через

$$f_{nm}^{(10)}(\eta, \psi) = \mathrm{el}\, p_n^m(\eta, \psi) = \mathrm{el}_n^m(\eta)\, \mathrm{el}_n^m(\psi), \tag{2.64}$$

где $n = 0, 1, \ldots$, а целое m принимает $2n+1$ значений. Предположим, что $\{\mathrm{el}\, p_n^m\}$ — о. н. базис:

$$\langle \mathrm{el}\, p_n^m, \mathrm{el}\, p_{n'}^{m'} \rangle = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

(Такой выбор базиса определяет решения (2.64) лишь с точностью до некоторого множителя, по абсолютной величине равного единице. По существу, единственная нормировка дана в [7]. Заметим также, что $d\Omega(\hat{\mathbf{k}}) = ik^2(\mathrm{sn}^2\eta - \mathrm{sn}^2\psi)\, d\eta d\psi$.) В общем случае эти функции довольно трудно поддаются изучению, и относительно их структуры известно очень мало.

Соответствующие решения уравнения Гельмгольца $\Psi_{nm}^{(10)}(\mathbf{x}) = I(f_{nm}^{(10)})$ имеют вид

$$\Psi_{nm}^{(10)}(\mathbf{x}) = \mathrm{El}_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = K_n^m(\omega, k)\, \mathrm{el}_n^m(\alpha)\, \mathrm{el}_n^m(\beta)\, \mathrm{el}_n^m(\gamma), \tag{2.65}$$

где константа K_n^m находится из нетривиального соотношения

$$\mathrm{El}_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = \iint\limits_{S_2} \exp\Big[w\Big(-\frac{1}{k(k')^2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma\,\mathrm{dn}\,\eta\,\mathrm{dn}\,\psi + \frac{k^2}{(k')^2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\mathrm{cn}\,\eta\,\mathrm{cn}\,\psi + ik^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,\psi\Big)\Big]\mathrm{el}\, p(\eta, \psi)\, d\Omega(\hat{\mathbf{k}}), \tag{2.66}$$

в котором произведение трех функций эллипсоидальной волны представлено в виде интеграла от произведения двух таких функций. Координаты α, β, γ связаны с x, y, z соотношениями (1.32). Интеграл (2.66) мы могли вычислить с точностью до некоторого постоянного множителя, так как заранее известно, что он разделяется в переменных α, β, γ.

3.3. Многочлены и функции Ламе на сфере

Несмотря на свою сложность, задача на собственные значения, соответствующая системе конических координат 11 (см. табл. 14), представляет особый интерес. Только для конических и сферических координат задача на собственные значения становится конечномерной, т. е. только в этих двух случаях эта задача сводится к нахождению собственных значений $(n \times n)$-матрицы.

Для функций f на сфере S_2 уравнения на собственные зна-

чения, соответствующие системе 11 в табл. 14, имеют вид

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}f=-l(l+1)f, \quad (J_1^2+bJ_2^2)f=\lambda f, \qquad 1>b>0. \quad (3.1)$$

Из (2.19) следует, что

$$L_2(S_2)\cong\sum_{l=0}^{\infty}\oplus V_l,$$

где $\dim V_l=2l+1$ и V_l — пространство неприводимого представления D группы SO_3. Таким образом, $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ имеет спектр $-l(l+1)$, $l=0, 1, 2, \ldots$, причем кратность каждого собственного значения равна $2l+1$. Поскольку $S=\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$ и $S'=J_1^2+bJ_2^2$ коммутируют, отсюда следует, что относительно второго оператора подпространства V_l инвариантны. Следовательно, наши поиски собственных значений оператора S' можно ограничить $(2l+1)$-мерным пространством V_l. Это пространство имеет о. н. базис $\{f_m^l\}$ (см. (2.12)), и ограничение оператора S' на пространство V_l можно описать при помощи вещественной симметрической $[(2l+1)\times(2l+1)]$-матрицы $\mathscr{S}'$ в базисе $\{f_m^l\}$. Таким образом, $2l+1$ собственных значений матрицы $\mathscr{S}'$ являются собственными значениями оператора S' в V_l.

