Глава 4
ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

4.1. Уравнение $\Psi_{tt} - \Delta_2\Psi = 0$

В этой главе мы рассмотрим вещественное волновое уравнение

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22})\Psi(x) = 0, \qquad x = (x_0, x_1, x_2). \tag{1.1}$$

Известно, что алгебра симметрий уравнения (1.1) десятимерна и имеет: базисные операторы импульса и энергии

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \qquad \alpha = 0, 1, 2, \tag{1.2}$$

производящие операторы однородных преобразований Лоренца

$$M_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1, \quad M_{01} = x_0\partial_1 + x_1\partial_0, \quad M_{02} = x_0\partial_2 + x_2\partial_0, \tag{1.3}$$

производящий оператор группы растяжений

$$D = -(1/2 + x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2) \tag{1.4}$$

и производящие операторы специальных конформных преобразований

$$\begin{aligned} K_0 &= -x_0 + (x\cdot x - 2x_0^2)\partial_0 - 2x_0x_1\partial_1 - 2x_0x_2\partial_2, \\ K_1 &= x_1 + (x\cdot x + 2x_1^2)\partial_1 + 2x_1x_0\partial_0 + 2x_1x_2\partial_2, \\ K_2 &= x_2 + (x\cdot x + 2x_2^2)\partial_2 + 2x_2x_0\partial_0 + 2x_2x_1\partial_1, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$x\cdot y = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 = x_0y_0 - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$

(Мы игнорируем тривиальную симметрию E.)

Для удобства введем еще один базис для этой алгебры, ясно показывающий изоморфизм между этой алгеброй и алгеброй $so(3,2)$. Определим $so(3,2)$ как десятимерную алгебру Ли вещественных (5×5)-матриц $\mathscr{A}$, таких, что $\mathscr{A}G^{3,2} + G^{3,2}\mathscr{A}^t = 0$, где

$$G^{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3}\mathscr{E}_{jj} - \sum_{k=4}^{5}\mathscr{E}_{kk},$$

а $\mathscr{E}_{ij}$ задано формулой (6.4) в разд. 3.6. Легко проверить, что матрицы

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ab} = \mathscr{E}_{ab} - \mathscr{E}_{ba} = -\Gamma_{ba}, && a \neq b \\
&\Gamma_{aB} = \mathscr{E}_{aB} + \mathscr{E}_{Ba} = \Gamma_{Ba}, && 1 \leqslant a,\ b \leqslant 3,\quad 4 \leqslant A,\ B \leqslant 5, \\
&\Gamma_{AB} = -\mathscr{E}_{AB} + \mathscr{E}_{BA} = -\Gamma_{BA}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

образуют базис для $so(3, 2)$, причем соотношения коммутирования имеют вид

$$\begin{aligned}
&[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{bc}\Gamma_{ad} + \delta_{ad}\Gamma_{bc} + \delta_{ca}\Gamma_{db} + \delta_{db}\Gamma_{ca}, \\
&[\Gamma_{aB}, \Gamma_{cd}] = -\delta_{ad}\Gamma_{cB} + \delta_{ac}\Gamma_{dB}, \quad [\Gamma_{Ab}, \Gamma_{45}] = \delta_{A5}\Gamma_{4b} - \delta_{A4}\Gamma_{5b}, \\
&[\Gamma_{aB}, \Gamma_{cD}] = \delta_{BD}\Gamma_{ac} - \delta_{ac}\Gamma_{BD}, \quad [\Gamma_{ab}, \Gamma_{45}] = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Этот Г-базис связан с нашим другим базисом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \Gamma_{14} + \Gamma_{45}, && P_1 = \Gamma_{12} + \Gamma_{25}, && P_2 = \Gamma_{13} + \Gamma_{35}, \\
&K_0 = \Gamma_{14} - \Gamma_{45}, && K_1 = \Gamma_{12} - \Gamma_{25}, && K_2 = \Gamma_{13} - \Gamma_{35}, \\
&M_{12} = \Gamma_{23}, && M_{01} = \Gamma_{42}, && M_{02} = \Gamma_{43}, \quad D = \Gamma_{15}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Вычисляя экспоненты операторов симметрии, можно получить локальную группу Ли преобразований операторов симметрии уравнения (1.1). В частности, оператор импульса и оператор Лоренца порождают группу Пуанкаре операторов симметрии

