Глава 5

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

5.1. Функции Лауричеллы F_D

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$ тесно связана с уравнением Лапласа и волновым уравнением в четырехмерном пространстве, а также с комплексификациями этих уравнений. Функция ${}_2F_1$ появляется в результате разделения переменных в указанных уравнениях, а использование конформных групп симметрии дает возможность объяснить многие ее свойства. Но мы избрали иной подход к изучению этой функции: в настоящей книге исследуется непосредственно сама гипергеометрическая функция, а также некоторые из ее обобщений, полученных за последние 150 лет.

Функции F_A, F_B, F_C и F_D (см. (Б.21)—(Б.24)), введенные Лауричеллой [73], известны теперь под названием функций Лауричеллы; детальное исследование этих функций провели Аппель и Кампе де Ферье [4]. Из степенных рядов, которыми определяются функции Лауричеллы, сразу следует, что эти функции являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на n комплексных переменных: при $n=1$ каждая из функций F_A, F_B, F_C и F_D сводится к функции ${}_2F_1$. Хотя функции Лауричеллы впервые были получены не в результате разделения переменных, мы увидим, что их можно получить частичным разделением переменных в системе n дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. С теоретико-групповой точки зрения самым интересным обобщением функции ${}_2F_1$ являются функции F_D; поэтому мы проведем тщательное исследование этих функций, получая результаты для функции ${}_2F_1$ в предположении, что $n=1$. Как следует из (Б.24),

$$F_D[a;\ b_1,\ \ldots,\ b_n;\ c;\ z_1,\ \ldots,\ z_n]$$

зависит от $n+2$ комплексных параметров a, b_j, c и n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$. При $n=1$ мы имеем

$$F_D[a;\ b;\ c;\ z] \equiv {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\ b \\ c \end{matrix}\middle| z\right). \tag{1.1}$$

Используя разложение (Б.24), мы получаем дифференциальные рекуррентные формулы для функций F_D, а затем на основании этих рекуррентных формул строим алгебру Ли. Вычисления проводятся так же, как и ранее, поэтому мы приводим только полученные результаты. Определим семейство функций

$$\Psi_c^{a,\,b_1,\,\ldots,\,b_n}(s,\,u_1,\,\ldots,\,u_n,\,t,\,z_1,\,\ldots,\,z_n)=\Psi_c^{a,\,b_j}(s,\,u_j,\,t,\,z_j)=$$
$$=\frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\,F_D(a;\,b_1,\,\ldots,\,b_n;\,c;\,z_1,\,\ldots,\,z_n)\,s^a u^{b_1}\cdots u_n^{b_n} t^c, \quad (1.2)$$

где $c\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, а s, u_j, t — комплексные переменные. Кроме того, определим операторы

$$E^{\alpha}=s\Big(\sum_j z_j\partial_{z_j}+s\partial_s\Big),\qquad E^{\alpha\beta_k\gamma}=su_kt\partial_{z_k},$$
$$E^{\beta_k}=u_k\big(z_k\partial_{z_k}+u_k\partial_{u_k}\big),\qquad E_{\gamma}=t^{-1}\Big(\sum_j z_j\partial_{z_j}+t\partial_t-1\Big),$$
$$E^{\alpha\gamma}=st\Big(\sum_j(1-z_j)\,\partial_{z_j}-s\partial_s\Big),$$
$$E^{\gamma}=t\Big(\sum_j(1-z_j)\,\partial_{z_j}+t\partial_t-s\partial_s-\sum_j u_j\partial_{u_j}\Big),$$
$$E_{\alpha}=s^{-1}\Big(\sum_j z_j(1-z_j)\,\partial_{z_j}+t\partial_t-s\partial_s-\sum_j z_ju_j\partial_{u_j}\Big),$$
$$E_{\beta_k}=u_k^{-1}\Big(z_k(1-z_k)\,\partial_{z_k}+z_k\sum_{j\neq k}(1-z_j)\,\partial_{z_j}+$$
$$+t\partial_t-z_ks\partial_s-\sum_j u_j\partial_{u_j}\Big),$$
$$E^{\beta_k\gamma}=u_kt\big((z_k-1)\,\partial_{z_k}+u_k\partial_{u_k}\big),$$
$$E_{\alpha\gamma}=s^{-1}t^{-1}\Big(\sum_j z_j(1-z_j)\,\partial_{z_j}-\sum_j z_ju_j\partial_{u_j}+t\partial_t-1\Big),$$
$$E_{\alpha\beta_k\gamma}=s^{-1}u_k^{-1}t^{-1}\Big(\sum_j z_j(z_j-1)\,\partial_{z_j}-t\partial_t+z_ks\partial_s+$$
$$+\sum_j z_ju_j\partial_{u_j}-z_k+1\Big),$$
$$E_{\beta_k\gamma}=u_k^{-1}t^{-1}\Big(z_k(z_k-1)\,\partial_{z_k}+\sum_{j\neq k}(z_k-1)\,z_j\partial_{z_j}+z_ks\partial_s-t\partial_t+1\Big),$$
$$E^{\beta_k}_{\beta_p}=u_ku_p^{-1}\big((z_k-z_p)\,\partial_{z_k}+u_k\partial_{u_k}\big),\qquad J_{\alpha}=s\partial_s-(1/2)\,t\partial_t,$$
$$J_{\beta_k}=u_k\partial_{u_k}-(1/2)\,t\partial_t+(1/2)\sum_{j\neq k}u_j\partial_{u_j},$$
$$J_{\gamma}=t\partial_t-(1/2)\Big(s\partial_s+\sum_j u_j\partial_{u_j}+1\Big),\quad k,\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad (1.3)$$