Существует и иной взгляд на эту проблему. Элементы h пространства V_l являются решениями дифференциального уравнения в частных производных $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}h=-l(l+1)h$ (см. уравнение (2.20)). Легко показать, что алгебра симметрии $so(3)$ этого уравнения трехмерна (единичная симметрия E игнорируется) и имеет базис $\{J_1, J_2, J_3\}$; см. формулы (2.6). Соответствующей группой симметрии является $SO(3)$. Пространство $\mathscr{S}^{(2)}/\mathfrak{q}$ операторов симметрии второго порядка, по модулю кратных $\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$, пятимерно и имеет базис $J_2^2, J_3^2, \{J_1, J_2\}, \{J_1, J_3\}, \{J_2, J_3\}$. В результате сопряженного действия группы $SO(3)$ это пространство разбивается на два типа орбит: тип орбит с представителем J_3^2 и тип орбит с представителем $J_1^2+bJ_2^2$, $1>b>0$. Кроме того, известно, что дифференциальное уравнение (2.20) для оператора Лапласа на S_2 допускает разделение переменных точно в двух системах координат [108]. Одной из этих систем является система сферических координат $\{\theta, \varphi\}$, в которой мы с самого начала записали уравнение (2.20) и которая соответствует диагонализации оператора J_3^2. Второй системой является система эллиптических координат $\{s, t\}$ (см. (2.58)), которая соответствует диагонализации оператора $J_1^2+bJ_2^2$. Теоретико-групповой подход к анализу системы эллиптических координат был впервые предложен в работе [108] (см. также [57]).

С какой бы точки зрения мы ни подходили к анализу этой

системы, мы должны вычислить матрицу $\mathscr{S}'$ оператора

$$S' = J_1^2 + bJ_2^2 = {}^1/_4(b-1)\left((J^+)^2 + (J^-)^2\right) + {}^1/_2(b+1)\left((J^0)^2 - l(l+1)\right)$$

в базисе $\{f_m^{(l)}\}$ и найти $2l+1$ собственных значений λ этой матрицы. Как известно [68], эта задача эквивалентна нахождению корней характеристического уравнения

$$\det(\mathscr{S}' - \lambda\mathscr{E}) = 0, \tag{3.2}$$

где $\mathscr{E}$ является единичной $[(2l+1)\times(2l+1)]$-матрицей. Как показано в [108], при $l \leqslant 7$ собственные значения λ можно найти в явном виде как корни многочленов не выше четвертого порядка. Однако при $l \geqslant 8$ порядок многочленов выше четырех, и поэтому приближенные значения корней следует находить численными методами.

Для классификации этих собственных значений можно воспользоваться теорией групп. Заметим, что как уравнение Гельмгольца (1.1), так и уравнение Лапласа на сфере (2.20) инвариантны относительно полной группы поворотов $O(3)$. (Эта группа порождается группой $SO(3)$ и оператором инверсии пространства P: $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$. Матричной реализацией этой группы является группа всех вещественных (3×3)-матриц A, таких, что $AA^t = E_3$. Для этой группы $\det A = \pm 1$ и $\det A = +1$ тогда и только тогда, когда $A \in SO(3)$.) Элементы группы $O(3)$, не принадлежащие группе $SO(3)$ (поворотов и инверсий), отграничены от единицы, и их нельзя получить вычислением экспонент элементов алгебры Ли $so(3)$. Существование этих симметрий инверсии доказывается прямым вычислением.

Кроме оператора P, нас должны интересовать следующие операторы:

Z: $(x, y, z) \to (x, y, -z)$, отражение относительно плоскости (x, y);
X: $(x, y, z) \to (-x, y, z)$, отражение относительно плоскости (y, z);
Y: $(x, y, z) \to (x, -y, z)$, отражение относительно плоскости (x, z).

Перенося при помощи (2.1) действие этих операторов на сферу, мы получаем

$$Ph(\hat{\mathbf{k}}) = h(-\hat{\mathbf{k}}), \qquad Zh(\hat{\mathbf{k}}) = h(k_1, k_2, -k_3), \tag{3.3}$$
$$Xh(\hat{\mathbf{k}}) = h(-k_1, k_2, k_3),\ Yh(\hat{\mathbf{k}}) = h(k_1, -k_2, k_3),\ h \in L_2(S_2).$$

Очевидно, что квадрат каждого из коммутирующих операторов P, Z, X, Y является единичным оператором E и что все эти операторы самосопряжены. Кроме того, каждый из этих операторов коммутирует с $S' = J_1^2 + bJ_2^2$ и $S = \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}$. Отсюда следует, что существует о.н. базис для V_l, состоящий из общих собственных векторов операторов P, Z, X, Y и S'.

