определены, соответствующие решения $\Psi_{\nu\alpha}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить, используя формулу

$$\Psi_{\nu\alpha}(x) = \rho^{i\nu-1/2}(4\pi)^{-1}\Gamma(1/2 - i\nu)\int_0^{2\pi}\exp[\pm i\pi(1/2 - i\nu)/2]\times$$
$$\times|s_0 - s_1\cos\theta - s_2\sin\theta|^{i\nu-1/2}h_{\nu\alpha}(\theta)\,d\theta, \qquad (3.9)$$

где имеет место знак $+$, когда $s_0 - s_1\cos\theta - s_2\sin\theta > 0$, и знак $-$, когда это выражение <0. Спектральные разложения операторов 16—23 и различные м. э. с. б., вычисленные в $L_2(S_2)$-модели, можно найти в [57]. (Вычисление матричных элементов смешанных базисов, соответствующих системам координат, которые отвечают различным подгруппам, см. в [53].)

4.4. Уравнение Шредингера и уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

Особый интерес представляют системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора $P_0 + P_1$: $(P_0 + P_1)\Psi = i\beta\Psi$. В этом случае мы имеем $\Psi(x) = e^{is\beta}\Phi(t, x_2)$, где $2s = x_0 + x_1$, $2t = x_1 - x_0$. Приведенное уравнение для Φ является уравнением Шредингера для свободной частицы

$$(i\beta\partial_t + \partial_{x_2x_2})\Phi(t, x_2) = 0. \qquad (4.1)$$

Это уравнение имеет операторы симметрии

$$\mathscr{K}_{-1} = P_2, \quad \mathscr{K}_{-2} = P_1 - P_0, \quad \mathscr{K}_0 = P_0 + P_1, \quad \mathscr{K}_1 = 1/2(M_{02} - M_{12}),$$
$$\mathscr{K}^0 = -D - M_{01}, \quad \mathscr{K}_2 = 1/2(K_0 + K_1), \qquad (4.2)$$

коммутирующие с $P_0 + P_1 = \mathscr{K}_0$. Как было показано в разд. 2.1, эти операторы образуют базис для шестимерной алгебры Шредингера $\mathscr{G}_2$ — алгебры симметрии уравнения (4.1). (Заметим, что перенормировкой t и x_2 константу β в уравнении (4.1) можно сделать равной 1.) Пары коммутирующих операторов, соответствующие системам координат, которые допускают решения с разделенными переменными уравнения (4.1), перечислены в табл. 21. (Координаты 3″ эквивалентны координатам 3 табл. 18.) Эти результаты следуют из табл. 6. Заметим, что в этом случае определяющие операторы в обертывающей алгебре имеют первый, а не второй порядок. Это объясняется тем, что в уравнениях с разделенными переменными данные операторы имеют первый порядок. Все перечисленные ранее системы координат полуподгрупп были ортогональны относительно метрики Минковского,

Таблица 21

3″	$P_0+P_1,\ P_2$	Свободная частица
24	$P_0+P_1,\ P_0-P_1-{}^1/_4K_0-{}^1/_4K_1$	Гармонический осциллятор
25	$P_0+P_1,\ P_0-P_1+aM_{12}-aM_{02},\ a\neq 0$	Линейный потенциал
26	$P_0+P_1,\ D+M_{01}$	Репульсивный осциллятор

однако четыре системы координат, перечисленные в табл. 21, неортогональны.

Условие $(P_0+P_1)f=i\beta f$ в $\mathscr{H}_+$ влечет $f(\mathbf{k})=u\delta(u-\beta)l_\beta(v)$, где $\beta>0$, $u=k_0-k_1$, $v=k_2$. Таким образом, вычисление функции l_β сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2(R)$, в котором действие группы Шредингера задается операторами

$$\mathscr{K}_0=i\beta,\quad \mathscr{K}_{-1}=-iv,\quad \mathscr{K}_1=(\beta/2)\partial_v,\quad \mathscr{K}^0=-{}^1/_2-v\partial_v,$$
$$\mathscr{K}_{-2}=-iv^2/\beta,\quad \mathscr{K}_2=-i(\beta/2)\partial_{vv}. \tag{4.3}$$

Как показано в разд. 2.1, эти операторы определяют неприводимое унитарное представление группы Шредингера в $L_2(R)$. (Действительно, при $\beta=1$, применяя преобразование Фурье, можно показать, что операторы (1.24) (см. разд. 2.1) унитарно эквивалентны операторам, рассматриваемым в настоящем разделе, а при $\beta\neq 1$ результаты, полученные нами ранее, можно модифицировать, с тем чтобы получить глобальное групповое действие.) Как только собственные функции $l_{\beta\mu}(v)$ вторых операторов в строках 3″, 24—26 табл. 21 будут определены, соответствующие решения $\Psi_{\beta\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно получить из формулы

$$\Psi_{\beta\mu}(x)=(4\pi)^{-1}\exp(i\beta s)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[-i(v^2t/\beta+vx_2)]\,l_{\beta\mu}(v)\,dv. \tag{4.4}$$

