и тождество (5.27) позволяет вычислить коэффициенты $a_n(\lambda)$, что при $\omega = 1$ приводит к окончательному результату

$$[(\rho^2-1)(\lambda^2-1)]^{-m/2} e^{s\lambda\rho} I_m\left(s[(\rho^2-1)(\lambda^2-1)]^{1/2}\right) = \\ = \frac{2^{2m+1}}{(2\pi s)^{1/2}} \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(m+n+{}^1/_2)}{\Gamma(2m+n+1)} \times \\ \times I_{m+n+1/2}(s)\, C_n^{m+1/2}(\rho)\, C_n^{m+1/2}(\lambda), \quad (5.37)$$

причем ряд в правой части этого соотношения сходится для всех $\rho, \lambda \in \mathbb{C}$ (см. [17]).

Разберем еще один случай, а именно рассмотрим решения (5.14), которые соответствуют системе параболических координат (строка 8 табл. 14). Записывая эти решения в координатах (5.28) и разлагая их по элементам сферического базиса, мы получаем

$$e^{s\rho} L_k^{(m)}(-s(1+\rho))\, L_k^{(m)}(s(1-\rho)) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{-m-1/2} I_{m+n+1/2}(s)\, C_n^{m+1/2}(\rho). \quad (5.38)$$

Полагая $\rho = \alpha/s$, $s \to 0$, можно определить коэффициенты a_n:

$$2^{m+1/2}\Gamma(m+{}^1/_2)\, e^{\alpha}\left[L_k^{(m)}(-\alpha)\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \alpha^n}{n!\,(m+n+{}^1/_2)}.$$

Используя формулу преобразований для ${}_1F_1$ (приложение Б, разд. 3), можно вычислить в явном виде коэффициенты при α^n в левой части этого уравнения, в результате чего получаем

$$a_n = \frac{2^{m+1/2}(m+n+{}^1/_2)\,\Gamma(m+{}^1/_2)\,\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(m+k+n+1)}{(k!)^2\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+n+1)} \times \\ \times {}_3F_2\left(\left.\begin{matrix} -k, & -m-n, & -n \\ m+1, & -m-k-n & \end{matrix}\right| 1\right). \quad (5.39)$$

При $k = 0$ это выражение сводится к формуле (5.27).

3.6. Уравнение Лапласа $\Delta_3\Psi = 0$

Известные системы координат, допускающие разделение переменных для вещественного уравнения Лапласа

$$\Delta_3\Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z), \quad (6.1)$$

определены и изучены в классической книге Бохера [27]. Однако явная связь между этими системами и группой симмет-

рии уравнения (6.1) была установлена совсем недавно [25]. Без учета тривиальной симметрии E алгебра симметрии этого уравнения десятимерна и имеет базис следующего вида:

$$P_j = \partial_j = \partial_{x_j}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3; \qquad J_3 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2,$$

$$J_2 = x_1\partial_3 - x_3\partial_1,\ J_1 = x_3\partial_2 - x_2\partial_3,\ D = -\left({}^1/_2 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3\right),$$

$$\begin{aligned} K_1 &= x_1 + \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right)\partial_1 + 2x_1x_3\partial_3 + 2x_1x_2\partial_2, \\ K_2 &= x_2 + \left(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2\right)\partial_2 + 2x_2x_3\partial_3 + 2x_2x_1\partial_1, \\ K_3 &= x_3 + \left(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2\right)\partial_3 + 2x_3x_1\partial_1 + 2x_3x_2\partial_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Операторы P_i и J_i порождают подалгебру, изоморфную алгебре $\mathscr{E}(3)$, а D — производящий оператор группы растяжений. Операторы K_j являются производящими операторами *специальных конформных преобразований* и будут рассмотрены ниже. В действительности с оператором Лапласа Δ_3 коммутируют только элементы $\mathscr{E}(3)$. Относительно остальных элементов алгебры Ли пространство решений уравнения (6.1) просто инвариантно.