Возможными собственными значениями операторов $P, \ldots, Y$

являются ± 1. Для определения кратности этих собственных значений на V_l применим операторы (3.3) к явному базису $\{f_m^{(l)}(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)\}$; см. (2.22). В результате получаем

$$\begin{aligned} Pf_m^{(l)} &= (-1)^l f_m^{(l)}, & Zf_m^{(l)} &= (-1)^{l-m} f_m^{(l)}, \\ Xf_m^{(l)} &= f_{-m}^{(l)}, & Yf_m^{(l)} &= (-1)^m f_{-m}^{(l)}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заметим, что на V_l имеет место соотношение $P = (-1)^l E$. Чтобы определить кратности остальных собственных пространств, определим собственные пространства

$$\mathscr{C}_l^{pq} = \{h \in V_l\colon\ Xh = ph, \quad XYh = qh\}, \quad p, q = \pm 1, \tag{3.5}$$

и положим $n_l^{pq} = \dim \mathscr{C}_l^{pq}$. Поскольку $Y = X(XY)$ и $Z = XYP$, мы имеем

$$Ph = (-1)^l h, \quad Zh = (-1)^l qh, \quad Xh = ph, \quad Yh = pqh \tag{3.6}$$

для любого $h \in \mathscr{C}_l^{pq}$. Кроме того,

$$V_l = \mathscr{C}_l^{++} \oplus \mathscr{C}_l^{+-} \oplus \mathscr{C}_l^{-+} \oplus \mathscr{C}_l^{--}.$$

Используя (3.4), можно определить размерности этих собственных пространств. Результаты вычислений представлены в табл. 15.

Таблица 15

РАЗМЕРНОСТИ n_l^{pq} СОБСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ $\mathscr{C}_l^{pq}$

	n_l^{++}	n_l^{+-}	n_l^{-+}	n_l^{--}
l четное	$1 + l/2$	$l/2$	$l/2$	$l/2$
l нечетное	$(1 + l)/2$	$(1 + l)/2$	$(-1 + l)/2$	$(1 + l)/2$

Поскольку каждое собственное пространство инвариантно относительно S', собственные функции оператора S' можно классифицировать по их свойствам симметрии относительно операторов X и XY. Следовательно, о. н. базис для V_l, обозначаемый через $\{f_\lambda^{pq}\}$, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} f_\lambda^{pq} &= -l(l+1) f_\lambda^{pq}, \quad (J_1^2 + bJ_2^2) f_\lambda^{pq} = \lambda f_\lambda^{pq}, \\ Xf_\lambda^{pq} &= pf_\lambda^{pq}, \quad XYf_\lambda^{pq} = qf_\lambda^{pq}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

(Можно показать, что вырождение отсутствует, т. е. что при фиксированных l, p, q, λ не существует двух линейно независимых решений уравнений (3.7).)

В эллиптических координатах на сфере (см. (2.63)) уравнения для собственных значений (3.1) разделяются и сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$E_j''(\xi) + (\lambda - l(l+1)k^2 \operatorname{sn}^2 \xi) E_j(\xi) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \xi = \eta, \psi, \quad k = b^{1/2} \tag{3.8}$$

где $f(\eta, \psi) = E_1(\eta) E_2(\psi)$. Как уже было указано при обсуждении уравнений (1.35), уравнение (3.8) является уравнением Ламе. Оно имеет $2l+1$ линейно независимых решений (многочлены Ламе), однозначных на S_2, причем каждое из них можно представить в виде

$$\operatorname{sn}^s \xi \operatorname{cn}^c \xi \operatorname{dn}^d \xi F_p(\operatorname{sn}^2 \xi), \quad s, c, d = 0, 1, \quad s + c + d + 2p = l, \tag{3.9}$$

где $F_p(z)$ — многочлен от z порядка p. Восемь типов таких многочленов соответствуют восьми случаям, перечисленным в табл. 15. Поскольку кратность каждого собственного пространства равна единице, собственные функции должны принимать вид $E(\eta)E(\psi)$, где $E(z)$ — многочлен Ламе.