$$\Psi(x) \to \Psi(x\Lambda + a), \qquad a = (a_0, a_1, a_2), \qquad \Lambda \in SO(1, 2), \tag{1.9}$$

оператор растяжений порождает подгруппу

$$\exp(\lambda D)\Psi(x) = \exp(-\lambda/2)\Psi[\exp(-\lambda)x], \tag{1.10}$$

а операторы K_α порождают специальные конформные преобразования

$$\exp(a \cdot K)\Psi(x) = \\ = [1 + 2x \cdot a + (a \cdot a)(x \cdot x)]^{-1/2}\Psi\left(\frac{x + a(x \cdot x)}{1 + 2x \cdot a + (a \cdot a)(x \cdot x)}\right). \tag{1.11}$$

Кроме того, мы рассмотрим операторы инверсии, отражения в пространстве и отражения во времени

$$\begin{aligned}
&I\Psi(x) = [-x \cdot x]^{-1/2}\Psi(-x/(x \cdot x)), \quad S\Psi(x) = \Psi(x_0, -x_1, x_2), \\
&T\Psi(x) = \Psi(-x_0, x_1, x_2), \quad I = I^{-1}, \quad S = S^{-1}, \quad T = T^{-1},
\end{aligned} \tag{1.12}$$

которые не порождаются локальными операторами симметрии. Из выражения для оператора инверсии I следует, что

$$IK_\alpha I^{-1} = -P_\alpha, \quad IDI^{-1} = -D, \quad IM_{\alpha\beta}I^{-1} = M_{\alpha\beta}. \tag{1.13}$$

Поступая так же, как мы это делали в разд. 3.6, рассматривая уравнения Лапласа, можно показать, что волновое уравнение принадлежит классу I. Более того, хотя пространство симметрических операторов второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so(3, 2)$ 35-мерно, на пространстве решений уравнения (1.1) имеется 20 линейно независимых соотношений между этими операторами. Например, мы имеем соотношения

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 = K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 = 0, \\ &\text{(ii)} \quad \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2 = {}^1/_4 + \Gamma_{45}^2, \\ &\text{(iii)} \quad M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2 = {}^1/_4 - D^2, \\ &\text{(iv)} \quad \Gamma_{45}^2 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{51}^2 = {}^1/_4 + \Gamma_{23}^2, \end{aligned} \tag{1.14}$$

справедливые при применении к решениям уравнения (1.1).

Известно [46, 66, 139], что, формально применяя преобразование Фурье в переменных x_α, решение $\Psi(x)$ уравнения (1.1) можно представить в виде

$$\Psi(x) = (4\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\exp(i\mathbf{k}\cdot x) f(\mathbf{k}) + \exp(i\tilde{k}\cdot x) \tilde{f}(\mathbf{k})]\, d\mu(\mathbf{k}), \tag{1.15}$$

где $\tilde{k} = (-k_0, k_1, k_2)$, $k_0 = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$ и $d\mu(\mathbf{k}) = dk_1\, dk_2/k_0$. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$ — пространство всех упорядоченных пар комплекснозначных функций $F(\mathbf{k}) = \{f(\mathbf{k}), \tilde{f}(\mathbf{k})\}$, определенных в R^2 и таких, что

$$\iint (|f|^2 + |\tilde{f}|^2)\, d\mu(\mathbf{k}) < \infty$$

(интеграл берется в смысле Лебега). Рассмотрим индефинитное скалярное произведение в $\mathscr{H}$, заданное интегралом

