

Мы определили решения  $\Phi_m$  уравнения ЭПД (4.5) как решения волнового уравнения (1.1), которые являются собственными функциями оператора  $L = -iM_{12}$ :  $L\Psi_m = m\Psi_m$ ,  $\Psi_m = e^{itm\Phi}\Phi_m(x_0, r)$ . Для комплексификации  $so(3, 2)^c \cong so(5, \mathbb{C})$  конформной алгебры симметрии можно взять базис  $\{L_j\}$ , такой, что  $[L, L_j] = \alpha_j L_j$ , где  $\alpha_j = 0, \pm 1$ . Действительно, соотношения коммутирования

$$[L, P_1 \pm iP_2] = \pm (P_1 \pm iP_2), \quad [L, M_{01} \pm iM_{02}] = \pm (M_{01} \pm iM_{02}), \\ [L, K_1 \pm iK_2] = \pm (K_1 \pm iK_2),$$

а также тот факт, что  $[L, L'] = 0$  для  $L' = D, P_0, K_0$ , обеспечивают такой базис. Из этих соотношений следует, что  $L_j\Psi_m$  является собственной функцией оператора  $L$  с собственным значением  $m + \alpha_j = m, m \pm 1$ , т. е.  $L_j(e^{itm\Phi}\Phi_m) = \exp[i(m + \alpha_j)\Phi]\Phi_{m+\alpha_j}$ . Выделяя множитель, зависящий от  $\Phi$ , мы видим, что каждый оператор симметрии отображает решение уравнения (4.5) для  $m$  в решение для  $m + \alpha_j$ . Подобным образом операторы (1.12) индуцируют отображения множества решений одного уравнения ЭПД в множество решений другого уравнения так же, как это производится некоторыми операторами группы симметрии.

Мы видим, что этот ряд рекуррентных формул, связывающих различные уравнения ЭПД друг с другом, является прямым следствием конформной симметрии волнового уравнения, из которого в результате частичного разделения переменных получается уравнение ЭПД. Вайнштейн [30, 31], изучая краевые задачи для уравнения ЭПД, применил две такие рекуррентные формулы. Полное теоретико-групповое исследование дается в работе [94]; там же показано, что формулы квадратичного преобразования для функции  ${}_2F_1$  [16] связаны с конформной симметрией волнового уравнения.

Мы упомянули все полурасщепляющиеся системы координат для волнового уравнения, за исключением некоторых любопытных неортогональных систем, которые соответствуют диагонализации оператора  ${}^1/2M_{12} + {}^1/4K_0 - {}^1/4P_0$  и которые рассматриваются в работах [59, 61]; в работе [61] изучены также некоторые сильно сингулярные решения, получающиеся в результате того, что диагонализация некоторого оператора первого порядка определяет соответствующие координаты не единственным образом. Ортогональные нерасщепляющиеся системы координат рассматриваются в [60].

#### 4.5. Волновое уравнение $(\partial_{tt} - \Delta_3)\Psi(x) = 0$

Вещественное волновое уравнение в четырехмерном пространстве-времени

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33})\Psi(x) = 0 \quad (5.1)$$

можно во многих отношениях считать наиболее значимым в нашей книге. Общеизвестно, какую роль играет уравнение (5.1) в физике [13, 109]; для нас же важен тот факт, что почти все уравнения, рассмотренные нами в предшествующих главах, либо являются частными случаями уравнения (5.1), либо получаются из него частичным разделением переменных. Более того, в то время как волновое уравнение в трехмерном пространстве и его комплексификация связаны с производящими функциями для функций и многочленов Гегенбауэра, уравнение (5.1) связано с производящими функциями для гипергеометрической функции Гаусса общего вида и многочленов Якоби.

Несмотря на то что в данное время уравнение (5.1) интенсивно изучается с теоретико-групповой точки зрения, результаты, представленные в настоящей работе, все еще носят фрагментарный характер. Мы укажем здесь только некоторые основные особенности проблемы разделения переменных для уравнения (5.1) и дадим краткий анализ работ, посвященных этому вопросу.

