эквивалентно D_l. Элементы h из подпространств V_l являются решениями уравнения $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}h = -l(l+1)h$, которое в сферических координатах (2.3) имеет

вид

$$(\partial_{\theta\theta} + \operatorname{ctg}\theta\partial_\theta + \sin^{-2}\theta\partial_{\varphi\varphi})\, h(\theta, \varphi) = -l(l+1)\, h(\theta, \varphi). \quad (2.20)$$

В этом уравнении $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ является *оператором Лапласа на сфере* S_2. Из представленных выше результатов вытекает, что самосопряженное расширение этого оператора (которое мы также обозначаем через $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$) имеет дискретный спектр $-l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, причем кратность каждого собственного значения равна $2l+1$.

Для V_l существует некоторый базис, состоящий из собственных функций $f_m^{(l)}(\theta, \varphi)$ оператора симметрии J^0, удовлетворяющего соотношениям (2.12), где

$$J^\pm = e^{\pm i\varphi}(\pm\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi), \quad J^0 = -i\partial_\varphi. \quad (2.21)$$

Действительно, из рекуррентных соотношений (2.12) и дифференциального уравнения (2.20) мы получаем

$$f_m^{(l)}(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi), \quad \langle Y_l^m, Y_{l'}^{m'}\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \quad (2.22)$$

Нетрудно показать, что действие операторов P_j на этот базис описывается формулами

$$\begin{aligned}
P^0 f_m^{(l)} &= -\omega\left[\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_m^{(l+1)} - \\
&\quad - \omega\left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_m^{(l-1)}, \\
P^+ f_m^{(l)} &= \omega\left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_{m+1}^{(l+1)} - \\
&\quad - \omega\left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_{m+1}^{(l-1)}, \\
P^- f_m^{(l)} &= -\omega\left[\frac{(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)}\right]^{1/2} f_{m-1}^{(l+1)} + \\
&\quad + \omega\left[\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\right]^{1/2} f_{m-1}^{(l-1)},
\end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$P^0 = iP_3 = -\omega\cos\theta, \quad P^\pm = \mp P_2 + iP_1 = -\omega e^{\pm i\varphi}\sin\theta \quad (2.24)$$

(см. [83]).

Матричные элементы операторов переноса $\mathbf{T}(E, \mathbf{a}) = \exp(a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3)$ определяются формулой

$$\begin{aligned}
T_{lm,\, l'm'}(\mathbf{a}) &= \langle \mathbf{T}(E, \mathbf{a}) f_{m'}^{(l')}, f_m^{(l)}\rangle = \\
&= \int_{S_2} \exp(i\omega\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{k}})\, Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}})\, \overline{Y}_l^m(\hat{\mathbf{k}})\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}),
\end{aligned} \quad (2.25)$$

или — в развернутом виде —

$$T_{lm,\,l'm'}(\mathrm{a}) = (4\pi)^{1/2} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(2s+1)(2l+1)}{(2l'+1)}\right]^{1/2} i^s j_s(\omega a) \times$$

$$\times Y_s^{m'-m}(\alpha, \beta)\, C(s, 0; l, 0 \,|\, l', 0)\, C(s, m'-m; l, m \,|\, l', m'), \qquad (2.26)$$

$$\mathrm{a} = (a \sin\alpha \cos\beta,\ a \sin\alpha \sin\beta,\ a \cos\alpha), \qquad a \geqslant 0,$$

а $C(\cdot)$ — коэффициент Клебша — Гордана для $SO(3)$ [37, 83, 122]. (Сумма в (2.26) фактически конечна, так как, за исключением ограниченного числа значений s, коэффициенты Клебша — Гордана обращаются в нуль.) *Сферические функции Бесселя* $j_n(z)$ определяются соотношением

$$j_n(z) = (\pi/2z)^{1/2} J_{n+1/2}(z), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2.27)$$

Применяя интегральное преобразование I к нашему о. н. базису $\{f_m^{(l)}\}$ для $L_2(S_2)$, мы получаем о. н. базис $\{\Psi_m^{(l)} = I(f_m^{(l)})\}$ решений уравнения Гельмгольца, которые удовлетворяют следующим уравнениям на собственные значения:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}\Psi_m^{(l)} = -l(l+1)\Psi_m^{(l)}, \qquad J_3\Psi_m^{(l)} = -im\Psi_m^{(l)}.$$