Теперь определим системы координат, допускающие разделение переменных для уравнения (1.1) и такие, что базисные функции Ψ являются собственными функциями оператора M_{12}: $M_{12}\Psi=im\Psi$. Имеется соотношение $\Psi(x)=e^{im\varphi}\Phi(x_0,r)$, где $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$, а функция Φ удовлетворяет уравнению Эйлера — Пуассона — Дарбу [1])

$$(\partial_{00}-\partial_{rr}-r^{-1}\partial_r+m^2r^{-2})\Phi=0, \tag{4.5}$$

[1]) В дальнейшем будем называть это уравнение уравнением ЭПД. — *Прим. перев.*

или, как следует из (1.14iv),

$$(\Gamma_{45}^2 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{51}^2)\Phi = (\Gamma_{23}^2 + {}^1/_4)\Phi = -(m + {}^1/_2)(m - {}^1/_2)\Phi. \quad (4.6)$$

Алгеброй симметрии уравнения (4.5) является алгебра $sl(2, R)$, порождаемая операторами Γ_{45}, Γ_{41}, Γ_{51}, а группой симметрии этого уравнения является (если m целое число) группа $SL(2, R)$:

$$[\Gamma_{41}, \Gamma_{51}] = -\Gamma_{45}, \quad [\Gamma_{41}, \Gamma_{45}] = -\Gamma_{51}, \quad [\Gamma_{51}, \Gamma_{45}] = \Gamma_{41}. \quad (4.7)$$

В работе [62] показано, что переменные в уравнении ЭПД R-разделяются в точности для девяти систем координат, соответствующих девяти типам $SL(2, R)$-орбит операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры $sl(2, R)$ по модулю оператора Казимира $\Gamma_{45}^2 - \Gamma_{41}^2 - \Gamma_{51}^2$. В табл. 22 приведены только операторы, отвечающие решениям с R-разделенными переменными уравнения (1.1), а также соответствующие решения с R-разделенными переменными уравнения (4.5). (При этом операторы связаны следующими соотношениями: $\Gamma_{23} = M_{12}$, $\Gamma_{51} = D$, $\Gamma_{45} = (P_0 - K_0)/2$, $K_{41} = (P_0 + K_0)/2$.) Системы координат, допускающие истинное R-разделение переменных, отвечают строкам 1′ и 29—31 этой таблицы.

Таблица 22

	Операторы	Функции с разделенными переменными
1′	Γ_{23}^2, Γ_{45}^2	Экспоненциальная Гегенбауэра
4′	Γ_{23}^2, $(\Gamma_{45} + \Gamma_{41})^2$	Экспоненциальная Бесселя
16′	Γ_{23}^2, Γ_{51}^2	Экспоненциальная Присоединенная Лежандра
27	Γ_{23}^2, $2\Gamma_{41}^2 + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
28	Γ_{23}^2, $2\Gamma_{45}^2 + \{\Gamma_{45}, \Gamma_{41}\}$	Присоединенная Лежандра Присоединенная Лежандра
29	Γ_{23}^2, $\Gamma_{41}^2 + a\{\Gamma_{45}, \Gamma_{51}\}$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
30	Γ_{23}^2, $\Gamma_{45}^2 + a\Gamma_{51}^2$, $a > 0$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
31	Γ_{23}^2, $a\Gamma_{41}^2 + \Gamma_{51}^2$ $a > 1$	Ламе — Вангерина Ламе — Вангерина
32	Γ_{23}^2, $\{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$	Бесселя Бесселя

Условие $M_{12}f = imf$ в $\mathscr{H}_+$ влечет $f(\mathbf{k}) = e^{im\theta}j_m(k)$, где $m = 0, \pm 1, \ldots, k_1 = k\cos\theta$, $k_2 = k\sin\theta$. Задача определения собственных функций сводится к рассмотрению гильбертова пространства $L_2[0, \infty]$, в котором действие группы $SL(2, R)$ определяется операторами

$$\begin{aligned} &\Gamma_{45} = (ik/2)\left(-\partial_{kk} - k^{-1}\partial_k + m^2k^{-2} + 1\right), \\ &\Gamma_{41} = (ik/2)\left(\partial_{kk} + k^{-1}\partial_k - m^2k^{-2} + 1\right), \qquad \Gamma_{51} = k\partial_k + {}^1/_2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Это действие неприводимо и унитарно эквивалентно однозначному представлению группы $SL(2, R)$, но не $SO(2, 1)$ из отрицательной дискретной серии $D^-_{|m|-1/2}$, что можно видеть из (4.6) и (2.2). (Сравните с разд. 2.3.) Действительно, собственные значения оператора Γ_{45} в этой модели имеют вид $i(n + {}^1/_2)$, $n = |m|, |m| + 1, |m| + 2, \ldots$. Эта модель оператора D^-_l изучалась многими авторами (см., например, [22, 97]).