Алгебра симметрии уравнения Лапласа изоморфна алгебре $so(4, 1)$, т. е. алгебре Ли всех вещественных (5×5)-матриц $\mathscr{A}$, таких, что $\mathscr{A}G^{4,1} + G^{4,1}\mathscr{A}^t = 0$, где

$$G^{4,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4} \mathscr{E}_{jj} - \mathscr{E}_{55}, \tag{6.3}$$

причем в (6.3) $\mathscr{E}_{ij}$ является (5×5)-матрицей, в которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен единице, а все остальные элементы равны нулю:

$$\mathscr{E}_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ & \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} i. \end{array} \tag{6.4}$$

Базис для $so(4, 1)$ состоит из десяти элементов

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab} &= \mathscr{E}_{ab} - \mathscr{E}_{ba} = -\Gamma_{ba}, \qquad 1 \leqslant a, b \leqslant 4, \\ \Gamma_{a5} &= \mathscr{E}_{a5} + \mathscr{E}_{5a} = \Gamma_{5a}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

причем соотношения коммутирования имеют вид

$$\begin{aligned} &[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{bc}\Gamma_{ad} + \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{ca}\Gamma_{db} + \delta_{db}\Gamma_{ca}, \\ &[\Gamma_{a5}, \Gamma_{cd}] = -\delta_{ad}\Gamma_{c5} + \delta_{ac}\Gamma_{d5}, \qquad [\Gamma_{a5}, \Gamma_{b5}] = \Gamma_{ab}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Легко проверить, что корректные соотношения коммутирования для операторов (6.2) получаются в результате следующей идентификации:

$$\begin{aligned} &J_3=\Gamma_{32}, && J_2=\Gamma_{24}, && J_1=\Gamma_{43}, && D=\Gamma_{15},\\ &P_1=\Gamma_{12}+\Gamma_{25}, && P_2=\Gamma_{13}+\Gamma_{35}, && P_3=\Gamma_{14}+\Gamma_{45}, \\ &K_1=\Gamma_{12}-\Gamma_{25}, && K_2=\Gamma_{13}-\Gamma_{35}, && K_3=\Gamma_{14}-\Gamma_{45}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Таким образом, группа симметрии уравнения (6.1), *конформная группа*, локально изоморфна $SO(4,1)$, группе всех вещественных (5×5)-матриц A, таких, что

$$AG^{4,1}A^t=G^{4,1}. \tag{6.8}$$

Компонента единицы этой группы состоит из матриц, удовлетворяющих (6.8) и условиям $\det A=1$ и $A_{55}\geqslant 1$. Алгеброй Ли группы $SO(4,1)$ является алгебра $so(4,1)$; см. [134].

Вычисляя экспоненту операторов (6.2), мы получаем локальное действие группы $SO(4,1)$ как группы преобразований операторов симметрии. Так, оператор импульса и оператор момента импульса порождают подгруппу операторов симметрии (1.12), изоморфную группе $E(3)$; оператор растяжения порождает

$$\exp(\lambda D)\Psi(\mathbf{x})=\exp(-\lambda/2)\Psi[\exp(-\lambda)\mathbf{x}], \qquad \lambda\in R, \tag{6.9}$$

а операторы K_j порождают специальные конформные преобразования

$$\exp(a_1K_1+a_2K_2+a_3K_3)\Psi(\mathbf{x})= \\ =[1-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})]^{-1/2}\Psi\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}{1-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})}\right). \tag{6.10}$$

Кроме того, рассмотрим для уравнения Лапласа оператор симметрии инверсии и операторы симметрии, являющиеся отражениями в пространстве:

$$\begin{aligned} I\Psi(\mathbf{x})&=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{-1/2}\Psi(\mathbf{x}/\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}), && I=I^{-1},\\ R\Psi(\mathbf{x})&=\Psi(-x_1,\ x_2,\ x_3), && R=R^{-1}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Это известные операторы симметрии уравнения (6.1), не порождаемые инфинитезимальными операторами (6.2); см. [13]. Из определения этих операторов следует, что

$$IP_jI^{-1}=-K_j, \quad IDI^{-1}=-D, \quad IJ_jI^{-1}=J_j. \tag{6.12}$$

Довольно утомительными вычислениями можно показать, что уравнение Лапласа принадлежит классу I. Кроме того, хотя пространство симметрических операторов второго порядка в об-