Эти собственные функции разделяются в представленной в табл. 14 системе сферических координат 5 и в явном виде даются соотношением

$$\Psi_m^{(l)}(r, \theta, \varphi) = 4\pi i^l j_l(\omega r)\, Y_l^m(\theta, \varphi),$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = l, l-1, \ldots, -l. \qquad (2.28)$$

Такие функции часто называются *сферическими* (*стоячими*) *волнами*. Они обязательно удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12) и (2.23), в которых операторы теперь определяются формулами (1.2). Матричные элементы (2.13) и (2.26) можно использовать непосредственно для разложения функции $\mathbf{T}(g)\Psi_M^{(L)}$ по элементам сферического базиса. Рассматривая, например, частный случай, когда $g = (E, \mathrm{a})$, мы получаем теорему сложения для сферических волн:

$$\Psi_M^{(L)}(R, \Theta, \Phi) = \sum_{l,m} T_{lm,\,LM}(\mathrm{a})\, \Psi_m^{(l)}(r, \theta, \varphi), \qquad (2.29)$$

где R, Θ, Φ — сферические координаты для трехмерного вектора $\mathbf{R} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Формула (2.29) впервые была опубликована в [129].

Легко показать, что решения, не принадлежащие нашему гильбертову пространству,

$$\Psi_m'^{(l)}(\rho, \theta, \varphi) = 4\pi i^l j_{-l-1}(\omega\rho)\, Y_l^m(\theta, \varphi), \qquad (2.30)$$

удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.12), (2.23), а следовательно, и любая их линейная комбинация $\alpha\Psi_m^{(l)} + \beta\Psi_m'^{(l)}$ также удовлетворяет этим рекуррентным соотношениям [122]. Таким образом, матричные элементы (2.13), (2.26) справедливы для всех этих базисных множеств, и формула разложения (2.29) имеет силу как для множества $\{\Psi_m'^{(l)}\}$, так и для базиса гильбертова пространства $\{\Psi_m^{(l)}\}$.

Определим с помощью нашей модели $L_2(S_2)$ спектральные разложения операторов, соответствующих системам 1—4 в табл. 14. Специфической особенностью этих систем является тот факт, что для них P_3 — диагональный оператор. Из (2.6) непосредственно следует, что ограниченный самосопряженный оператор $iP_3 = -\omega\cos\theta$ имеет непрерывный спектр, покрывающий отрезок $[-\omega, \omega]$, причем каждая точка этого отрезка имеет кратность, равную единице. Фиксируя собственное значение оператора iP_3, мы фиксируем координату θ. Оставшаяся координата φ все еще может меняться в интервале от $-\pi$ до π, пробегая при этом некоторую окружность в S_2. Оставшийся оператор симметрии второго порядка для каждой из систем 1—4 коммутирует с P_3; следовательно, функции на этих окружностях остаются инвариантными, и нам приходится иметь дело с одним из четырех случаев, исследованных нами в разд. 1.3. Повторяя рассуждения этого раздела, мы немедленно получаем следующие результаты.

1. Система декартовых координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(1)}_{\alpha,\gamma} = -\omega\cos(\gamma)\, f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, \quad iP_2 f^{(1)}_{\alpha,\gamma} = -\omega\sin(\gamma)\sin(\alpha)\, f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, \tag{2.31}$$

причем базисные собственные функции задаются соотношениями

$$\begin{gathered} f^{(1)}_{\alpha,\gamma}(\theta, \varphi) = \frac{\delta(\varphi-\alpha)\,\delta(\theta-\gamma)}{(\sin\gamma)^{1/2}}, \qquad -\pi \leqslant \alpha < \pi, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi, \\ \langle f^{(1)}_{\alpha,\gamma}, f^{(1)}_{\alpha',\gamma'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')\,\delta(\gamma-\gamma'). \end{gathered} \tag{2.32}$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца являются решениями типа плоской волны

$$\Psi^{(1)}_{\alpha,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(1)}_{\alpha,\gamma}\right) = (\sin\gamma)^{1/2}\exp\left[i\omega\left(x_1\sin\gamma\cos\alpha + x_2\sin\gamma\sin\alpha + x_3\cos\gamma\right)\right]. \tag{2.33}$$