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \iint (f\bar{g} - \tilde{f}\bar{\tilde{g}})\, d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.16}$$

Тогда [46, 66] функции Ψ, Φ, связанные с функциями $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ соотношением (1.15), удовлетворяют тождеству

$$\langle \Psi, \Phi \rangle \equiv \langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = 2i \iint\limits_{x_0 = t} (\Psi(x)\, \partial_0 \overline{\Phi}(x) - [\partial_0 \Psi(x)]\, \overline{\Phi}(x))\, dx_1\, dx_2, \tag{1.17}$$

не зависящему от t. (Чтобы быть более точными, тождество (1.17) можно получить из (1.16), если сначала рассмотреть плотное подпространство пространства $\mathscr{H}$, состоящее из C^∞ функций с компактным носителем, отграниченным от $(0, 0)$, а затем перейти к пределу. Для $\mathbf{F} \in \mathscr{H}$ соответствующая функция $\Psi(x)$ является слабым решением уравнения (1.1) в смысле теории обобщенных функций; функция может не быть дважды непрерывно дифференцируемой по каждой из переменных.)

Операторы (1.2)—(1.5), действуя на решения уравнения (1.1), индуцируют соответствующие операторы в $\mathscr{H}$, относительно которых подпространства $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ по отдельности инвариантны. В самом деле, повторным интегрированием по частям можно установить, что индуцированные операторы в подпространстве $\mathscr{H}_+$ имеют вид

$$\begin{aligned}
&P_0 = ik_0, \quad P_j = -ik_j, \quad j = 1, 2, \quad M_{12} = k_1\partial_2 - k_2\partial_1,\\
&M_{01} = k_0\partial_1, \quad M_{02} = k_0\partial_2, \qquad D = {}^1/_2 + k_1\partial_1 + k_2\partial_2,\\
&K_0 = ik_0(\partial_{11} + \partial_{22}), \qquad K_1 = i(k_1\partial_{11} - k_1\partial_{22} + 2k_2\partial_{12} + \partial_1),\\
&K_2 = i(-k_2\partial_{11} + k_2\partial_{22} + 2k_1\partial_{12} + \partial_2).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Индуцированные операторы в $\mathscr{H}_-$ имеют тот же вид (1.18), но только в каждом выражении k_0 заменен на $-k_0$. Более того, легко показать, что эти операторы являются косоэрмитовыми операторами на каждом из подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$.

Индуцированные операторы S, T в $\mathscr{H}$ имеют вид

$$S\mathbf{F}(k_1, k_2) = \mathbf{F}(-k_1, k_2), \qquad T\mathbf{F}(\mathbf{k}) = (\tilde{f}(\mathbf{k}), f(\mathbf{k})). \tag{1.19}$$

Таким образом, $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ инвариантны относительно оператора S, но под действием оператора T эти подпространства взаимозаменяются. Учитывая это свойство оператора T, мы будем в дальнейшем рассматривать только элементы гильбертова пространства $\mathscr{H}_+$, т. е. решения с положительной энергией

$$\Psi(x) = (4\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(ik \cdot x) f(\mathbf{k})\, d\mu(\mathbf{k}). \tag{1.20}$$

Скалярное произведение в $\mathscr{H}_+$ имеет вид

$$\langle f, g\rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{k})\, \bar{g}(\mathbf{k})\, d\mu(\mathbf{k}) \tag{1.21}$$

и

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, \Phi\rangle \equiv \langle f, g\rangle &= 4i \iint\limits_{x_0=t} \Psi(x)\, \partial_0 \bar{\Phi}(x)\, dx_1\, dx_2 =\\
&= 4i \iint\limits_{x_0=t} \bar{\Phi}(x)\, \partial_0 \Psi(x)\, dx_1\, dx_2.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Далее, если Ψ задано формулой (1.20), мы имеем

$$f(\mathbf{k}) = k_0\pi^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp(-ik \cdot x)\, dx_1\, dx_2. \tag{1.23}$$

Используя методы работы [66], можно показать, что подпространство $\mathscr{H}_+$ инвариантно относительно оператора I и

$$If(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \cos[(2l \cdot k)^{1/2}] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}) \qquad f \in \mathscr{H}_+, \quad I^2 = E, \tag{1.24}$$

где E — единичный оператор в $\mathscr{H}_+$. Ясно, что I допускает расширение до некоторого унитарного самосопряженного оператора в $\mathscr{H}_+$ с собственными значениями ± 1.