дертывающей алгебре алгебры $so(4, 1)$ и является 35-мерным, на пространстве решений уравнения (6.1) имеется 20 линейно независимых соотношений между этими операторами. Таким образом, всего лишь 15 операторов могут считаться линейно независимыми на пространстве решений. Например, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{K} = 0,\\
&\text{(ii)} \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = {}^1/_4 - D^2,\\
&\text{(iii)} \quad \Gamma_{45}^2 + \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{51}^2 = {}^1/_4 + \Gamma_{23}^2,\\
&\text{(iv)} \quad \{P_1, K_1\} + \{P_2, K_2\} + \{P_3, K_3\} = 2 + 4D^2.
\end{aligned} \tag{6.13}$$

(Заметим, что эти соотношения имеют силу не в общем случае, а только на пространстве решений уравнений (6.1), причем $\Gamma_{\alpha\beta}$ (см. (6.7)) являются дифференциальными операторами на этом пространстве.)

У читателя может возникнуть вопрос, почему мы не провели подобный анализ уравнения Лапласа $\Delta_2\Psi(\mathbf{x}) = 0$. Дело в том, что алгебра симметрии этого уравнения бесконечномерна. Действительно, каждое преобразование $\Psi(x, y) \to \Psi(u(x, y), v(x, y))$, где $u + iv = f(z)$, $z = x + iy$, а $f(z)$ — аналитическая функция, определяет оператор симметрии уравнения Лапласа. Группа всех аналитических преобразований $z \to f(z)$ является группой симметрии этого уравнения, но не является группой Ли. (В самом деле, любое групповое преобразование определяется бесконечным числом параметров $\{a_n\}$, где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.) Таким образом, методы теории Ли оказываются малоэффективными для этого уравнения Лапласа. Можно показать, что бесконечномерные алгебры симметрии для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка от n переменных появляются только при $n = 2$ [106].

Вернемся к задаче разделения переменных для уравнения (6.1). Очевидно, что каждая система координат, допускающая R-разделение переменных, характеризуется парой коммутирующих операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(4, 1)$. Как обычно, две системы координат будут считаться эквивалентными, если преобразованием из связной компоненты единицы конформной группы, расширенной за счет дискретных операторов (6.11), одну систему можно получить из другой.

Прежде всего следует заметить, что перечисленные в табл. 14 одиннадцать систем координат, допускающие разделение переменных для уравнения Гельмгольца, допускают разделение переменных и для уравнения Лапласа. Полагая $\omega = 0$ в форму-

лах, полученных для уравнения Гельмгольца в разд. 3.1, мы кратко опишем вид решений Ψ с разделенными переменными для уравнений на собственные значения $S_j\Psi = \lambda_j\Psi$, $\Delta_3\Psi = 0$.

Для системы декартовых координат 1 решения имеют вид

$$\exp(\alpha x + \beta y + \gamma z), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \tag{6.14}$$

а для системы цилиндрических координат 2 — вид

$$\begin{gathered}\Psi^{(2)}_{\lambda,n}(r, \varphi, z) = J_{\pm n}(\lambda r)\exp(\lambda z + in\varphi),\\ iJ_3\Psi_{\lambda,n} = n\Psi_{\lambda,n}, \quad P_3\Psi_{\lambda,n} = \lambda\Psi_{\lambda,n}.\end{gathered} \tag{6.15}$$

Решения с разделенными переменными для системы координат параболического цилиндра 3 записываются в виде

$$\begin{gathered}\Psi^{(3)}_{\lambda,\mu}(\xi, \eta, z) = D_{i\mu-1/2}(\pm\sigma\xi)\,D_{-i\mu-1/2}(\pm\sigma\eta)\,e^{\lambda z},\\ \sigma = \exp(-i\pi/4)\,(2\lambda)^{1/2},\\ P_3\Psi_{\lambda,\mu} = \lambda\Psi_{\lambda,\mu}, \quad \{J_3, P_2\}\,\Psi_{\lambda,\mu} = 2\mu\lambda\Psi_{\lambda,\mu},\end{gathered} \tag{6.16}$$