2. Система цилиндрических координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(2)}_{n,\gamma} = -\omega\cos(\gamma) f^{(2)}_{n,\gamma}, \quad iJ_3 f^{(2)}_{n,\gamma} = n f^{(2)}_{n,\gamma}, \tag{2.34}$$

а базисные собственные функции задаются соотношениями

$$f^{(2)}_{n,\gamma}(\theta, \varphi) = \frac{e^{in\varphi}\delta(\gamma-\theta)}{(2\pi\sin\gamma)^{1/2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,$$
$$\langle f^{(2)}_{n,\gamma}, f^{(2)}_{n',\gamma'}\rangle = \delta_{nn'}\delta(\gamma-\gamma'). \tag{2.35}$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\Psi^{(2)}_{n,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(2)}_{n,\gamma}\right) = i^n (2\pi\sin\gamma)^{1/2} J_n(\omega\sin(\gamma) r) \times$$
$$\times \exp[i(n\varphi + \omega z\cos\gamma)], \tag{2.36}$$
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Это решения уравнения Гельмгольца типа *цилиндрической волны*.

3. Система координат параболического цилиндра

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} = -\omega\cos(\gamma) f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma}, \quad \{J_3, P_2\} f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} = 2\mu\omega\sin(\gamma) f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma} \tag{2.37}$$

а базисные собственные функции определяются соотношениями

$$f^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\theta, \varphi) = \begin{cases} (2\pi\sin\gamma)^{-1/2}(1+\cos\varphi)^{-i\mu/2-1/4} \times \\ \qquad \times (1-\cos\varphi)^{i\mu/2-1/4}\delta(\theta-\gamma), \\ \qquad 0 < \varphi < \pi, \\ 0, \qquad -\pi < \varphi < 0, \end{cases} \tag{2.38}$$
$$f^{(3)}_{\mu-,\gamma}(\theta, \varphi) = f^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\theta, -\varphi) \qquad -\infty < \mu < \infty, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,$$
$$\langle f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma}, f^{(3)}_{\mu'\pm,\gamma'}\rangle = \delta(\mu-\mu')\delta(\gamma-\gamma'), \quad \langle f^{(3)}_{\mu\pm,\gamma}, f^{(3)}_{\mu'\mp,\gamma'}\rangle = 0.$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\Psi^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(3)}_{\mu+,\gamma}\right) = \left(\frac{\sin\gamma}{2}\right)^{1/2} \sec(i\mu\pi) \times$$
$$\times [D_{i\mu-1/2}(\sigma\xi) D_{-i\mu-1/2}(\sigma\eta) + D_{i\mu-1/2}(-\sigma\xi) D_{-i\mu-1/2}(-\sigma\eta)] \times$$
$$\times e^{i\omega z\cos\gamma}, \tag{2.39}$$
$$\Psi^{(3)}_{\mu-,\gamma}(\xi, \eta, z) = \Psi^{(3)}_{\mu+,\gamma}(\xi, -\eta, z), \quad \sigma = e^{i\pi/4}(2\omega\sin\gamma)^{1/2},$$
$$x = (\xi^2 - \eta^2)/2, \quad y = \xi\eta, \quad z = z.$$

4. Система координат эллиптического цилиндра

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$iP_3 f^{(4)}_{nt,\gamma} = -\omega\cos(\gamma) f^{(4)}_{nt,\gamma}, \quad (J_3^2 + d^2P_1^2) f^{(4)}_{nt,\gamma} = \lambda_{nt} f^{(4)}_{nt,\gamma}, \quad t = s, c; \tag{2.40}$$

базисные собственные функции задаются соотношениями

$$\begin{aligned} f^{(4)}_{nc,\gamma}(\theta, \varphi) &= (\pi\sin\gamma)^{-1/2}\,\mathrm{ce}_n(\varphi, q)\,\delta(\theta-\gamma), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ f^{(4)}_{ns,\gamma}(\theta, \varphi) &= (\pi\sin\gamma)^{-1/2}\,\mathrm{se}_n(\varphi, q)\,\delta(\theta-\gamma), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ q &= (d^2\omega^2/4)\sin^2\gamma, \qquad 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Собственные значения $\lambda_{n\pm}$ дискретны, имеют кратность, равную единице, и связаны с собственными значениями a уравнения Матье (Б.25) соотношением $a = -\lambda - {}^1/_2 d^2\omega^2\sin^2\gamma$. Множество $\{f^{(4)}_{nt,\gamma}\}$ образует базис для $L_2(S_2)$, удовлетворяющий соотношению

