гонализирующими операторы

2. $\Gamma_{45}^2$, $\Gamma_{12}^2 + a^2\Gamma_{13}^2$, $a > 0$.

Матричные элементы для этих базисов уже были вычислены нами в разд. 3.3.

## 4.3. Диагонализация операторов $P_0$, $P_2$ и $D$

Теперь найдем системы координат, допускающие разделение переменных уравнения (1.1), такие, чтобы соответствующие базисные функции $\Psi$ были собственными функциями оператора $P_0$: $P_0\Psi = i\omega\Psi$. Для таких систем мы имеем $\Psi(x) = \exp(i\omega x_0)\Phi(x_1, x_2)$, где

$$(\partial_{11} + \partial_{22} + \omega^2)\Phi = 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, уравнение для определения собственных функций сводится к уравнению Гельмгольца. Теперь $P_0$ коммутирует с каждым элементом в евклидовой алгебре Ли $\mathscr{E}(2)$, порождаемой операторами $P_1$, $P_2$, $M_{12}$; но, как известно из гл. 1, $\mathscr{E}(2)$ является алгеброй симметрии уравнения (3.1). Кроме того, уравнение (3.1) допускает решения с разделенными переменными в четырех системах координат, причем каждая из этих систем соответствует оператору симметрии второго порядка, являющемуся элементом обертывающей алгебры алгебры $\mathscr{E}(2)$; см. табл. 1. Четыре системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения (1.1), характеризуются диагонализацией операторов, представленных в табл. 18.

Условие $P_0 f = i\omega f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет равенство $f(\mathbf{k}) = \delta(k - \omega) g_\omega(\theta)$, где $\omega > 0$, $k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$. Для того чтобы найти функции $g_\omega$, достаточно рассмотреть гильбертово пространство $L_2(S_2)$, действие группы $E(2)$ в котором описывается при помощи операторов

$$P_1 = -i\omega\cos\theta, \quad P_2 = -i\omega\sin\theta, \quad M_{12} = \partial_\theta.$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое представление группы $E(2)$ в $L_2(S_2)$. Как только собственные функции

Таблица 18

| | | |
|---|---|---|
| 3 | $P_0^2$, $P_1^2$ | Декартовы |
| 4 | $P_0^2$, $M_{12}^2$ | Полярные |
| 5 | $P_0^2$, $\{M_{12}, P_2\}$ | Параболического цилиндра |
| 6 | $P_0^2$, $M_{12}^2 + d^2P_2^2$ | Эллиптические |

$g_{\omega\mu}(\theta)$ второго оператора в строках 3—6 табл. 18 будут определены, соответствующие решения $\Psi_{\omega\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно найти из соотношения

$$\Psi_{\omega\mu}(x) = (4\pi)^{-1} \exp(i\omega x_0) \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i\omega(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)]\, g_{\omega\mu}(\theta)\, d\theta. \tag{3.2}$$

Заметим, что эта модель фактически тождественна круговой модели, изученной нами в гл. 1. Следовательно, вычисленные в гл. 1 спектральные разложения и м. э. с. б. можно использовать для волнового уравнения.

Теперь найдем системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении (1.1) и такие, что базисные функции $\Psi$ являются собственными функциями оператора $P_2$: $P_2\Psi = -i\omega\Psi$. Для таких систем $\Psi(x) = \exp(-i\omega x_2)\Phi(x_0, x_1)$, причем

$$(\partial_{00} - \partial_{11} + \omega^2)\Phi = 0. \tag{3.3}$$

Оператор $P_2$ коммутирует с подалгеброй $\mathscr{E}(1, 1)$, порождаемой операторами $P_0$, $P_1$, $M_{01}$, а $\mathscr{E}(1, 1)$ является алгеброй симметрии уравнения (3.3). Это уравнение имеет решения с разделенными переменными в десяти системах координат, которым соответствуют десять операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $\mathscr{E}(1, 1)$; см. табл. 2. В табл. 19 перечисляются пары коммутирующих операторов, отвечающих соответствующим решениям с разделенными переменными уравнения (1.1). Случай 3′ эквивалентен случаю 3 табл. 18.

Условие $P_2 f = -i\omega f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет соотношение $f(\mathbf{k}) = \delta(k_2 - \omega) g_\omega(\zeta)$, где $-\infty < \omega < \infty$, $k_1 = |k_2| \operatorname{sh}\zeta$, $k_0 = |k_2| \operatorname{ch}\zeta$. Задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2(R)$, в котором действие группы $E(1, 1)$ задается операторами

$$P_0 = i|\omega| \operatorname{ch}\xi, \qquad P_1 = -i|\omega| \operatorname{sh}\xi, \qquad M_{01} = \partial_\xi. \tag{3.4}$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое представление группы $E(1, 1)$ в $L_2(R)$. Коль скоро собственные функции $g_{\omega\mu}(\xi)$ второго оператора в строках 7—15 табл. 19 определены,