а для системы координат эллиптического цилиндра 4 — в виде

$$\begin{gathered}\Psi^{(4)}_{\lambda,n}(\alpha, \beta, z) = \begin{cases}\mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q)\,e^{\lambda z},\\ \mathrm{Se}_n(\alpha, q)\,\mathrm{se}_n(\beta, q)\,e^{\lambda z},\end{cases} \quad q = d^2\lambda^2/4,\\ (J_3^2 + d^2P_1^2)\,\Psi_{\lambda,n} = \mu_n\Psi_{\lambda,n}, \quad P_3\Psi_{\lambda,n} = \lambda\Psi_{\lambda,n}.\end{gathered} \tag{6.17}$$

Системе сферических координат 5 соответствуют решения вида

$$\begin{gathered}\Psi^{(5)}_{l,m}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{Bmatrix}\rho^l\\ \rho^{-l-1}\end{Bmatrix} P_l^m(\theta)\,e^{im\varphi}, \quad iJ_3\Psi^{(5)}_{l,m} = m\Psi^{(5)}_{l,m},\\ \mathbf{J}\cdot\mathbf{J}\Psi^{(5)}_{l,m} = -l(l+1)\,\Psi^{(5)}_{l,m}.\end{gathered} \tag{6.18}$$

Для системы координат вытянутого сфероида 6 уравнения с разделяющимися переменными принимают вид (1.20) с $\omega = 0$, а их решения имеют вид

$$P_n^m(\operatorname{ch}\eta)\,P_n^m(\cos\alpha)\,e^{im\varphi}, \tag{6.19}$$

т. е. это не что иное, как решения (1.21) при $\omega = 0$. Подобным же образом для системы координат сплющенного сфероида 7 уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (1.22) при $\omega = 0$, а собственные функции таковы:

$$P_n^m(-i\operatorname{sh}\eta)\,P_n^m(\cos\alpha)\,e^{im\varphi}. \tag{6.20}$$

Для системы параболических координат 8 уравнения с разделяющимися переменными при $\omega = 0$ принимают вид (1.24), а их решения — вид

$$J_{\pm m}(i\sqrt{\lambda}\,\xi)\,J_{\pm m}(\sqrt{\lambda}\,\eta)\,e^{im\varphi}. \tag{6.21}$$

Для системы параболоидальных координат 9 мы имеем уравнения с разделяющимися переменными вида (1.26) при $\omega = 0$ и решения с разделяющимися переменными, выраженные через функции Матье:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ce}_n(\alpha, -\lambda c/2)\,\mathrm{ce}_n(\beta, -\lambda c/2)\,\mathrm{Ce}_n(\gamma + i\pi/2, -\lambda c/2), \\ &\mathrm{Se}_n(\alpha, -\lambda c/2)\,\mathrm{se}_n(\beta, -\lambda c/2)\,\mathrm{Se}_n(\gamma + i\pi/2, -\lambda c/2). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Для системы эллипсоидальных координат 10 уравнения с разделяющимися переменными принимают вид (1.29), или (1.33) при $\omega = 0$. Таким образом, три уравнения с разделяющимися переменными сводятся к уравнению Ламе, а три однозначных решения в R^3 являются произведениями трех многочленов Ламе (см. [7]).

И наконец, для системы конических координат 11 уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (1.35) при $\omega = 0$. Однозначные решения в R^3 записываются так:

$$\begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1} \end{Bmatrix} E_{ln}^{p,\,q}(\alpha)\, E_{ln}^{p,\,q}(\beta), \quad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{6.23}$$

где функции E являются многочленами Ламе; см. (3.24). По аналогии со сферическими гармониками $Y_l^m(\theta, \varphi)$ такие произведения многочленов Ламе называются *эллипсоидальными гармониками* (см. [125]). Вычисление м. э. с. б., связанных со сферическими и эллипсоидальными гармониками, уже было проведено в разд. 3.3.