$$\langle f^{(4)}_{nt,\gamma}, f^{(4)}_{n't',\gamma'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\delta(\gamma-\gamma'), \quad t, t' = s, c. \tag{2.42}$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(4)}_{nc,\gamma}(\mathbf{x}) &= C_n(\sin\gamma)^{1/2}\,\mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q)\exp[i\omega z\cos\gamma], \\ &\qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \Psi^{(4)}_{ns,\gamma}(\mathbf{x}) &= S_n(\sin\gamma)^{1/2}\,\mathrm{Se}_n(\alpha, q)\,\mathrm{se}_n(\beta, q)\exp[i\omega z\cos\gamma], \\ &\qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.43}$$

где Ce_n и Se_n — модифицированные функции Матье (см. уравнение (3.40) разд. 1.3), а C_n, S_n — константы, определяемые из интегральных уравнений $\Psi^{(4)}_{nt,\gamma} = I(f^{(4)}_{nt,\gamma})$. Координаты эллиптического цилиндра α, β, z задаются соотношениями

$$x = d\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta, \quad y = d\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta, \quad z = z.$$

Спектральные разложения для систем 6—10 были впервые описаны в работе [25]; система 11 была изучена раньше — см. [108]. Результаты для этих систем приводятся ниже.

6. Система координат вытянутого сфероида

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} - a^2P_1^2 - a^2P_2^2) f^{(6)}_{n,m} = -\lambda_n^m f^{(6)}_{n,m}, \quad iJ_3 f^{(6)}_{n,m} = m f^{(6)}_{n,m}, \tag{2.44}$$

а о. н. базис собственных функций определяется формулой

$$f^{(6)}_{n,m}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!\,4\pi}\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\theta, a^2\omega^2)\, e^{im\varphi}. \quad (2.45)$$

(Первое уравнение для собственных значений (2.44) превращается во второе уравнение (1.20).) В формуле (2.45) $n = 0, 1, 2, \ldots, m = n, n-1, \ldots, -n$, а через $\lambda_n^m(a^2\omega^2)$ обозначены дискретные собственные значения. В нормировке, принятой Мейкснером и Шефке [80], $\langle f^{(6)}_{n,m}, f^{(6)}_{n',m'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}$ Функции сфероидальных волн часто даются в виде их разложений по присоединенным функциям Лежандра:

$$Ps_n^{|m|}(x, a^2\omega^2) = \sum_{2k \geqslant |m|-n} (-1)^k a^{|m|}_{n,2k}(a^2\omega^2) P^{|m|}_{n+2k}(x) \quad (2.46)$$

(см. [7]). В самом деле, подставляя (2.46) в уравнение сфероидальной волны, легко получить рекуррентную формулу для коэффициентов $a^m_{n,2k}$.

Соответствующий базис для решений уравнения Гельмгольца имеет вид

$$\Psi^{(6)}_{n,m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(6)}_{n,m}\right) = C^m_n(a^2\omega^2)\, Ps_n^{|m|}(\operatorname{ch}\eta, a^2\omega^2) \times$$
$$\times Ps_n^{|m|}(\cos\alpha, a^2\omega^2)\, e^{im\varphi}, \quad (2.47)$$

где $C^m_n(a^2\omega^2)$ — константа, определяемая из интегрального уравнения. Этот результат легко получается из того факта, что $\Psi^{(6)}_{n,m}$ разделяется в координатах

$$x = a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sh}\eta\sin\alpha\sin\varphi, \quad z = a\operatorname{ch}\eta\cos\alpha.$$

(См. соответствующее доказательство формулы (3.38) в разд. 1.3.)