Таблица 19

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3′ | $P_2^2, P_0, P_1$ | 11 | $P_2^2, M_{01}^2 - P_0P_1$ |
| 7 | $P_2^2, M_{01}^2$ | 12 | $P_2^2, M_{01}^2 + (P_0 + P_1)^2$ |
| 8 | $P_2^2, \{M_{01}, P_1\}$ | 13 | $P_2^2, M_{01}^2 - (P_0 + P_1)^2$ |
| 9 | $P_2^2, \{M_{01}, P_0\}$ | 14 | $P_2^2, M_{01}^2 + P_1^2$ |
| 10 | $P_2^2, \{M_{01}, P_0 - P_1\} + (P_0 + P_1)^2$ | 15 | $P_2^2, M_{01}^2 - P_1^2$ |

соответствующие решения $\Psi_{\omega\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить, используя формулу

$$\Psi_{\omega\mu}(x) = (4\pi)^{-1} \exp(-i\omega x_2) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i|\omega|(x_0 \operatorname{ch}\xi - x_1 \operatorname{sh}\xi)]\, g_{\omega\mu}(\xi)\, d\xi. \tag{3.5}$$

Данная модель идентична $L_2(R)$-модели гл. 1, и поэтому вычисленные там спектральные разложения и м. э. с. б. можно использовать и для волнового уравнения.

Определим системы координат, допускающие разделение переменных уравнения (1.1) и такие, что базисные функции $\Psi$ являются собственными функциями оператора $D$: $D\Psi = -i\nu\Psi$. В этом случае мы имеем $\Psi(x) = \rho^{i\nu - 1/2}\Phi(s)$, где

$$x_\alpha = \rho s_\alpha \qquad (\rho \geqslant 0), \qquad s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 = \varepsilon,$$

а $\varepsilon$ равно или $\pm 1$, или 0 в зависимости от того, какое из соотношений $x \cdot x > 0$, $x \cdot x < 0$ или $x \cdot x = 0$ имеет место. Из (1.14iii) следует, что

$$(M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2)\Phi(s) = (\nu^2 + {}^1/_4)\Phi(s). \tag{3.6}$$

Операторы $M_{\alpha\beta}$ (см. (1.3)) удовлетворяют соотношениям коммутирования

$$[M_{12}, M_{01}] = -M_{02}, \quad [M_{12}, M_{02}] = M_{01}, \quad [M_{01}, M_{02}] = M_{12}; \tag{3.7}$$

следовательно, они образуют базис подалгебры $sl(2, R) \cong \cong so(2, 1)$ (см. разд. 2.1). Теперь оператор $D$ коммутирует с этой подалгеброй, а $SO(2, 1)$ является группой симметрии уравнения (3.6). Оператор Казимира $M_{12}^2 - M_{01}^2 - M_{02}^2$ коммутирует со всеми элементами алгебры $so(2, 1)$. Как показано в работе [38], пространство операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $so(2, 1)$ по модулю оператора Казимира разбивается сопряженным действием группы $SO(2, 1)$ на девять типов орбит. (Группы $SO(2, 1)$ и $SL(2, R)$ локально изоморфны.) Более того, приведенное уравнение (3.6) допускает решения с разделенными переменными в девяти системах координат, причем каждая из этих систем соответствует единственной орбите оператора. Системы координат для $\varepsilon = 1$ можно найти в [57, 107], причем для $\varepsilon = 1$ уравнение (3.6) является уравнением на собственные значения *для оператора Лапласа на гиперболоиде*. Системы координат для $\varepsilon = \pm 1$, 0 приведены в работе [60]. Поскольку в вышеуказанных работах проводится подробный анализ систем координат для перечисленных случаев, мы здесь указываем (табл. 20) только функциональные формы решений с разделенными переменными уравнения (3.6), названия систем координат и пары коммутирующих операторов,

Таблица 20

| | Операторы | Координаты | Функции от разделенных переменных |
|---|---|---|---|
| 16 | $D^2$, $M_{12}^2$ | Сферические | Экспоненциальная<br>Присоединенная Лежандра |
| 17 | $D^2$, $M_{01}^2$ | Эквидистантные | Экспоненциальная<br>Присоединенная Лежандра |
| 7′ | $D^2$, $(M_{12}-M_{02})^2$ | Гороциклические | Экспоненциальная<br>Макдональда |
| 18 | $D^2$, $M_{12}^2+a^2M_{01}^2$ | Эллиптические | Периодическая Ламе<br>Периодическая Ламе |
| 19 | $D^2$, $M_{01}^2-a^2M_{12}^2$<br>$0<a<1$ | Гиперболические | Ламе — Вангерина<br>Ламе — Вангерина |
| 20 | $D^2$, $aM_{01}^2-\{M_{12}, M_{02}\}$,<br>$0<a$ | Полугиперболические | Ламе — Вангерина<br>Ламе — Вангерина |
| 21 | $D^2$, $aM_{01}^2+M_{02}^2+M_{12}^2-$<br>$-\{M_{12}, M_{02}\}$,<br>$0<a$ | Эллиптико-параболические | Присоединенная Лежандра<br>Присоединенная Лежандра |
| 22 | $D^2$, $-aM_{01}^2+M_{02}^2+$<br>$+M_{12}^2-\{M_{12}, M_{02}\}$,<br>$0<a$ | Гиперболико-параболические | Присоединенная Лежандра<br>Присоединенная Лежандра |
| 23 | $D^2$, $\{M_{01}, M_{02}\}-$<br>$-\{M_{12}, M_{01}\}$ | Полукруговые параболические | Бесселя<br>Макдональда |