До того как мы продолжим наш анализ оператора S' на $L_2(S_2)$, исследуем более простую модель от одной переменной спектрального разложения оператора S'. Возьмем $(2l+1)$-мерное пространство W_l многочленов $g(z)$ от комплексной переменной z, имеющих порядок не выше $2l$. Введем скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на W_l, такое, что

$$(z^{l-m}, z^{l-n}) = (l-m)!\,(l+m)!\,\delta_{mn}, \quad m, n = l, l-1, \ldots, -l, \tag{3.10}$$

или — в развернутом виде —

$$(2l+1)!\,(g_1, g_2) = \pi^{-1} \iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,(1 + |z|^2)^{-2l-2} g_1(z)\,\bar{g}_2(z) =$$

$$= \pi^{-1} \int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi\,(1+r^2)^{-2l-2} g_1(re^{i\varphi})\,\bar{g}_2(re^{i\varphi}) \tag{3.11}$$

для $g_j \in W_l$, причем $z = x + iy = re^{i\varphi}$, а областью интегрирования является вся комплексная плоскость. Пространство W_l инвариантно относительно операторов J_1, J_2, J_3, определяемых соотношениями

$$J_1 = -\frac{i}{2}(1-z^2)\frac{d}{dz} - ilz, \quad J_2 = \frac{1}{2}(1+z^2)\frac{d}{dz} - lz,$$
$$J_3 = -iz\frac{d}{dz} + il \tag{3.12}$$

и удовлетворяющих соотношениям коммутирования $[J_j, J_k] = \sum_p \varepsilon_{jkp} J_p$ алгебры $so(3)$. Кроме того, для этой модели $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} =$

$= -l(l+1)$. Каждой функции $g \in W_l$ соответствует функция $G \in V_l$, которую мы находим из соотношений

$$G(\hat{\mathbf{k}}) = (g, H(\hat{\mathbf{k}}, \cdot)) = I'(g),$$
$$H(\hat{\mathbf{k}}, z) = (l!)^{-1}[(2l+1)/4\pi]^{1/2}[k_1(1-z^2)/2 + ik_2(1+z^2)/2 + k_3 z]^l, \tag{3.13}$$

где $\hat{\mathbf{k}} \in S_2$. Оператор I' из W_l в V_l унитарен. В самом деле, из (3.10) следует, что

$$g_m^l(z) = \frac{z^{l+m}}{[(l+m)!\,(l-m)!]^{1/2}}, \qquad m = l, l-1, \ldots, -l, \tag{3.14}$$

является о. н. базисом для W_l. Поскольку

$$\overline{H}(\hat{\mathbf{k}}, z) = \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \psi)\, g_m^{-l}(z) \tag{3.15}$$

(теоретико-групповое доказательство этого равенства см. в [37]), для $\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)$ мы имеем

$$I'(g_m^l) = Y_l^m(\theta, \varphi) = f_m^l, \tag{3.16}$$

где сферические гармоники Y_l^m образуют о. н. базис пространства V_l. Из (2.12) и (2.22) следует, что операторы (3.12), действуя на W_l, индуцируют операторы (2.6) на V_l:

$$J_j G(\hat{\mathbf{k}}) = I'(J_j g(z)), \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения для S' на W_l, которая имеет вид $(J_1^2 + bJ_2^2)\, g(z) = \lambda g(z)$. Мы находим

$$S' = [(1-k)z^2 - (1+k)][(1+k)z^2 - (1-k)]\frac{d^2}{dz^2} +$$
$$+ 2(2l-1)z[1+k^2 - z^2(1-k^2)]\frac{d}{dz} +$$
$$+ 2l[1+k^2 + (1-k^2)(2l-1)z^2], \quad k = b^{1/2}.$$

Если положить $g(z) = (k')^l[(\alpha - z^2)(1-\alpha z^2)]^{l/2}\mathcal{G}(w)$, где $k' = (1-k^2)^{1/2}$, $\alpha = (1+k)/(1-k)$, и произвести замену переменной

$$\mathrm{sn}(w, k) = -i(1+\alpha)z[(\alpha - z^2)(1-\alpha z^2)]^{-1/2}, \tag{3.18}$$

то наше уравнение для собственных значений примет вид уравнения Ламе:

$$\left[\frac{d^2}{dw^2} + \lambda - k^2 l(l+1)\,\mathrm{sn}^2(w, k)\right]\mathcal{G}(w) = 0. \tag{3.19}$$

Из (3.9) следует, что $2l+1$ многочленов Ламе, являющихся решениями этого уравнения, являются в точности решениями.