7. Система координат сплющенного сфероида

Уравнения на собственные значения записываются в виде

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} + a^2P_1^2 + a^2P_2^2\right) f^{(7)}_{n,m} = -\lambda^m_n f^{(7)}_{n,m}, \quad iJ_3 f^{(7)}_{n,m} = m f^{(7)}_{n,m}; \quad (2.48)$$

о. н. базис собственных функций определяется соотношением

$$f^{(7)}_{n,m}(\theta, \varphi) = \left[\frac{(n-|m|)!\,(2n+1)}{(n+|m|)!\,4\pi}\right]^{1/2} Ps_n^{|m|}(\cos\theta, -a^2\omega^2)\, e^{im\varphi}, \quad (2.49)$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = n, n-1, \ldots, -n.$$

(Здесь первое уравнение для собственных значений (2.48) превращается во второе уравнение (1.22).) Дискретные собственные значения обозначаются через $\lambda_n^{|m|}(-a^2\omega^2)$.

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца даются формулой

$$\Psi^{(7)}_{n,m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(7)}_{n,m}\right) = \\ = C^m_n\left(a^2\omega^2\right) Ps^{|m|}_n\left(-i\,\mathrm{sh}\,\eta,\ a^2\omega^2\right) \times \\ \times Ps^{|m|}_n\left(\cos\alpha,\ -a^2\omega^2\right) e^{im\varphi}, \quad (2.50)$$

где $C^m_n\left(a^2\omega^2\right)$ — константа, определяемая из интегрального уравнения, и

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\alpha\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\alpha\sin\varphi, \quad z = a\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\alpha.$$

8. Система параболических координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\left(\{J_1,\ P_2\} - \{J_2,\ P_1\}\right) f^{(8)}_{\lambda,m} = 2\lambda\omega f^{(8)}_{\lambda,m}, \quad iJ_3 f^{(8)}_{\lambda,m} = m f^{(8)}_{\lambda,m}. \quad (2.51)$$

Здесь $\{J_1, P_2\} - \{J_2, P_1\} = 2i\omega(\cos\theta + \sin\theta\partial_\theta)$ — оператор первого порядка, имеющий единственное самосопряженное расширение. Собственные функции определяются соотношением

$$f^{(8)}_{\lambda,m}(\theta,\ \varphi) = (2\pi)^{-1}\frac{[\mathrm{tg}\,(\theta/2)]^{-i\lambda}}{\sin\theta}e^{im\varphi}, \\ m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots, \quad -\infty < \lambda < \infty, \\ \left\langle f^{(8)}_{\lambda,m},\ f^{(8)}_{\lambda',m'}\right\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\,\delta_{mm'}. \quad (2.52)$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца находятся по формуле

$$\Psi^{(8)}_{\lambda,m}(\mathbf{x}) = I\left(f^{(8)}_{\lambda,m}\right) = \frac{i^m\sqrt{2}}{\xi\eta\omega}\Gamma\left(\frac{1-m+i\lambda}{2}\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1-m-i\lambda}{2}\right)\mathcal{M}_{i\lambda/2,\,-m/2}\left[\frac{\exp(-i\pi/2)\,\omega\xi^2}{\sqrt{2}}\right] \times \\ \times \mathcal{M}_{i\lambda/2,\,-m/2}\left[\frac{\exp(i\pi/2)\,\omega\eta^2}{\sqrt{2}}\right]\exp(im\varphi), \quad (2.53)$$

причем

$$\mathcal{M}_{\alpha,\mu/2}(z) = \frac{z^{(1+\mu)/2}e^{-z/2}}{\Gamma(1+\mu)}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}(1+\mu)/2-\alpha\\ 1+\mu\end{matrix}\middle|\, z\right) \quad (2.54)$$

является функцией Уиттекера [29] и

$$x = \xi\eta\cos\varphi, \quad y = \xi\eta\sin\varphi, \quad z = (\xi^2 - \eta^2)/2.$$

9. Система параболоидальных координат

Уравнения на собственные значения имеют вид

$$\begin{gathered}\left(J_3^2 - c^2P_3^2 + c\{J_2, P_1\} + c\{J_1, P_2\}\right) f_{nt\lambda}^{(9)} = -\mu_{n\pm} f_{nt\lambda}^{(9)}, \\ \left(cP_2^2 - cP_1^2 + \{J_2, P_1\} - \{J_1, P_2\}\right) f_{nt\lambda}^{(9)} = 2\omega\lambda f_{nt\lambda}^{(9)},\end{gathered} \tag{2.55}$$

