

муле (3.24) $E_{ln}^{p,q}(\xi)$ — многочлен Ламе, отвечающий тому же собственному значению и тому же типу симметрии, что и Λ_n^{pql} . Поскольку явная нормировка $E_{ln}^{p,q}$ и Λ_n^{pql} фиксирована, константа c определяется из двойного интеграла. (Интеграл в (3.24) вычисляется, так как нам заранее известно, что он удовлетворяет уравнению Ламе от переменных n и ψ , и легко проверить, что этот интеграл является периодической функцией η и ψ .) Соотношение (3.21) теперь можно рассматривать как разложение произведений многочленов Ламе по сферическим гармоникам.

Совокупность всех собственных функций (3.24) для $l = 0, 1, 2, \dots$ образует о. н. базис в $L_2(S_2)$. Отображая этот базис в гильбертово пространство решений уравнения Гельмгольца посредством (2.1), находим, что

$$\Psi_{ln}^{pq}(x) = I(f_{ln}^{pq}) = d_n^{pql} j_l(\omega r) E_{ln}^{p,q}(a) E_{ln}^{p,q}(b) \quad (3.25)$$

в конических координатах (1.34), причем $j_l(z)$ — сферическая функция Бесселя (см. (2.27)), а d — константа, определяемая, вообще говоря, из интеграла.

Следует заметить, что (3.24) и (3.25) можно рассматривать и как нелинейные интегральные уравнения, которым удовлетворяют многочлены Ламе. В связи с этим заметим, что в вычислении интеграла (5.16) в [57] имеется ошибка. Этот интеграл следует заменить выражением (3.24).

Нашу модель W_l можно также использовать для исследования многочленов Айнса; см. [24].

3.4. Формулы разложения для решений с разделенными переменными уравнения Гельмгольца

Из рассуждений, проведенных в гл. 1 и 2, становится ясно, что для того, чтобы получить разложение решения $\mathbf{T}(g)\Psi_\lambda^{(j)}(x)$ уравнения Гельмгольца по собственным функциям $\{\Psi_\mu^{(i)}\}$, достаточно найти коэффициенты разложения $\langle \mathbf{T}(g)f_\lambda^{(j)}, f_\mu^{(i)} \rangle$ в $L_2(S_2)$ -модели:

$$\mathbf{T}(g)\Psi_\lambda^{(j)}(x) = \sum_\mu \langle \mathbf{T}(g)f_\lambda^{(j)}, f_\mu^{(i)} \rangle \Psi_\mu^{(i)}(x). \quad (4.1)$$

Здесь мы дадим несколько наиболее простых для анализа коэффициентов разложения в случае, когда $\mathbf{T}(g)$ является единственным оператором.

Матричные элементы смешанных базисов $\langle f_\lambda^{(j)}, f_{\alpha,\nu}^{(1)} \rangle$, связывающие произвольную систему $\{f^{(j)}(\hat{k})\}$ с декартовой систе-

мой (2.32), очевидно, имеют вид

$$\langle f_{\lambda}^{(l)}, f_{\mu, \gamma}^{(l)} \rangle = (\sin \gamma)^{1/2} f_{\lambda}^{(l)} (\sin \gamma \cos \alpha, \sin \gamma \sin \alpha, \cos \gamma). \quad (4.2)$$

Кроме того, м. э. с. б., связывающие собственные функции для систем 1—4 в табл. 14, легко получаются из соответствующих м. э. с. б. для решений уравнения Гельмгольца $(\Delta_2 + \omega^2)\Psi = 0$, перечисленных в разд. 1.3. В самом деле, эти м. э. с. б. принимают вид

$$\langle f_{\lambda, \gamma}^{(l)}, f_{\mu, \gamma'}^{(l)} \rangle = \delta(\gamma - \gamma') \langle f_{\lambda}^{(l)}, f_{\mu}^{(l)} \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq 4, \quad (4.3)$$

где $\langle f_{\lambda}^{(l)}, f_{\mu}^{(l)} \rangle$ — соответствующий м. э. с. б., вычисленный в разд. 1.3 при помощи модели $L_2(S_1)$.