Остальные системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения Лапласа, допускают только R-разделение переменных и не приводят к разделению переменных для уравнения Гельмгольца. Координатные поверхности для этих систем являются ортогональными семействами софокусных циклид. Циклида — это поверхность, уравнение которой имеет вид

$$a(x^2 + y^2 + z^2)^2 + P(x, y, z) = 0, \tag{6.24}$$

где a — некоторая константа, а P — многочлен второго порядка. Если $a = 0$, то циклида сводится к поверхности второго порядка. Известно, что координатные поверхности одиннадцати допускающих разделение переменных систем, перечисленных в табл. 14, являются софокусными семействами поверхностей второго порядка

$$\frac{x^2}{a_1 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3 + \lambda} = 1, \quad a_i = \mathrm{const}, \tag{6.25}$$

и их предельных случаев (см. [14, 99, 101, 125]). В частности, все эти координаты являются предельными случаями эллипсои-

дальных координат, а координатные поверхности являются эллипсоидами, гиперболоидами и различными предельными случаями этих поверхностей, такими, как параболоиды, сферы и плоскости.

Известно, что при любом конформном преобразовании уравнения Лапласа система, допускающая R-разделение переменных, отображается в систему, допускающую R-разделение переменных. Однако оператор инверсии I (см. (6.11)) отображает поверхность второго порядка в циклиду с $a \neq 0$, что читатель может легко проверить сам. Таким образом, изучая системы координат, допускающие R-разделение переменных для уравнения Лапласа, неизбежно приходится сталкиваться с системами координат, координатные поверхности которых являются циклидами.

Легко проверить, что семейство всех циклид инвариантно относительно действия конформной группы и что эта группа отображает ортогональные поверхности в ортогональные поверхности. Вместо того чтобы строить ортогональные системы координат при помощи семейств софокусных квадрик, можно использовать для этой цели более общие семейства, которыми являются семейства софокусных циклид. Непосредственным вычислением можно показать, что такие семейства определяют ортогональные системы координат, допускающие R-разделение переменных для уравнения Лапласа. Более того, таким способом можно получить все системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения Лапласа.

Поскольку системы координат, связанные конформным преобразованием, считаются эквивалентными, для получения всех различных систем циклид, очевидно, необходимо разбить семейства циклид (6.24) на конформные классы эквивалентности. Среди классов эквивалентности циклид имеются такие, которые содержат циклиды вида (6.24) с $a = 0$. Эти классы соответствуют одиннадцати допускающим разделение переменных системам, перечисленным в табл. 14. Остальные классы содержат циклиды вида (6.24) только с $a \neq 0$ и приводят к новым системам, допускающим R-разделение переменных. Подробное описание этого построения можно найти в классической книге Бохера [27]. В настоящей книге мы дадим только теоретико-групповую характеристику систем координат, перечисленных в книге Бохера. Впервые такая характеристика была дана в работе [25]; мы же представляем ее в виде табл. 17.

В каждой системе координат $\{\mu, \nu, \rho\}$ решения с R-разделенными переменными принимают вид $\Psi(\mathbf{x}) = \mathscr{R}^{1/2}(\mu, \nu, \rho) A(\mu) B(\nu) C(\rho)$, причем эти решения характеризуются уравнениями для собственных значений вида $S_j \Psi = \lambda_j \Psi$, где λ_1, λ_2 — константы разделения.

Таблица 17

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ДОПУСКАЮЩИЕ R-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

	Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие R-разделение переменных
12	$S_1 = \frac{a+1}{4}(P_2+K_2)^2 + \frac{b+1}{4}(P_1+K_1)^2 + \frac{a+b}{4}(P_3+K_3)^2 + J_3^2 + bJ_2^2 + aJ_1^2$, $S_2 = \frac{a}{4}(P_2+K_2)^2 + \frac{b}{4}(P_1+K_1)^2 + \frac{ab}{4}(P_3+K_3)^2$	$x = \mathcal{R}^{-1}\left[\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{(b-a)(a-1)a}\right]^{1/2}$, $y = \mathcal{R}^{-1}\left[\frac{(\mu-b)(\nu-b)(\rho-b)}{(a-b)(b-1)b}\right]^{1/2}$, $z = \mathcal{R}^{-1}\left[\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)}\right]^{1/2}$, $\mathcal{R} = 1 + \left[\frac{\mu\nu\rho}{ab}\right]^{1/2}$
13	$S_1 = 2\alpha J_3^2 + \frac{\alpha+1}{2}\{P_2, K_2\} + \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) + \frac{\alpha}{2}\{P_1, K_1\} + \frac{\beta}{2}(K_1^2 - P_1^2)$, $S_2 = \frac{\alpha}{2}\{P_2, K_2\} + \frac{\beta}{2}(P_2^2 - K_2^2) + (\alpha^2+\beta^2)J_3^2$	$x = \mathcal{R}^{-1}\left[\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{(a-1)(b-1)}\right]^{1/2}$, $y = \mathcal{R}^{-1}\left[-\frac{\mu\nu\rho}{ab}\right]^{1/2}$, $z = \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R} = 2\,\mathrm{Re}\left[-\frac{i(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{(a-b)(a-1)a}\right]^{1/2}$, $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$; α, β вещественные
14	$S_1 = J_3^2$, $4S_2 = (P_3+K_3)^2 - a(P_3-K_3)^2$	$x = \mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y = \mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z = \mathcal{R}^{-1}\left[-\frac{\mu\rho}{a}\right]^{1/2}$, $\mathcal{R} = \left[\frac{(\mu-a)(a-\rho)}{a(a-1)}\right]^{1/2} - \left[\frac{(\mu-1)(1-\rho)}{a-1}\right]$

Продолжение табл. 17

Коммутирующие операторы S_1, S_2	Координаты, допускающие R-разделение переменных
15 $S_1 = J_3^2$, $4S_2 = -4aD^2 - (P_3 - K_3)^2$	$x = \mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y = \mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z = \mathcal{R}^{-1}\left[\frac{(\mu - a)(a - \rho)}{a(a-1)}\right]^{1/2}$, $\mathcal{R} = \left[\frac{\mu\rho}{a}\right]^{1/2} + \left[\frac{(\mu-1)(\rho-1)}{a-1}\right]^{1/2}$
16 $S_1 = J_3^2$, $2S_2 = \alpha\{P_3, K_3\} + \beta(K_3^2 - P_3^2)$	$x = \mathcal{R}^{-1}\cos\varphi$, $y = \mathcal{R}^{-1}\sin\varphi$, $z = \mathcal{R}^{-1}\left[-\frac{\mu\rho}{ab}\right]^{1/2}$, $\mathcal{R} = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{i(\rho - a)(\mu - a)}{a(a-b)}\right]^{1/2}$, $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$
17 $S_1 = J_3^2$, $4S_2 = (P_3 + K_3)^2$	$x = \mathcal{R}^{-1}\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\varphi$, $y = \mathcal{R}^{-1}\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\varphi$, $z = \mathcal{R}^{-1}\cos\psi$, $\mathcal{R} = \mathrm{ch}\,\xi + \sin\psi$

Более конкретно, для системы 12 параметры меняются в интервалах

$$0 < \rho < 1 < \nu < b < \mu < a$$

и каждый множитель в решении с разделенными переменными удовлетворяет уравнению

$$\left[(f(\xi))^{1/2}\frac{d}{d\xi}(f(\xi))^{1/2}\frac{d}{d\xi} - \left(\frac{3}{16}\xi^2 - \frac{\lambda_1}{4}\xi + \frac{\lambda_2}{4}\right)\right]A(\xi) = 0, \qquad (6.26)$$

$$f(\xi) = (\xi - a)(\xi - b)(\xi - 1)\xi, \quad \xi = \mu,\ \nu,\ \rho,$$

которое является стандартной формой уравнения с пятью элементарными особенностями [1]. О решениях этого уравнения известно очень мало. Для системы 13 параметры меняются в интервалах

$$-\infty < \rho < 0 < \mu < 1 < \nu < \infty.$$

Уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.26) с $a = \bar{b} = \alpha + i\beta$. Для системы 14 параметры меняются в интер-

