

нения (1.1), можно ввести новые переменные  $y_0, y_1, y_2$ , такие, что  $L = \partial_{y_0} + f(y)$  (где функция  $f$  может быть тождественно равна нулю) и  $\Psi(y) = r(y) \exp(i\lambda y_0) \Phi_\lambda(y_1, y_2)$ , где  $r$  — заданная функция, удовлетворяющая уравнению  $\partial_{y_0}r + fr = 0$ . Тогда уравнение (1.1) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для функции  $\Phi_\lambda$  от двух переменных  $y_1, y_2$ . Каждая полурасщепляющаяся система, рассматриваемая нами, соответствует системам, допускающим разделение переменных для полученного дифференциального уравнения. В частности,  $S_1 = L^2$ , а  $S_2$  соответствует оператору симметрии второго порядка полученного уравнения.

В следующих разделах мы рассмотрим различные формы оператора  $L$ , которые приводят к полурасщепляющимся системам.

## 4.2. Оператор Лапласа на сфере

Прежде всего исследуем системы, соответствующие диагонализации оператора  $\Gamma_{45}$  (см. (1.8)). Ограничим наше унитарное неприводимое представление группы  $\widetilde{SO}(3, 2)$  в  $\mathcal{H}_+$  на компактную подгруппу  $SO(3)$ ; тогда это представление разбивается в прямую сумму неприводимых представлений  $D_l$  группы  $SO(3)$ , причем  $\dim D_l = 2l + 1$ . Определим соответствующий базис для  $\mathcal{H}_+$ , в котором происходит это разбиение. Таким базисом является базис собственных функций коммутирующих операторов  $\Gamma_{45}$  и  $\Gamma_{23} = M_{12}$ :

$$\Gamma_{45}f = i\lambda f, \quad \Gamma_{23}f = imf, \quad -i\Gamma_{45} = (k_0/2)(-\partial_{11} - \partial_{22} + 1). \quad (2.1)$$

При  $k_1 = k \cos \theta$ ,  $k_2 = k \sin \theta$ ,  $k_0 = k$  легко показать, что о.н. базис собственных векторов имеет вид

$$f_m^{(l)}(\mathbf{k}) = [(l-m)!/\pi(l+m)!]^{1/2} (2k)^m e^{-kL_{l-m}^{(2m)}(2k)} e^{im\theta}, \quad (2.2)$$

$$\lambda = l + \frac{1}{2}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad m = l, l-1, \dots, -l.$$

Из этого результата и (1.14ii) видно, что множество  $\{f_m^{(l)}\}$  при фиксированном  $l$  образует о.н. базис для представления  $D_l$  группы  $SO(3)$ . Кроме того, ограничение нашего представления группы  $\widetilde{SO}(3, 2)$  на группу  $SO(3)$  можно представить следующим образом:  $SO(3) = \sum_{l=0}^{\infty} \bigoplus D_l$ . Из известных рекуррентных

формул для многочленов Лагерра вытекают соотношения

$$\begin{aligned}\Gamma_{15} f_m^{(l)} &= \frac{1}{2} [(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2} f_m^{(l+1)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} [(l-m)(l+m)]^{1/2} f_m^{(l-1)}, \\ \Gamma_{42} f_m^{(l)} &= -\frac{1}{4} [(l+m+2)(l+m+1)]^{1/2} f_{m+1}^{(l+1)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} [(l-m)(l-m-1)]^{1/2} f_{m+1}^{(l-1)} + \\ &\quad + \frac{1}{4} [(l+m)(l+m-1)]^{1/2} f_{m-1}^{(l-1)} - \\ &\quad - \frac{1}{4} [l-m+1](l-m+2)]^{1/2} f_{m-1}^{(l+1)}. \quad (2.3)\end{aligned}$$

Используя (2.1), (2.3) и взяв коммутаторы, можно определить действие оператора  $\Gamma_{ab}$  на этот базис.

Следует указать на тесную связь между уравнением на собственные значения  $\Gamma_{45}f = i\lambda f$  и квантовой задачей Кеплера в двумерном пространстве

$$\begin{aligned}Hg &= \mu g, \quad H = -\partial_{xx} - \partial_{yy} + e/r, \\ r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \iint_{R^2} |g|^2 dx dy < \infty. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Эти две задачи на собственные значения можно идентифицировать в предположении, что  $k_1 = x(-\mu)^{1/2}$ ,  $k_2 = y(-\mu)^{1/2}$ ,  $\mu = -e^2/4\lambda^2$ . Данные задачи на собственные значения определены на гильбертовых пространствах с различными скалярными произведениями, но из теоремы о вириале [47] следует, что если собственное значение энергии  $\mu$  принадлежит дискретному спектру оператора  $H$ , а  $g$  — соответствующий собственный вектор, то  $g$  также имеет конечную норму в  $\mathcal{H}_+$ . Обратно, если  $f$  —