Матричные элементы $\langle f_m^{(l)}, f_{\lambda, m'}^{(8)} \rangle$ сферического и параболического базисов были подсчитаны в [96]:

$$\begin{aligned} \langle f_m^{(l)}, f_{\lambda, m'}^{(8)} \rangle &= \delta_{mm'} \frac{(-1)^{(m+|m|)/2}}{(|m|!)^2} \left[\frac{(2l+1)(l+|m|)!}{4\pi(l-|m|)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{i\lambda+|m|+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-i\lambda+|m|+1}{2}\right) \times \\ &\times {}_3F_2\left(\begin{array}{c} |m|-l, |m|+l+1, (i\lambda+|m|+1)/2 \\ |m|+1, |m|+1 \end{array} \middle| 1\right), \quad (4.4) \\ &m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \end{aligned}$$

Матричные элементы сферического базиса и базиса вытянутого сфераода имеют вид

$$\begin{aligned} \langle f_m^{(l)}, f_{n, m'}^{(6)} \rangle &= \\ &= \begin{cases} \delta_{mm'} (-1)^{(2m+l-n)/2} \left[\frac{(n-m)!(l+m)!(2n+1)}{(n+m)!(l-m)!(2l+1)} \right]^{1/2} a_{n, l-n}^m (a^2 \omega^2), & m' \geq 0, \\ \delta_{mm'} (-1)^{(l-n)/2} \left[\frac{(n+m)!(2n+1)}{(n-m)!(2l+1)} \right]^{1/2} a_{n, l-n}^{|m|} (a^2 \omega^2), & m' < 0, \end{cases} \quad (4.5) \end{aligned}$$

где коэффициенты $a_{n, 2k}^{|m|}$ определяются по формуле (2.46).

Матричные элементы цилиндрического базиса и базиса вытянутого сфераода имеют вид

$$\langle f_{n, m}^{(6)}, f_{m', \gamma}^{(2)} \rangle = \left[\frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!2} \sin \gamma \right]^{1/2} P s_n^{|m|} (\cos \gamma, a \omega^2) \delta_{mm'}, \quad (4.6)$$

а матричные элементы базиса параболического цилиндра и базиса вытянутого сфераода — вид

$$\langle f_{n, m}^{(6)}, f_{\mu \pm, \gamma}^{(3)} \rangle = \left[\frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!2} \sin \gamma \right]^{1/2} P s_n^{|m|} (\cos \gamma, a^2 \omega^2) \langle f_m^{(2)}, f_{\mu \pm}^{(3)} \rangle, \quad (4.7)$$

где м. э. с. б. $\langle f_m^{(2)}, f_{\mu \pm}^{(3)} \rangle$ определяются формулой (3.50) разд. 1.3. Матричные элементы базиса эллиптического цилиндра и базиса вытянутого сфEROида записываются следующим образом:

$$\langle f_{n,m}^{(6)}, f_{n_0,p,q}^{(4)} \rangle = \left[\frac{(n - |m|)! (2n + 1)}{(n + |m|)!} \sin \gamma \right]^{1/2} P_{n_0}^{|m|}(\cos \gamma, a^2 \omega^2) A_n^m, \quad (4.8)$$

где коэффициенты Фурье A_n^m определяются через функции Матье $p e_n(\varphi, q)$, $p = s, c$:

$$p e_n(\varphi, q) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_n^m e^{im\varphi}. \quad (4.9)$$

Соответствующие м. э. с. б. для координат сплющенного сфEROида можно получить из м. э. с. б. (4.5)–(4.8), для чего необходимо произвести замену $a^2 \omega^2 \rightarrow -a^2 \omega^2$ в функциях сфероидальной волны.

Арскотт [7] дает способ вычисления матричных элементов смешанного базиса $\langle f_{nm}^{(10)}, f_{lm}^{(11)} \rangle$, соответствующего эллипсоидальному и коническому координатам, при помощи трехчленного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяют эти м. э. с. б.

Остальные м. э. с. б. не так просты, как перечисленные выше.