а базис собственных функций определяется следующим образом:

$$f_{nt\lambda}^{(9)}(\theta, \varphi) = (2\pi)^{-1/2} \frac{[\operatorname{tg}(\theta/2)]^{i\lambda}}{\sin\theta} \exp\left(-\frac{ic\omega}{2}\cos\theta\cos 2\varphi\right) \times$$

$$\times \begin{cases} gc_n(\varphi;\ 2c\omega,\ \lambda) \\ gs_n(\varphi;\ 2c\omega,\ \lambda) \end{cases}, \qquad t = c,\ s,\quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{2.56}$$

где gc_n и gs_n — соответственно четные и нечетные неполиномиальные решения уравнения Уиттекера — Хилла. Используемая здесь нормировка этих функций заимствована у Урвина и Арскотта [127]. Мы имеем

$$\langle f_{nt\lambda}^{(9)}, f_{n't'\lambda'}^{(9)} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{tt'}\delta(\lambda - \lambda').$$

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца определяются по формуле

$$\Psi_{nt\lambda}^{(9)}(\mathbf{x}) = K_n^t(\omega c,\ \lambda)\, gt_n(\beta;\ 2c\omega,\ \lambda)\, gt_n(i\alpha;\ 2c\omega,\ \lambda) \times$$

$$\times gt_n(i\gamma + \pi/2;\ 2c\omega,\ \lambda), \qquad t = s,\ c, \tag{2.57}$$

где константы K_n^t находятся из интегрального уравнения $\Psi_{nt\lambda}^{(9)} = I\left(f_{nt\lambda}^{(9)}\right)$. Для данной системы

$$x = 2c\operatorname{ch}\alpha\cos\beta\operatorname{sh}\gamma, \quad y = 2c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta\operatorname{ch}\gamma,$$
$$z = c(\operatorname{ch}2\alpha + \cos 2\beta - \operatorname{ch}2\gamma)/2.$$

10. Система эллипсоидальных координат

Возьмем эллиптические координаты на единичной сфере:

$$k_1 = \left[\frac{(s-a)(t-a)}{a(a-1)}\right]^{1/2}, \quad k_2 = \left[\frac{(s-1)(t-1)}{1-a}\right]^{1/2} \quad k_3 = \left[\frac{st}{a}\right]^{1/2},$$
$$0 < t < 1 < s < a. \tag{2.58}$$

Тогда уравнения на собственные значения

$$Sf = \lambda f, \quad S'f = \mu f, \quad S = P_1^2 + aP_2^2 + (a+1)P_3^2 + \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}, \tag{2.59}$$
$$S' = J_2^2 + aJ_1^2 + aP_3^2,$$

принимают вид

$$\left[\frac{4}{s-t}(\partial_{\alpha\alpha}+\partial_{\beta\beta})-\omega^2(s+t)-\omega^2(1+a)\right]f=\lambda f,$$
$$\left[\frac{4}{s-t}(t\partial_{\alpha\alpha}+s\partial_{\beta\beta})-\omega^2 st\right]f=\mu f, \tag{2.60}$$

где

$$\partial_\alpha=[(a-s)(s-1)s]^{1/2}\partial_s,\quad \partial_\beta=[(t-a)(t-1)t]^{1/2}\partial_t.$$

Можно найти решения этих уравнений вида $f(s,t)=E_1(s)E_2(t)$, где

$$(4\partial_{\alpha\alpha}-\omega^2s^2+\lambda's+\mu)E_1(s)=0,$$
$$(4\partial_{\beta\beta}+\omega^2t^2-\lambda't-\mu)E_2(t)=0,\quad \lambda'=-\omega^2(1+a)-\lambda. \tag{2.61}$$

Эти выражения являются алгебраическими формами уравнения эллипсоидальной волны (см. (1.29)); следовательно, E_j — эллипсоидальные функции. Кроме того, если положить $s=\operatorname{sn}^2(\eta,k)$, $t=\operatorname{sn}^2(\psi,k)$, где $k=a^{-1/2}$, то уравнения с разделенными переменными будут иметь форму Якоби

$$(\partial_{\xi\xi}-k^2\mu-k^2\lambda'\operatorname{sn}^2\xi+k^2\omega^2\operatorname{sn}^4\xi)E_j(\xi)=0,\quad \xi=\eta,\ \psi,\quad j=1,2, \tag{2.62}$$