Как только собственные функции $j_{m\mu}(k)$ вторых операторов, представленных в табл. 22, определены, соответствующие решения $\Psi_{m\mu}$ с разделенными переменными уравнения (1.1) можно вычислить, используя формулу

$$\Psi_{m\mu}(x) = \exp\left[im(\theta - \pi/2)\right] \int_0^\infty \exp(ix_0k)\, J_m(kr)\, j_{m\mu}(k)\, dk. \tag{4.9}$$

Вообще говоря, уравнение ЭПД (4.5) можно изучать для любого вещественного $m > 0$. Системы координат, допускающие разделение переменных, и модель (4.8) остаются теми же, но группа симметрии, так же как в разд. 2.3, становится универсальной накрывающей группой $\widetilde{SL}(2, R)$ группы $SL(2, R)$. Отображение из $L_2(0, \infty)$ в пространство решений уравнения (4.5) имеет вид

$$\Phi(x_0, r) = \exp(-im\pi/2) \int_0^\infty \exp(ix_0k)\, J_m(kr)\, f(k)\, dk = U[f], \tag{4.10}$$

причем соответствующее скалярное произведение

$$\begin{aligned} (\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle f_1, f_2\rangle &= i \int_0^\infty \Phi_1(x_0, r)\, \partial_0\bar{\Phi}_2(x_0, r)\, r\, dr = \\ &= i \int_0^\infty \bar{\Phi}_2(x_0, r)\, \partial_0\Phi_1(x_0, r)\, r dr \end{aligned} \tag{4.11}$$

не зависит от x_0. Анализ спектральных разложений операторов, определяющих решения с разделенными переменными, можно найти в работе [62].

Мы определили решения Φ_m уравнения ЭПД (4.5) как решения волнового уравнения (1.1), которые являются собственными функциями оператора $L = -iM_{12}$: $L\Psi_m = m\Psi_m$, $\Psi_m = e^{im\varphi}\Phi_m(x_0, r)$. Для комплексификации $so(3,2)^c \cong so(5, \mathbb{C})$ конформной алгебры симметрии можно взять базис $\{L_j\}$, такой, что $[L, L_j] = \alpha_j L_j$, где $\alpha_j = 0, \pm 1$. Действительно, соотношения коммутирования

$$[L, P_1 \pm iP_2] = \pm (P_1 \pm iP_2), \quad [L, M_{01} \pm iM_{02}] = \pm (M_{01} \pm iM_{02}),$$
$$[L, K_1 \pm iK_2] = \pm (K_1 \pm iK_2),$$

а также тот факт, что $[L, L'] = 0$ для $L' = D, P_0, K_0$, обеспечивают такой базис. Из этих соотношений следует, что $L_j\Psi_m$ является собственной функцией оператора L с собственным значением $m + \alpha_j = m, m \pm 1$, т. е. $L_j(e^{im\varphi}\Phi_m) = \exp[i(m + \alpha_j)\varphi]\Phi_{m+\alpha_j}$. Выделяя множитель, зависящий от φ, мы видим, что каждый оператор симметрии отображает решение уравнения (4.5) для m в решение для $m + \alpha_j$. Подобным образом операторы (1.12) индуцируют отображения множества решений одного уравнения ЭПД в множество решений другого уравнения так же, как это производится некоторыми операторами группы симметрии.

Мы видим, что этот ряд рекуррентных формул, связывающих различные уравнения ЭПД друг с другом, является прямым следствием конформной симметрии волнового уравнения, из которого в результате частичного разделения переменных получается уравнение ЭПД. Вайнстейн [30, 31], изучая краевые задачи для уравнения ЭПД, применил две такие рекуррентные формулы. Полное теоретико-групповое исследование дается в работе [94]; там же показано, что формулы квадратичного преобразования для функции ${}_2F_1$ [16] связаны с конформной симметрией волнового уравнения.

Мы упомянули все полурасщепляющиеся системы координат для волнового уравнения, за исключением некоторых любопытных неортогональных систем, которые соответствуют диагонализации оператора $^1/_2M_{12} + {}^1/_4K_0 - {}^1/_4P_0$ и которые рассматриваются в работах [59, 61]; в работе [61] изучены также некоторые сильно сингулярные решения, получающиеся в результате того, что диагонализация некоторого оператора первого порядка определяет соответствующие координаты не единственным образом. Ортогональные нерасщепляющиеся системы координат рассматриваются в [60].

4.5. Волновое уравнение $(\partial_{tt} - \Delta_3)\Psi(x) = 0$

Вещественное волновое уравнение в четырехмерном пространстве-времени

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33})\Psi(x) = 0 \tag{5.1}$$