собственная функция оператора  $\Gamma_{45}$ , то  $\iint |f|^2 dx dy < \infty$ , а  $f$  соответствует собственному значению энергии  $\mu$ , принадлежащему дискретному спектру оператора  $H$ . Поскольку собственные значения  $\lambda$  оператора  $\Gamma_{45}$  определяются соотношением  $\lambda = l + \frac{1}{2}$ ,  $l = 0, 1, \dots$ , отсюда следует, что собственные значения дискретного спектра оператора  $H$  имеют вид  $\mu = -e^2/4(l + \frac{1}{2})^2$ . Это вполне удовлетворительное объяснение строения дискретного спектра оператора  $H$  не проливает свет на строение непрерывного спектра оператора  $H$ , поскольку оператор  $\Gamma_{45}$  имеет только дискретный спектр.

Используя отображение (1.20), можно вычислить соответствующий о.н. базис решений с положительной энергией урав-

нения (1.1):

$$\Psi_m^{(l)}(x) = \left[ \frac{(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} \exp \left[ im \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp [ (ix_0 - 1)k ] (2k)^m J_m(kr) L_{l-m}^{(2m)}(2k) dk, \quad (2.5)$$

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha.$$

В координатах

$$x_0 = \sin \psi / (\cos \sigma - \cos \psi), \quad x_1 = \sin \sigma \cos \alpha / (\cos \sigma - \cos \psi), \quad (2.6) \\ x_2 = \sin \sigma \sin \alpha / (\cos \sigma - \cos \psi)$$

переменные в уравнении (1.1)  $R$ -разделяются и формула (2.5) дает

$$\Psi_m^{(l)}(x) = (-i)^{m-1} [(\cos \sigma - \cos \psi) / (4l + 2)]^{1/2} \times \\ \times \exp [-i\psi(l + 1/2)] Y_l^m(\sigma, \alpha), \quad (2.7)$$

где  $Y_l^m$  — сферическая гармоника. (Параметры всегда можно выбрать таким образом, чтобы  $\cos \sigma - \cos \psi > 0$ ; см. [62].) Действительно, на пространстве решений уравнения (1.1) мы имеем

$$\Gamma_{45} = -\partial_\psi + \frac{\sin \psi}{2(\cos \sigma - \cos \psi)}, \quad \Gamma_{23} = \partial_\alpha, \quad (2.8)$$

и поэтому

$$\Psi_m^{(l)} = (\cos \sigma - \cos \psi)^{1/2} \exp [-i\psi(l + 1/2)] \exp (ima) g(\sigma).$$

Подставляя последнее выражение в (1.1), мы находим, что переменные  $R$ -разделяются и  $g(\sigma)$  является линейной комбинацией функций  $P_l^m(\cos \sigma)$ ,  $Q_l^m(\cos \sigma)$ . Вычисляя интеграл (2.5) для частных значений параметра (например, для  $\sigma = 0, \pi$ ), мы получаем формулу (2.7).

Имеется другая модель нашего неприводимого представления накрывающей группы  $\widetilde{SO}(3, 2)$ , для которой собственные функции операторов  $\Gamma_{45}$  и  $\Gamma_{23}$  принимают исключительно простой вид. Пространство представлений является гильбертовым пространством Баргманна — Сегала  $\mathcal{F}_2$ , состоящим из всех целых функций  $h(z_1, z_2)$ , таких, что [12]

$$\int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} |h|^2 d\xi(z) < \infty, \quad (2.9)$$

$$d\xi(z) = \pi^{-2} \exp [-(|z_1|^2 + |z_2|^2)] dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, z_j = x_j + iy_j.$$

Скалярное произведение имеет вид

$$\langle f, h \rangle = \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} f \bar{h} d\xi(z).$$

Пространство нашего представления не совпадает с  $\mathcal{F}_2$ , но является подпространством  $\mathcal{F}_2^+$ , состоящим из всех функций  $h \in \mathcal{F}_2$ , таких, что  $h(-z_1, -z_2) = h(z_1, z_2)$ . Функции

$$\begin{aligned} f_m^{(l)}(z) &= z_1^{l+m} z_2^{l-m} / [(l+m)! (l-m)!]^{1/2}, \\ l &= 0, 1, 2, \dots, m = l, \dots, -l, \end{aligned} \quad (2.10)$$

образуют о. н. базис для  $\mathcal{F}_2^+$ . Полагая

$$\begin{aligned} \Gamma_{45} &= \frac{i}{2} (z_1 \partial_{z_1} + z_2 \partial_{z_2} + 1), & \Gamma_{15} &= \frac{1}{2} (z_1 z_2 - \partial_{z_1 z_2}), \\ \Gamma_{23} &= \frac{i}{2} (z_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_2}), & \Gamma_{42} &= \frac{1}{4} (\partial_{z_1 z_1} + \partial_{z_2 z_2} - z_1^2 - z_2^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