Для всех множеств базисов рассмотренных выше решений уравнения Гельмгольца легко построить билинейную производящую функцию. Пусть $\{f_{\lambda\mu}(k)\}$ — один из одиннадцати базисов для построенного нами ранее пространства $L_2(S_2)$, и пусть $\{\Psi_{\lambda\mu}(x)\}$ — соответствующий базис для пространства решений уравнения $(\Delta_3 + \omega^2) \Psi(x) = 0$. Тогда

$$\Psi_{\lambda\mu}(x) = I(f_{\lambda\mu}) = \langle f_{\lambda\mu}, H(x, \cdot) \rangle,$$

где $H(x, \hat{k}) = \exp[-i\omega x \cdot \hat{k}] \in L_2(S_2)$ для каждого $x \in R^3$. Вычисление в явном виде дает

$$\langle H(x, \cdot), H(x', \cdot) \rangle = 4\pi [\sin(\omega R)/\omega R], \quad R^2 = (x - x') \cdot (x - x'). \quad (4.10)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle H(x, \cdot), H(x', \cdot) \rangle &= \sum_{\lambda, \mu} \langle H(x, \cdot), f_{\lambda\mu} \rangle \langle f_{\lambda\mu}, H(x', \cdot) \rangle = \\ &= \sum_{\lambda, \mu} \bar{\Psi}_{\lambda\mu}(x) \Psi_{\lambda\mu}(x'), \end{aligned} \quad (4.11)$$

и, сравнивая (4.10) и (4.11), можно показать, что $4\pi \sin(\omega R)/\omega R$ является билинейной производящей функцией для каждого из наших базисов.

И наконец, как показано в [37] и [96], каждый из наших одиннадцати базисов $\{\Psi_{\lambda\mu}\}$, рассматриваемый как функция от

$\omega, 0 < \omega < \infty$, можно использовать с тем, чтобы разложить произвольную функцию $f(x)$, интегрируемую с квадратом по мере Лебега в трехмерном пространстве R_3 .

3.5. Модели негильбертовых пространств для решений уравнения Гельмгольца

Существует, очевидно, целый ряд решений уравнения Гельмгольца, которые интересны как с физической, так и с математической точки зрения и которые нельзя представить в виде $I(h)$ (см. формулу (2.1)) при $h \in L_2(S_2)$. Мы рассмотрим несколько теоретико-групповых методов получения таких решений, позволяющих установить связь между различными типами решений с разделяющимися переменными в негильбертовом пространстве. По сравнению с процедурами, рассмотренными выше, эти методы менее изящны, но обладают большей гибкостью. Ко всему прочему их можно применять для исследования дифференциальных уравнений, рассмотренных в гл. 1 и 2.

Для начала рассмотрим преобразование $I(h)$ (см. (2.1)), где область интегрирования является не вещественной сферой S_2 , а комплексной двумерной римановой поверхностью. Положим, в частности,

$$\hat{k} = (k_1, k_2, k_3) = (- (1/2)(t + t^{-1})(1 + \beta^2)^{1/2}, \\ (i/2)(t - t^{-1})(1 + \beta^2)^{1/2}, i\beta), \quad (5.1)$$

где t и β — комплекснозначные величины, и запишем

$$\Psi(x) = \int_S d\beta (dt/t) h(\beta, t) \exp [-(i\omega/2)(1 + \beta^2)^{1/2} \times \\ \times \{x(t + t^{-1}) + iy(t^{-1} - t)\} - \omega\beta z] = I(h). \quad (5.2)$$

Допустим, что поверхность интегрирования S и аналитическая функция h таковы, что интеграл $I(h)$ абсолютно сходится и под знаком интеграла возможно произвольное дифференцирование по x, y и z . Поскольку $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$ даже при произвольных комплекснозначных β и t , $t \neq 0$, то $\Psi(x)$ является решением уравнения Гельмгольца

$$(\Delta_3 + \omega^2) \Psi(x) = 0. \quad (5.3)$$

Интегрируя по частям, находим, что операторы P_j, J_j (см. формулы (1.2)), действующие на пространстве решений уравнения