Таблица 16

КЛАССЫ СИММЕТРИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАМЕ

$\mathrm{sn}^s w\, \mathrm{cn}^c w\, \mathrm{dn}^d w F_\rho(\mathrm{sn}^2 w)$, $s, c, d = 0,1$ $\quad s+c+d+2\rho = l$

	(p, q)	s	c	d	Размерность n_l^{pq}
l четное	+, +	0	0	0	$1 + l/2$
	+, −	1	1	0	$l/2$
	−, +	0	1	1	$l/2$
	−, −	1	0	1	$l/2$
l нечетное	+, +	1	0	0	$(1 + l)/2$
	+, −	0	1	0	$(1 + l)/2$
	−, +	1	1	1	$(-1 + l)/2$
	−, −	0	0	1	$(1 + l)/2$

которые соответствуют элементам $g(z) \in W_l$. Выясним, каким образом разбиение многочленов Ламе на восемь типов будет представлено в нашей новой модели. Из (3.4), (3.14) и (3.16) следует, что X и XY на W_l принимают вид

$$Xg(z) = z^{2l} g(z^{-1}), \quad XYg(z) = (-1)^l g(-z) \tag{3.20}$$

для $g \in W_l$.

Так же как и при рассмотрении собственных пространств $\mathscr{E}_l^{pq}$ пространства V_l (см. (3.5), (3.6)), можно потребовать, чтобы собственные функции $g(z) = (k')^l [(\alpha - z^2)(1 - \alpha z^2)]^{l/2} \mathscr{G}(w)$ тоже удовлетворяли уравнениям $Xg = pg$, $XYg = qg$, $p, q = \pm 1$. Используя эти соотношения совместно с (3.9) и табл. 15, мы получаем соотношения, связывающие показатели s, c, d в (3.9) и собственные значения p, q, перечисленные в табл. 16. Как показано в [7, гл. 9], многочлены Ламе в каждом классе симметрии можно снабдить целочисленным индексом $n = 0, 1, \ldots, n_l^{pq} - 1$, причем n — это число нулей многочлена в интервале $0 < w < K(k)$. Чтобы получить рекуррентные соотношения для коэффициентов многочлена $F_\rho(\mathrm{sn}^2 w)$, следует подставить в (3.19) выражения (3.9) и приравнять коэффициенты при независимых мономах эллиптических функций $\mathrm{sn}^s w\, \mathrm{cn}^c w\, \mathrm{dn}^d w\, \mathrm{sn}^{2j} w$. Полиномиальные решения получаются тогда и только тогда, когда λ является одним из $2l + 1$ различных собственных значений λ_{ln}^{pq}.

Мы показали, что эти собственные значения можно получить двумя различными способами: либо традиционным способом, отыскивая полиномиальные решения уравнения Ламе, как описано в работе Арскотта [7], либо решая характеристическое уравнение (3.2). При втором способе мы определяем в явном

виде матрицу $\mathscr{S}'$ относительно о. н. базиса $\{f_m^{(l)}\}$. Таким образом, если найдено некоторое собственное значение, то соответствующий собственный вектор $f_{\lambda n}^{pq}$ можно выразить через коэффициенты $a_{n,m}^{pq}$ его разложения по элементам базиса $\{f_m^{(l)}\}$:

$$f_n^{pq} = \sum_m a_{n,m}^{pq} f_m^{(l)}. \tag{3.21}$$

(На практике для этих коэффициентов можно получить трехчленные рекуррентные формулы; см. [108].) С другой стороны, традиционный подход к решению уравнения Ламе дает трехчленные рекуррентные формулы для коэффициентов многочлена $F_\rho(\mathrm{sn}^2 w) = \sum_{j=0}^{\rho} b_j \mathrm{sn}^{2j} w$. Коэффициенты $a_{n,m}^{pq}$ представляют для нас особый интерес, так как они определяют матричные элементы смешанного базиса: базиса Ламе $\{f_n^{pq}\}$ и канонического базиса $\{f_m^{(l)}\}$. В литературе же, посвященной многочленам Ламе, даются таблицы только коэффициентов b_k.