и сравнивая эти выражения с (2.3), можно видеть, что имеется новая модель нашего представления группы  $\widetilde{SO}(3, 2)$ , в которой функции  $f_m^{(l)}(\mathbf{k})$  можно отождествить с функциями (2.10). Явное унитарное отображение  $U$  из  $\mathcal{H}^+$  в  $\mathcal{F}_2^+$ , коммутирующее с групповым действием, имеет вид

$$Uf(\mathbf{z}) = \iint_{R^2} U(\mathbf{k}, \mathbf{z}) f(\mathbf{k}) d\mu(\mathbf{k}), \quad f \in \mathcal{H}^+, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} U(\mathbf{k}, \mathbf{z}) &= \sum_{l,m} \bar{f}_m^{(l)}(\mathbf{k}) f_m^{(l)}(\mathbf{z}) = \pi^{-1/2} \exp(-k + z_1 z_2) \times \\ &\times \operatorname{ch}\{\sqrt{2k} [z_1 \exp(i\theta/2) - z_2 \exp(-i\theta/2)]\}, \\ k_1 &= k \cos \theta, \quad k_2 = k \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(Заметим, что  $\bar{f}_m^{(l)}(\mathbf{k}) \in \mathcal{H}^+$  и  $f_m^{(l)}(\mathbf{z}) \in \mathcal{F}_2^+$ .)

Для того чтобы понять, какую роль играют координаты (2.6), следует заметить, что если  $\Psi$  — решение уравнения (1.1), такое, что  $\Gamma_{45}\Psi = i(l + 1/2)\Psi$ , то  $\Psi(\sigma, \alpha, \psi) = (\cos \alpha - \cos \psi)^{1/2} \exp[-i\psi(l + 1/2)]\Phi(\sigma, \alpha)$ , где  $\Phi$  — собственная функция оператора Лапласа на сфере (см. уравнение (2.20) разд. 3.2 при  $\sigma = \theta, \alpha = \phi$ ). Как мы видели в разд. 3.3, уравнение (2.20) допускает решения с разделенными переменными в двух системах координат. Для первой системы (сферические координаты  $\{\sigma, \alpha\}$ ) мы имеем решения уравнения (1.1) с  $R$ -разделенными переменными вида (2.7), которые диагонализируют операторы

$$1. \quad \Gamma_{45}^2, \quad \Gamma_{23}^2.$$

Однако имеется также система типа Ламе, которая приводит к решениям уравнения (1.1) с  $R$ -разделенными переменными, диа-

гонализирующими операторы

$$2. \quad \Gamma_{45}^2, \quad \Gamma_{12}^2 + a^2 \Gamma_{13}^2, \quad a > 0.$$

Матричные элементы для этих базисов уже были вычислены нами в разд. 3.3.

### 4.3. Диагонализация операторов $P_0$ , $P_2$ и $D$

Теперь найдем системы координат, допускающие разделение переменных уравнения (1.1), такие, чтобы соответствующие базисные функции  $\Psi$  были собственными функциями оператора  $P_0$ :  $P_0\Psi = i\omega\Psi$ . Для таких систем мы имеем  $\Psi(x) = \exp(i\omega x_0)\Phi(x_1, x_2)$ , где

$$(\partial_{11} + \partial_{22} + \omega^2)\Phi = 0. \quad (3.1)$$

Таким образом, уравнение для определения собственных функций сводится к уравнению Гельмгольца. Теперь  $P_0$  коммутирует с каждым элементом в евклидовой алгебре Ли  $\mathcal{E}(2)$ , порождающей операторами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M_{12}$ ; но, как известно из гл. 1,  $\mathcal{E}(2)$  является алгеброй симметрии уравнения (3.1). Кроме того, уравнение (3.1) допускает решения с разделенными переменными в четырех системах координат, причем каждая из этих систем соответствует оператору симметрии второго порядка, являющемуся элементом обвертывающей алгебры алгебры  $\mathcal{E}(2)$ ; см. табл. 1. Четыре системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения (1.1), характеризуются диагонализацией операторов, представленных в табл. 18.

Условие  $P_0f = i\omega f$  в  $\mathcal{H}_+$  влечет равенство  $f(k) = \delta(k - \omega)g_\omega(\theta)$ , где  $\omega > 0$ ,  $k_1 = k \cos \theta$ ,  $k_2 = k \sin \theta$ . Для того чтобы найти функции  $g_\omega$ , достаточно рассмотреть гильбертово пространство  $L_2(S_2)$ , действие группы  $E(2)$  в котором описывается при помощи операторов

$$P_1 = -i\omega \cos \theta, \quad P_2 = -i\omega \sin \theta, \quad M_{12} = \partial_\theta.$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое представление группы  $E(2)$  в  $L_2(S_2)$ . Как только собственные функции

Таблица 18

3	$P_0^2, P_1^2$	Декартовы
4	$P_0^2, M_{12}^2$	Полярные
5	$P_0^2, \{M_{12}, P_2\}$	Параболического цилиндра
6	$P_0^2, M_{12}^2 + a^2 P_2^2$	Эллиптические