Если $\{\Psi_\alpha(x)\}$ — о. н. базис для подпространства $\mathscr{H}_+$, то (в смысле теории обобщенных функций)

$$\sum_\alpha \bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\alpha(x') = \Delta_+(x - x') = (16\pi^2)^{-1} \iint \exp[ik \cdot (x' - x)]\, d\mu(\mathbf{k}), \tag{1.25}$$

где обобщенная функция Δ_+ имеет вид

$$\Delta_+(x) = \begin{cases} 2\pi i (t^2 - r^2)^{-1/2}, & t > r, \\ -2\pi i (t^2 - r^2)^{-1/2}, & t < -r, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \\ 2\pi (r^2 - t^2)^{-1/2}, & -r < t < r, \quad t = x_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Обобщенная функция (1.26) вычисляется по аналогии с соответствующим выражением для четырехмерного пространства-времени [49]. Следовательно,

$$\Psi(x) = \langle \Psi, \Delta_+(x' - x) \rangle, \tag{1.27}$$

причем интегрирование выполняется по x'.

Известно, что если вычислить экспоненты представления алгебры $so(3, 2)$ в $\mathscr{H}_+$, индуцированного операторами (1.18), то мы получим глобальное неприводимое унитарное представление накрывающей группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ — компоненты единицы группы $SO(3, 2)$ (см. [46]). Максимальной связной компактной подгруппой группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ является группа $SO(3) \times SO(2)$, где группа $SO(3)$ порождается операторами Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23}, а группа $SO(2)$ — оператором Γ_{45}. Определим явное действие этой подгруппы в $\mathscr{H}_+$, а также действие некоторых других подгрупп группы $\widetilde{SO}(3, 2)$, представляющих известный интерес.

Операторы M_{01}, M_{02}, M_{12} порождают некоторую подгруппу группы $\widetilde{SO}(3, 2)$, изоморфную группе $SO(2, 1)$ (см. разд. 4.3). Действие этой подгруппы в $\mathscr{H}_+$ определяется соотношениями вида

$$\begin{gathered} \exp(\theta M_{12}) f(\mathbf{k}) = f(k_1 \cos\theta - k_2 \sin\theta,\ k_1 \sin\theta + k_2 \cos\theta), \\ \exp(aM_{01}) f(\mathbf{k}) = f(k_1(a),\ k_2), \\ k_1(a) = [e^a (k_1 + k_0)^2 - e^{-a} k_2^2]/2(k_1 + k_0), \qquad f \in \mathscr{H}_+. \end{gathered} \tag{1.28}$$

(Формулу для оператора M_{02} легко получить из формулы для M_{01}.)

Оператор P_α порождает подгруппу переносов группы $\widetilde{SO}(3,2)$:

$$\exp\left(\sum a_\alpha P_\alpha\right) f(\mathbf{k}) = \exp(ia \cdot k) f(\mathbf{k}). \tag{1.29}$$

Унитарные операторы вида $\exp\left(\sum a_\alpha K_\alpha\right)$ вычисляются не столь просто. В работе [59] показано, что

$$\exp(aK_0) f(\mathbf{s}) = -i(2\pi a)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[i(s_0 + l_0)/a] \times$$
$$\times \cos\{a^{-1}[2(s_0 l_0 + s_1 l_1 + s_2 l_2)]^{1/2}\} f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \tag{1.30}$$

$$\exp(aK_1) f(\mathbf{s}) = (8\pi|a|)^{-1} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[i(s_1 + l_1)/a] \times$$
$$\times \cos\left[\frac{s_1(l_2 + l_0) - l_1(s_2 + s_0)}{a(s_2 + s_0)^{1/2}(l_2 + l_0)^{1/2}}\right] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}) \tag{1.31}$$