связанных с соответствующими решениями с разделенными переменными уравнения (1.1). Система 7′ эквивалентна системе 7.

Условие $Df=-i\nu f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет соотношение $f(\mathbf{k})=k^{-i\nu-1/2}h_\nu(\theta)$, где $-\infty<\nu<\infty$, $k_1=k\cos\theta$, $k_2=k\sin\theta$. Таким образом, задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства, в котором действие группы $SO(2,1)$ задается операторами

$$M_{12}=\partial_\theta,\qquad M_{01}=-\sin\theta\partial_\theta-(i\nu+{}^1/_2)\cos\theta,$$
$$M_{02}=\cos\theta\partial_\theta-(i\nu+{}^1/_2)\sin\theta. \tag{3.8}$$

Эти операторы определяют унитарное неприводимое однозначное представление группы $SO(2,1)$, принадлежащее основной серии: $l=-{}^1/_2+i|\nu|$ (см. [11, 120]). Коль скоро собственные функции $h_{\nu\alpha}(\theta)$ второго оператора в строках 16—23 табл. 20

определены, соответствующие решения $\Psi_{\nu\alpha}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить, используя формулу

$$\Psi_{\nu\alpha}(x) = \rho^{i\nu-1/2}(4\pi)^{-1}\Gamma(1/2 - i\nu)\int_0^{2\pi}\exp[\pm i\pi(1/2 - i\nu)/2]\times$$
$$\times|s_0 - s_1\cos\theta - s_2\sin\theta|^{i\nu-1/2}h_{\nu\alpha}(\theta)\,d\theta, \qquad (3.9)$$

где имеет место знак $+$, когда $s_0 - s_1\cos\theta - s_2\sin\theta > 0$, и знак $-$, когда это выражение $<0$. Спектральные разложения операторов 16—23 и различные м. э. с. б., вычисленные в $L_2(S_2)$-модели, можно найти в [57]. (Вычисление матричных элементов смешанных базисов, соответствующих системам координат, которые отвечают различным подгруппам, см. в [53].)

## 4.4. Уравнение Шредингера и уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

Особый интерес представляют системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении (1.1) и такие, что базисные функции $\Psi$ являются собственными функциями оператора $P_0 + P_1$: $(P_0 + P_1)\Psi = i\beta\Psi$. В этом случае мы имеем $\Psi(x) = e^{is\beta}\Phi(t, x_2)$, где $2s = x_0 + x_1$, $2t = x_1 - x_0$. Приведенное уравнение для $\Phi$ является уравнением Шредингера для свободной частицы

$$(i\beta\partial_t + \partial_{x_2x_2})\Phi(t, x_2) = 0. \qquad (4.1)$$

Это уравнение имеет операторы симметрии

$$\mathscr{K}_{-1} = P_2, \quad \mathscr{K}_{-2} = P_1 - P_0, \quad \mathscr{K}_0 = P_0 + P_1, \quad \mathscr{K}_1 = 1/2(M_{02} - M_{12}),$$
$$\mathscr{K}^0 = -D - M_{01}, \quad \mathscr{K}_2 = 1/2(K_0 + K_1), \qquad (4.2)$$

коммутирующие с $P_0 + P_1 = \mathscr{K}_0$. Как было показано в разд. 2.1, эти операторы образуют базис для шестимерной алгебры Шредингера $\mathscr{G}_2$ — алгебры симметрии уравнения (4.1). (Заметим, что перенормировкой $t$ и $x_2$ константу $\beta$ в уравнении (4.1) можно сделать равной 1.) Пары коммутирующих операторов, соответствующие системам координат, которые допускают решения с разделенными переменными уравнения (4.1), перечислены в табл. 21. (Координаты 3″ эквивалентны координатам 3 табл. 18.) Эти результаты следуют из табл. 6. Заметим, что в этом случае определяющие операторы в обертывающей алгебре имеют первый, а не второй порядок. Это объясняется тем, что в уравнениях с разделенными переменными данные операторы имеют первый порядок. Все перечисленные ранее системы координат полуподгрупп были ортогональны относительно метрики Минковского,