В работе [15] вычисляется пятнадцатимерная алгебра симметрии  $so(4, 2)$  уравнения (5.1), которую можно получить по очевидной аналогии с алгеброй симметрии уравнения (1.1). Эта группа симметрии, локально изоморфная группе  $SO(4, 2)$ , называется конформной группой. Она содержит следующие подгруппы: однородную группу преобразований Лоренца  $SO(3, 1)$ , группу Пуанкаре  $E(3, 1)$  и компактную ортогональную группу  $SO(4, R)$ . Имеет место также симметрия инверсии, аналогичная  $I$ ; см. (1.12). Применяя преобразование Фурье, можно построить гильбертово пространство  $\mathcal{H}_+$  решений с положительной энергией, в котором определяется унитарное неприводимое представление конформной группы. Это осуществляется по аналогии с тем, как было получено соотношение (1.20); подробные выкладки см. в работах [46, 66, 139].

Предполагается, что решения с  $R$ -разделенными переменными уравнения (5.1) являются общими собственными функциями триплетов независимых коммутирующих операторов не выше второго порядка в обертывающей алгебре алгебры  $so(4, 2)$ . Рассмотрим несколько достаточно подробно изученных частных случаев.

Ограничиваая алгебру симметрии уравнения (1.1) до компактной подалгебры  $so(3)$ , мы приходим к оператору Лапласа на сфере  $S_2$  и получаем две системы координат, допускающих разделение переменных для соответствующего уравнения. Подобным образом ограничивая  $so(4, 2)$  до компактной подалгебры  $so(4)$ , мы получаем оператор Лапласа на единичной сфере  $S_3$  в четырехмерном пространстве. Этот оператор исследован в работе [64], где показано, что уравнение на собственные значения

допускает разделение переменных точно в шести системах координат, связанных с шестью парами коммутирующих операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры  $so(4)$ . Изучена также связь между алгеброй  $so(4)$  и уравнением Шредингера для задачи Кеплера в случае трех пространственных переменных.

Диагонализация оператора симметрии  $P_0 = \partial_0$  сводит уравнение (5.1) к уравнению Гельмгольца, которое допускает разделение переменных в одиннадцати системах координат. Диагонализация оператора  $P_3 = \partial_3$  сводит уравнение (5.1) к уравнению Клейна — Гордона

$$(\partial_{00} - \partial_{11} - \partial_{22} + \omega^2)\Phi = 0. \quad (5.2)$$

В работе [60] дается классификация ортогональных относительно метрики Минковского 53 систем координат, допускающих разделение переменных уравнения (5.2). Диагонализация оператора симметрии растяжения  $\sum_{\alpha=0}^3 x_\alpha \partial_\alpha$  сводит уравнение (5.1) к

уравнению на собственные значения для оператора Лапласа на гиперболоиде в четырехмерном пространстве. Это приведенное уравнение имеет в качестве группы симметрии однородную группу преобразований Лоренца  $SO(3, 1)$  и допускает разделение переменных в 34 системах координат, причем каждая система соответствует паре операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре алгебры  $so(3, 1)$ ; см. [63, 107]. Диагонализация оператора  $P_0 + P_1 = \partial_0 + \partial_1$  сводит уравнение (5.1) к уравнению Шредингера для свободной частицы

$$(i\beta\partial_t + \partial_{22} + \partial_{33})\Phi = 0, \quad (5.3)$$

которое допускает разделение переменных в 17 системах координат. Аналогичным образом диагонализация оператора симметрии  $M_{23} = x_2\partial_3 - x_3\partial_2$  дает приведенное уравнение, подобное уравнению ЭПД. Бейтмен [14], используя комплексификацию приведенного уравнения, полученного в результате диагонализации операторов  $M_{23}$  и  $M_{01} = x_0\partial_1 + x_1\partial_0$ , нашел производящие функции для многочленов Якоби, а Корнвинтер [69, 70] применил это уравнение для исследования теоремы сложения для многочленов Якоби. Хенричи [132] воспользовался этим же уравнением, чтобы получить производящие функции для произведений многочленов Гегенбауэра.