валах $\mu > a > 1$, $\rho < 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а решения уравнения Лапласа имеют вид $\Psi = \mathcal{R}^{1/2} E_1(\mu) E_2(\rho) e^{im\varphi}$, где

$$\left[4(\mathcal{P}(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} (\mathcal{P}(\xi))^{1/2} \frac{d}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} - m^2\right)\xi - \lambda\right] E_j(\xi) = 0,$$
$$j = 1,\ 2, \quad \xi = \mu,\ \rho, \quad \mathcal{P}(\xi) = (\xi - a)(\xi - 1)\xi, \tag{6.27}$$
$$iJ_3\Psi = m\Psi, \quad S_2\Psi = \lambda\Psi.$$

Положив $\mu = \mathrm{sn}^2(\alpha, k)$, $\rho = \mathrm{sn}^2(\beta, k)$, где $k = a^{-1/2}$, получим

$$x = \mathcal{R}^{-1}\cos\varphi, \quad y = \mathcal{R}^{-1}\sin\varphi, \quad z = ik\mathcal{R}^{-1}\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta,$$
$$\mathcal{R} = i(k')^{-1}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta - i(kk')^{-1}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta, \tag{6.28}$$
$$\Psi = \mathcal{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\alpha, k)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\beta, k)\,e^{im\varphi},$$

где $\Lambda^p_n(z, k)$ — решение уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{dz^2} + \left(h^p_n - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2(z, k)\right)\Lambda = 0. \tag{6.29}$$

Параметры α, β принадлежат следующим интервалам комплексной плоскости: $\alpha \in [iK',\ iK' + 2K]$, $\beta \in [2K - iK',\ 2K + iK']$. Для системы 15 параметры меняются в интервалах

$$1 < \rho < a < \mu < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

и уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.27). Выполняя те же подстановки с использованием эллиптических функций, что и в предыдущем случае, получаем

$$x = \mathcal{R}^{-1}\cos\varphi, \quad y = \mathcal{R}^{-1}\sin\varphi, \quad z = i(k'\mathcal{R})^{-1}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta,$$
$$\mathcal{R} = k(\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta + \mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta/k'), \tag{6.30}$$
$$\Psi = \mathcal{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\alpha, k)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\beta, k)\,e^{im\varphi},$$

где α, β принадлежат следующим интервалам комплексной плоскости: $\alpha \in [iK', iK' + 2K]$, $\beta \in [K, K + 2iK']$.

Для системы 16 параметры удовлетворяют условиям $\mu > 0$, $\rho < 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а уравнения с разделяющимися переменными имеют вид (6.27), причем

$$\mathcal{P}(\xi) = (\xi - a)(\xi - b)\xi, \quad a = \bar{b} = \alpha + i\beta.$$

Полагая $\mu = \mathrm{sn}^2(\gamma, t)$, $\rho = \mathrm{sn}^2(\theta, t)$, где $t = (s + is')(s - is')^{-1}$, $s^2 = (|a| - \mathrm{Re}\,a)/(2|a|)$, мы получаем решения

$$\Psi = \mathcal{R}^{1/2}\Lambda^p_{m-1/2}(\gamma, t)\,\Lambda^p_{m-1/2}(\theta, t)\,e^{im\varphi}, \tag{6.31}$$

где $\gamma \in [-iK',\ iK']$, $\theta \in [2K - iK',\ 2K + iK']$.

И наконец, для системы 17 (системы тороидальных координат) собственные функции имеют вид

$$\Psi = (\operatorname{ch}\xi + \sin\psi)^{1/2} E(\xi) \exp[i(l\psi + m\varphi)],$$
$$iJ_3\Psi = m\Psi, \quad (P_3 + K_3)\Psi = -2il\Psi,$$
$$\left[(\operatorname{sh}\xi)^{-1}\frac{d}{d\xi}\operatorname{sh}\xi\frac{d}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} - l^2 - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2\xi}\right)\right]E(\xi) = 0. \qquad (6.32)$$

Базис решений для этого уравнения образован присоединенными функциями Лежандра $P^m_{l-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$, $Q^m_{l-1/2}(\operatorname{ch}\xi)$.