при $f \in \mathscr{H}_+$ и

$$\exp[a(K_0 + K_1)] f(\mathbf{s}) = [4\pi i a(s_0 - s_1)]^{-1/2} \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(s_2 - w)^2}{4ia(s_0 - s_1)}\right] f\left(\frac{w^2 - (s_0 - s_1)^2}{2(s_0 - s_1)}, w\right) dw. \tag{1.32}$$

Оператор растяжений D порождает подгруппу

$$\exp(aD) f(\mathbf{k}) = \exp(a/2) f(e^a \mathbf{k}). \tag{1.33}$$

Теперь мы можем легко вычислить экспоненту компактного оператора $\Gamma_{45} = (P_0 - K_0)/2$. Действительно, операторы P_0, D и K_0 порождают подгруппу $SL(2, R)$ группы $\widetilde{SO}(3,2)$. Используя формулы (1.17) гл. 2, легко показать, что

$$\exp(2\theta\Gamma_{45}) = \exp(\operatorname{tg}(\theta) P_0) \exp(-K_0 \sin\theta \cos\theta) \exp(-2D \ln\cos\theta).$$

Вычисляя правую часть этого соотношения, получаем

$$\exp(2\theta\Gamma_{45}) f(\mathbf{k}) = i(2\pi)^{-1} \csc(\theta) \iint \exp[-i(k_0 + l_0)\operatorname{ctg}\theta] \times$$
$$\times \cos\{\csc(\theta)[2(k_0 l_0 + k_1 l_1 + k_2 l_2)]^{1/2}\} f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \qquad \theta \neq n\pi. \tag{1.34}$$

Подобно этому, операторы P_1, D, K_1 порождают подгруппу $SL(2, R)$ группы $\widetilde{SO}(3,2)$, и мы можем доказать соотношение

$$\exp(2\theta\Gamma_{12}) = \exp(\operatorname{tg}(\theta) P_1) \exp(K_1 \sin\theta \cos\theta) \exp(-2D \ln\cos\theta),$$
$$2\Gamma_{12} = K_1 + P_1,$$

или

$$\exp(2\theta\Gamma_{12}) f(\mathbf{k}) = (8\pi|\sin\theta|)^{-1} \exp(ik_1 \operatorname{ctg}\theta) \times$$
$$\times \iint \exp(il_1 \operatorname{ctg}\theta) \cos\left[\frac{k_1(l_2+l_0) - l_1(k_2+k_0)}{\sin\theta\,(k_2+k_0)^{1/2}(l_2+l_0)^{1/2}}\right] f(\mathbf{l})\, d\mu(\mathbf{l}), \quad \theta \neq n\pi. \tag{1.35}$$

Операторы (1.35) совместно с операторами $\exp(\theta M_{12})$ (см. (1.28)) определяют действие подгруппы $SO(3)$.

Все известные системы координат, допускающие R-разделение переменных для уравнения (1.1), соответствуют двумерному (коммутирующему) подпространству пространства симметрических операторов второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $so(3,2)$. Если коммутирующие операторы образуют базис такого подпространства, то соответствующие решения с разделенными переменными уравнения (1.1) характеризуются уравнениями на собственные значения