уравнения эллипсоидальной волны (1.33). Новые координаты η, ψ обладают также тем свойством, что они допускают параметризацию не только первого октанта сферы S_2, но и всей этой сферы. В самом деле,

$$k_1=(k')^{-1}\operatorname{dn}(\eta,k)\operatorname{dn}(\psi,k),\quad k_2=ik(k')^{-1}\operatorname{cn}(\eta,k)\operatorname{cn}(\psi,k),$$
$$k_3=k\operatorname{sn}(\eta,k)\operatorname{sn}(\psi,k),\quad k'=(1-k^2)^{1/2}, \tag{2.63}$$

и эти координаты покрывают S_2 в точности один раз, если η меняется в пределах $-2K<\eta<2K$, а $\psi\in[K,K+2iK')$, где $K=K(k)$ дается соотношением (B.3) и $K'=K(k')$.

Поскольку k_1, k_2 и k_3 не меняются при прибавлении к η или к ψ целых кратных $4K$ и $4iK'$, нас интересуют только те однозначные решения E_j уравнения (2.62), которые остаются фиксированными при этих преобразованиях, т. е. решения

$$E_j(\xi+4Kn+4iK'n)=E_j(\xi),\quad n,m\text{ — целые числа.}$$

Как уже было указано в предыдущем разделе, эти двоякопериодические функции называются функциями эллипсоидальной волны. Подробный анализ этих функций был проведен Арскоттом [7]. Спектр операторов S и S' дискретный, каждая пара собственных значений обозначается через λ_{nm}, μ_{nm}. Соответствующие функции эллипсоидальной волны обозначаются через $\mathrm{el}_n^m(\xi)$, $\xi=\eta,\psi$, а собственные функции операторов S и S' —

через

$$f_{nm}^{(10)}(\eta, \psi) = \mathrm{el}\, p_n^m(\eta, \psi) = \mathrm{el}_n^m(\eta)\, \mathrm{el}_n^m(\psi), \tag{2.64}$$

где $n = 0, 1, \ldots$, а целое m принимает $2n+1$ значений. Предположим, что $\{\mathrm{el}\, p_n^m\}$ — о. н. базис:

$$\langle \mathrm{el}\, p_n^m, \mathrm{el}\, p_{n'}^{m'} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

(Такой выбор базиса определяет решения (2.64) лишь с точностью до некоторого множителя, по абсолютной величине равного единице. По существу, единственная нормировка дана в [7]. Заметим также, что $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = ik^2(\mathrm{sn}^2\eta - \mathrm{sn}^2\psi)\, d\eta d\psi$.) В общем случае эти функции довольно трудно поддаются изучению, и относительно их структуры известно очень мало.

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца $\Psi_{nm}^{(10)}(\mathbf{x}) = I(f_{nm}^{(10)})$ имеют вид

$$\Psi_{nm}^{(10)}(\mathbf{x}) = \mathrm{El}_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = K_n^m(\omega, k)\, \mathrm{el}_n^m(\alpha)\, \mathrm{el}_n^m(\beta)\, \mathrm{el}_n^m(\gamma), \tag{2.65}$$

где константа K_n^m находится из нетривиального соотношения

$$\begin{aligned}\mathrm{El}_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = \iint\limits_{S_2} \exp\Big[w\Big(&-\frac{1}{k(k')^2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\psi + \\ &+ \frac{k^2}{(k')^2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{cn}\,\psi + \\ &+ ik^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,\psi\Big)\Big]\mathrm{el}\, p(\eta, \psi)\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}),\end{aligned} \tag{2.66}$$

в котором произведение трех функций эллипсоидальной волны представлено в виде интеграла от произведения двух таких функций. Координаты α, β, γ связаны с x, y, z соотношениями (1.32). Интеграл (2.66) мы могли вычислить с точностью до некоторого постоянного множителя, так как заранее известно, что он разделяется в переменных α, β, γ.

3.3. Многочлены и функции Ламе на сфере

Несмотря на свою сложность, задача на собственные значения, соответствующая системе конических координат 11 (см. табл. 14), представляет особый интерес. Только для конических и сферических координат задача на собственные значения становится конечномерной, т. е. только в этих двух случаях эта задача сводится к нахождению собственных значений $(n \times n)$-матрицы.

Для функций f на сфере S_2 уравнения на собственные зна-