При помощи нашей модели W_l можно получить соотношения, связывающие эти коэффициенты. Пусть $\{\Lambda_n^{pql}(z)\}$ — о. н. базис для W_l, который состоит из собственных функций оператора S', классифицированных по типу симметрии и числу нулей. Тогда из (3.21) вытекает, что

$$\Lambda_n^{pql}(z) = \sum_m a_{n,m}^{pq} g_m^{(l)} = \sum_m a_{n,m}^{pq} z^{l+m} [(l+m)!\,(l-m)!]^{-1/2}, \tag{3.22}$$

т. е. эти м. э. с. б. являются, по существу, коэффициентами при z^{l+m}, $-l \leqslant m \leqslant l$. С другой стороны,

$$\Lambda_n^{pql}(z) = (k')^l [(\alpha - z^2)(1 - \alpha z^2)]^{l/2} \mathrm{sn}^s w \,\mathrm{cn}^c w \,\mathrm{dn}^d w \sum_{j=0}^{\rho} b_j \mathrm{sn}^{2j} w, \tag{3.23}$$

где w связано с z соотношением (3.18). Разлагая (3.23) в степенной ряд по z и приравнивая коэффициенты при z^{l+m} в (3.22) и (3.23), каждый коэффициент $a_{m,n}^{pq}$ можно представить в виде конечной суммы коэффициентов b_j. С некоторыми деталями такого вычисления можно ознакомиться в [57].

Используя преобразование (3.13), полученные нами результаты можно отобразить в V_l. Если $\{\Lambda_n^{pql}\}$ — о. н. базис собственных функций оператора S' на W_l, то

$$f_{ln}^{pq} = c_{ln}^{pq} E_{ln}^{p,q}(\eta) E_{ln}^{p,q}(\psi) = I'\left(\Lambda_n^{pql}\right) = \left(\Lambda_n^{pql}, H(\hat{\mathbf{k}}, \cdot)\right), \tag{3.24}$$

где η, ψ — эллиптические координаты на S_2 (см. (2.63)), является о. н. базисом собственных функций оператора S' на V_l. В фор-

муле (3.24) $E_{ln}^{p,q}(\xi)$ — многочлен Ламе, отвечающий тому же собственному значению и тому же типу симметрии, что и Λ_n^{pql}. Поскольку явная нормировка $E_{ln}^{p,q}$ и Λ_n^{pql} фиксирована, константа c определяется из двойного интеграла. (Интеграл в (3.24) вычисляется, так как нам заранее известно, что он удовлетворяет уравнению Ламе от переменных η и ψ, и легко проверить, что этот интеграл является периодической функцией η и ψ.) Соотношение (3.21) теперь можно рассматривать как разложение произведений многочленов Ламе по сферическим гармоникам.

Совокупность всех собственных функций (3.24) для $l = 0, 1, 2, \ldots$ образует о. н. базис в $L_2(S_2)$. Отображая этот базис в гильбертово пространство решений уравнения Гельмгольца посредством (2.1), находим, что

$$\Psi_{ln}^{pq}(\mathbf{x}) = I\left(f_{ln}^{pq}\right) = d_n^{pql} j_l(\omega r) E_{ln}^{p,q}(\alpha) E_{ln}^{p,q}(\beta) \tag{3.25}$$

в конических координатах (1.34), причем $j_l(z)$ — сферическая функция Бесселя (см. (2.27)), а d — константа, определяемая, вообще говоря, из интеграла.

Следует заметить, что (3.24) и (3.25) можно рассматривать и как нелинейные интегральные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Ламе. В связи с этим заметим, что в вычислении интеграла (5.16) в [57] имеется ошибка. Этот интеграл следует заменить выражением (3.24).

Нашу модель W_l можно также использовать для исследования многочленов Айнса; см. [24].

3.4. Формулы разложения для решений с разделенными переменными уравнения Гельмгольца

Из рассуждений, проведенных в гл. 1 и 2, становится ясно, что для того, чтобы получить разложение решения $\mathbf{T}(g)\Psi_\lambda^{(j)}(\mathbf{x})$ уравнения Гельмгольца по собственным функциям $\{\Psi_\mu^{(i)}\}$, достаточно найти коэффициенты разложения $\langle \mathbf{T}(g) f_\lambda^{(j)}, f_\mu^{(i)} \rangle$ в $L_2(S_2)$-модели:

$$\mathbf{T}(g)\Psi_\lambda^{(j)}(\mathbf{x}) = \sum_\mu \langle \mathbf{T}(g) f_\lambda^{(j)}, f_\mu^{(i)} \rangle \Psi_\mu^{(i)}(\mathbf{x}). \tag{4.1}$$

Здесь мы дадим несколько наиболее простых для анализа коэффициентов разложения в случае, когда $\mathbf{T}(g)$ является единичным оператором.

Матричные элементы смешанных базисов $\langle f_\lambda^{(j)}, f_{\alpha,\nu}^{(1)} \rangle$, связывающие произвольную систему $\{f^{(j)}(\hat{\mathbf{k}})\}$ с декартовой систе-