$$S_j\Psi = \lambda_j\Psi, \qquad j = 1,\ 2$$

(см. [59—61]). Системы координат считаются эквивалентными, если они отображаются друг в друга преобразованиями, порождаемыми операторами группы $\widetilde{SO}(3,2)$ и S, T и I. Если система координат, допускающая разделение переменных, соответствует подпространству с базисом $S_j = L_j^2$, $j = 1,\ 2$, таким, что $[L_1, L_2] = 0$ и $L_j \in so(3,2)$, мы называем такую систему *расщепляющейся*. В этом случае можно диагонализировать операторы первого порядка L_j. Такие системы наиболее изучены и просты в обращении. В более общем случае, когда система координат соответствует подпространству с базисом S_1, S_2, таким, что $S_1 = L^2$, $L \in so(3,2)$, мы говорим о *полурасщепляющейся* системе. В этом случае можно диагонализировать оператор первого порядка L. Если нет базиса S_1, S_2, такого, что оператор S_1 является квадратом некоторого $L \in so(3,2)$, то мы называем соответствующую систему *нерасщепляющейся*. Из всех систем координат, допускающих разделение переменных, нерасщепляющиеся системы являются наиболее сложными и реже всего используются в приложениях.

Детальное (но не исчерпывающее) исследование решений с R-разделенными переменными уравнения (1.1) проведено в работах [59—61]. В настоящей книге мы удовлетворимся рассмотрением некоторых наиболее важных полурасщепляющихся систем. Заданный оператор $L \in so(3,2)$ может соответствовать нескольким полурасщепляющимся системам (либо ни одной такой системе). Действительно, если Ψ удовлетворяет уравнению (1.1) и $L\Psi = i\lambda\Psi$, то, поскольку L — оператор симметрии урав-

нения (1.1), можно ввести новые переменные y_0, y_1, y_2, такие, что $L = \partial_{y_0} + f(y)$ (где функция f может быть тождественно равна нулю) и $\Psi(y) = r(y)\exp(i\lambda y_0)\Phi_\lambda(y_1, y_2)$, где r — заданная функция, удовлетворяющая уравнению $\partial_{y_0} r + fr = 0$. Тогда уравнение (1.1) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для функции Φ_λ от двух переменных y_1, y_2. Каждая полурасщепляющаяся система, рассматриваемая нами, соответствует системам, допускающим разделение переменных для полученного дифференциального уравнения. В частности, $S_1 = L^2$, а S_2 соответствует оператору симметрии второго порядка полученного уравнения.

В следующих разделах мы рассмотрим различные формы оператора L, которые приводят к полурасщепляющимся системам.

4.2. Оператор Лапласа на сфере

Прежде всего исследуем системы, соответствующие диагонализации оператора Γ_{45} (см. (1.8)). Ограничим наше унитарное неприводимое представление группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ в $\mathscr{H}_+$ на компактную подгруппу $SO(3)$; тогда это представление разбивается в прямую сумму неприводимых представлений D_l группы $SO(3)$, причем $\dim D_l = 2l + 1$. Определим соответствующий базис для $\mathscr{H}_+$, в котором происходит это разбиение. Таким базисом является базис собственных функций коммутирующих операторов Γ_{45} и $\Gamma_{23} = M_{12}$:

$$\Gamma_{45} f = i\lambda f, \quad \Gamma_{23} f = imf, \quad -i\Gamma_{45} = (k_0/2)(-\partial_{11} - \partial_{22} + 1). \tag{2.1}$$

При $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$, $k_0 = k$ легко показать, что о. н. базис собственных векторов имеет вид

$$f_m^{(l)}(\mathbf{k}) = [(l-m)!/\pi(l+m)!]^{1/2}(2k)^m e^{-k} L_{l-m}^{(2m)}(2k)\, e^{im\theta}, \tag{2.2}$$
$$\lambda = l + {}^1/_2, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad m = l, l-1, \ldots, -l.$$

Из этого результата и (1.14ii) видно, что множество $\{f_m^{(l)}\}$ при фиксированном l образует о. н. базис для представления D_l группы $SO(3)$. Кроме того, ограничение нашего представления группы $\widetilde{SO}(3, 2)$ на группу $SO(3)$ можно представить следующим образом: $SO(3) = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus D_l$. Из известных рекуррентных