Хотя все перечисленные выше системы координат были получены методами, совершенно аналогичными тем, которые мы применяли при исследовании уравнения (1.1), при изучении уравнения (5.1) появляется несколько новых типов нерасщепляющихся систем координат. Например, диагонализация оператора  $P_2^2 + P_3^2$

сводит уравнение (5.1) к двум уравнениям:

$$(\partial_{00} - \partial_{11} + \omega^2)\Phi = 0, \quad (\partial_{22} + \partial_{33} + \omega^2)\Theta = 0, \quad (5.4)$$

где  $\Psi = \Phi\Theta$ . Возможные системы координат, допускающие разделение переменных для приведенных уравнений, можно найти в табл. 1 и 2.

В следующей главе будет дан анализ явной связи между функциями  ${}_2F_1$  и волновым уравнением.

## Упражнения

1. Вычислить алгебру симметрии волнового уравнения (1.1).
2. Пусть  $y_0 = \cos \sigma$ ,  $y_1 = \sin \sigma \cos \alpha$ ,  $y_2 = \sin \sigma \sin \alpha$ , где  $(\psi, \sigma, \alpha)$  — координаты (2.6), в которых уравнение (1.1) имеет решения с  $R$ -разделенными переменными. Показать, что, подставив в волновое уравнение

$$\Psi = [\cos \sigma - \cos \psi]^{1/2} \exp [-i\psi(l + 1/2)] \Phi(y_1, y_2, y_3),$$

мы получим приведенное уравнение  $(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2)\Phi = -l(l+1)\Phi$ , т. е. уравнение на собственные значения для оператора Лапласа на сфере  $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$ . Здесь  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{13}$ ,  $\Gamma_{23}$  — обычные операторы момента импульса на сфере.

3. Показать, что пространство операторов симметрии второго порядка в обвертывающей алгебре  $so(2, 1)$  по модулю оператора Казимира разбивается сопряженным действием группы  $SO(2, 1)$  на девять типов орбит. (Указание: эта задача эквивалентна классификации классов эквивалентности вещественных симметрических  $(3 \times 3)$ -матриц  $Q$  относительно преобразований  $Q \rightarrow A^T Q A$ ,  $A \in SO(2, 1)$ ; подробности можно найти в работе [38].)

4. Показать, что уравнение ЭПД (4.5) допускает разделение переменных в координатах

$$x = \frac{1}{2}[(t+r)^{1/2} + (t-r)^{1/2}], \quad y = \frac{1}{2}[(t+r)^{1/2} - (t-r)^{1/2}], \\ t \pm r > 0,$$

соответствующих операторам  $\Gamma_{23}^2$ ,  $\{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$ . Решения с разделенными переменными являются произведениями функций Бесселя [62].

5. Как показано в тексте, функция  $\Phi(x_0, r)$  является решением уравнения ЭПД

$$(\partial_{00} - \partial_{rr} - r^{-1}\partial_r + m^2r^{-2})\Phi = 0$$

тогда и только тогда, когда  $\Psi_m = e^{itm}\Phi$  — решение волнового уравнения (1.1), где  $x_1 = r \cos \varphi$ ,  $x_2 = r \sin \varphi$ . Таким образом, решения волнового уравнения, являющиеся собственными функциями оператора  $M_{12} = \partial_\varphi$ , соответствуют решениям уравнения ЭПД. Используя выражения  $[iM_{12}, \pm iM_{01} + M_{02}] = \mp(\pm iM_{01} + M_{02})$ , вывести дифференциальные рекуррентные формулы, отражающие решения уравнения ЭПД при  $m = m_0$  в его решения при  $m = m_0 \mp 1$  соответственно. Аналогичным образом остальные операторы симметрии Ли волнового уравнения отображают множество решений уравнения ЭПД во множество решений этого же уравнения (см. [94]).