Несложными вычислениями можно показать, что координатные поверхности во всех этих случаях являются циклидами. Для систем 14—17 некоторые из этих поверхностей являются циклидами вращения. Системы 12—16 довольно трудны для анализа, поэтому при исследовании уравнения Лапласа широко используется только система тороидальных координат 17. Система тороидальных координат имеет много общего с системой сферических координат. (Действительно, в случае комплексного уравнения Лапласа эти системы переходят друг в друга под действием комплексной конформной группы.) Для того чтобы разделить переменные в уравнении Лапласа, часто пользуются системой биполярных координат [13], но она конформно эквивалентна системе сферических координат. Однако эти две системы координат не эквивалентны относительно евклидовой группы, которая порождается $E(3)$ и растяжением $\exp(\alpha D)$.

Из семнадцати систем, допускающих R-разделение переменных для уравнения Лапласа, девять, а именно системы 2, 5—8, 14—17, соответствуют диагонализации оператора J_3. Эти системы обладают тем свойством, что их собственные функции принимают вид $\Psi(\mathbf{x}) = \Phi e^{im\varphi}$, $iJ_3\Psi = m\Psi$, где Φ — функция от остальных двух переменных. Если подставить в уравнение Лапласа это выражение для Ψ и полученный результат разделить на $e^{im\varphi}$, то мы получим дифференциальное уравнение для Φ, которое в цилиндрических координатах записывается так:

$$(\partial_{rr} + r^{-1}\partial_r - r^{-2}m^2 + \partial_{zz})\Phi(r, z) = 0. \qquad (6.33)$$

Уравнение (6.33) при фиксированном $m \geqslant 0$ является обобщенным осесимметрическим уравнением теории потенциала. Вещественная алгебра симметрии этого уравнения изоморфна алгебре $sl(2, R)$. Действительно, базис этой алгебры образован операторами K_3, P_3, D (см. (6.2)), причем соотношения коммутирования имеют вид

$$[D, P_3] = P_3, \quad [D, K_3] = -K_3, \quad [P_3, K_3] = -2D, \qquad (6.34)$$

а из тождества (6.13iii) следует, что (6.33) можно записать в эквивалентной операторной форме:

$$(^1/_2P_3^2 + {}^1/_2K_3^2 - D^2)\,\Phi = (^1/_4 + m^2)\,\Phi. \qquad (6.35)$$

В работе [38] (см. также [62]) показано, что пространство симметрических операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $sl(2, R)$ по модулю подпространства, порожденного оператором Казимира $^1/_2P_3^2 + {}^1/_2K_3^2 - D^2$, в результате действия группы симметрии $SL(2, R)$ разбивается на девять типов орбит. Девять перечисленных выше систем координат и являются как раз теми системами координат, которые допускают разделение переменных в уравнении (6.33), и легко проверить, что эти системы взаимно однозначно соответствуют девяти типам орбит; т. е. между списком операторов S_2, в котором J_3^2, S_2 определяют каждую систему, и списком представителей этих типов орбит имеется полное соответствие.

3.7. Тождества для решений с разделенными переменными уравнения Лапласа

Подобрать модель гильбертова пространства для решений уравнения Лапласа, такую, чтобы действие конформной группы задавалось унитарным представлением, невозможно. В самом деле, если бы такая модель существовала, то операторы импульса iP_j, $j = 1, 2, 3$, были бы самосопряженными операторами в этом гильбертовом пространстве. Однако из тождества $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 0$ и спектральной теоремы для самосопряженных операторов следует, что $P_j = 0$, а это приводит к противоречию.

Тем не менее, применяя метод Вейснера, можно получить соотношения, связывающие решения с разделенными переменными уравнения Лапласа, и, поступая так же, как в разд. 3.5, построить модели негильбертова пространства для этого уравнения. Рассмотрим выражение

$$\Psi(x, y, z) = \int_{C_1} d\beta \int_{C_2} dt\, t^{-1} h(\beta, t) \times$$
$$\times \exp\left[\frac{ix\beta}{2}(t + t^{-1}) + \frac{y\beta}{2}(t - t^{-1}) - \beta z\right] = I(h), \qquad (7.1)$$

где h — аналитическая функция в некоторой области из $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, содержащей контуры интегрирования $C_1 \times C_2$, причем $I(h)$ абсолютно сходится и под знаком интеграла допускается произ-