Если пределы изменения j не указываются явно, то суммирование по j проводится от 1 до n. Действие этих операторов на

базис (1.2) задается формулами

$$E^{\alpha}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(c-a-1)\,\Psi_c^{a+1,\,b}{}_j,\qquad E^{\alpha\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=b_k\Psi_{c+1}^{a+1,\,\hat b_k},$$

$$E^{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=b_k\Psi_c^{a,\,\tilde b_k},\qquad E_{\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(c-a-1)\,\Psi_{c-1}^{a,\,b}{}_j,$$

$$E^{\alpha\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=\Big(\sum_j b_j-c\Big)\,\Psi_{c+1}^{a+1,\,b}{}_j,\qquad E^{\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=\Big(c-\sum_j b_j\Big)\,\Psi_{c+1}^{a,\,b}{}_j,$$

$$E_{\alpha}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(a-1)\,\Psi_c^{a-1,\,b}{}_j,\qquad E_{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=\Big(c-\sum_j b_j\Big)\,\Psi_c^{a,\,\tilde b_k},$$

$$E^{\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=b_k\Psi_{c+1}^{a,\,\hat b_k},\qquad E_{\alpha\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(a-1)\,\Psi_{c-1}^{a-1,\,b}{}_j,$$

$$E_{\alpha\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(1-a)\,\Psi_{c-1}^{a-1,\,\tilde b_k},\qquad E_{\beta_k\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(a-c+1)\,\Psi_{c-1}^{a,\,\tilde b_k},$$

$$E_{\beta_p}^{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=b_k\Psi_c^{a,\,b_1\ldots b_k+1\ldots b_p-1\ldots b_n},\qquad J_{\alpha}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=(a-c/2)\,\Psi_c^{a,\,b}{}_j,$$

$$J_{\beta_k}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=\Big(b_k-c/2+(1/2)\sum_{j\neq k}b_j\Big)\,\Psi_c^{a,\,b}{}_j,$$

$$J_{\gamma}\Psi_c^{a,\,b}{}_j=\Big[c-(1/2)\Big(a+\sum_j b_j+1\Big)\Big]\,\Psi_c^{a,\,b}{}_j,\qquad k,\ p=1,\ \ldots,\ n. \tag{1.4}$$

Символы $\hat b_k$ и $\tilde b_k$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat b_k&=b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k+1,\ b_{k+1},\ \ldots,\ b_n,\\ \tilde b_k&=b_1,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k-1,\ b_{k+1},\ \ldots,\ b_n.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Чтобы получить дифференциальные рекуррентные формулы для функции F_D, необходимо в обеих частях соотношений (1.4) исключить зависимость от s, u_j и t. При $n=1$ эти соотношения принимают вид рекуррентных формул (Б.25) для ${}_2F_1$.

Соотношения (1.4) проверяются стандартными вычислениями. Легко показать, что операторы (1.3) образуют базис для алгебры Ли $sl(n+3,\ \mathbb{C})$ размерности $(n+3)^2-1$. (Напомним, что $SL(n+3,\ \mathbb{C})$ — группа всех комплексных $[(n+3)\times\times(n+3)]$-матриц A, таких, что $\det A=1$.) Алгебра Ли $sl(n+3,\ \mathbb{C})$ группы $SL(n+3,\ \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных $[(n+3)\times(n+3)]$-матриц $\mathscr{A}$, таких, что $\operatorname{tr}\mathscr{A}=0$ (см. [86]). Обозначая через $\mathscr{E}_{ij}$ матрицу, элемент которой на пересечении i-й строки и j-го столбца равен единице, а остальные элементы равны нулю (см. формулу (6.4) разд. 3.6), можно видеть, что матрицы $\mathscr{E}_{ij}$, $i\neq j$ и $\mathscr{E}_{ii}-\mathscr{E}_{33}$, $1\leqslant i,j\leqslant n+3$, образуют базис алгебры $sl(n+3,\ \mathbb{C})$. Соотношения коммутирования получаются из общей формулы

$$[\mathscr{E}_{ij},\ \mathscr{E}_{kl}]=\delta_{jk}\mathscr{E}_{il}-\delta_{li}\mathscr{E}_{kj}. \tag{1.6}$$

Можно проверить, что соответствующие соотношения коммутирования удовлетворяются, если произведена идентификация

$$E^{\alpha} = \mathscr{E}_{12}, \qquad E_{\alpha} = \mathscr{E}_{21}, \qquad E^{\beta_k} = \mathscr{E}_{k+3,\,3},$$

$$E_{\beta_k} = \mathscr{E}_{3,\,k+3}, \qquad E^{\beta_k}_{\beta_p} = \mathscr{E}_{k+3,\,p+3}, \qquad E^{\gamma} = \mathscr{E}_{31},$$

$$E_{\gamma} = -\mathscr{E}_{13}, \qquad E^{\alpha\gamma} = \mathscr{E}_{32}, \qquad E_{\alpha\gamma} = \mathscr{E}_{23},$$

$$E^{\beta_k\gamma} = -\mathscr{E}_{k+3,\,1}, \qquad E_{\beta_k\gamma} = -\mathscr{E}_{1,\,k+3}, \qquad E^{\alpha\beta_k\gamma} = -\mathscr{E}_{k+3,\,2},$$

$$E_{\alpha\beta_k\gamma} = -\mathscr{E}_{2,\,k+3}, \qquad J_{\alpha} = {}^1/_2\,(\mathscr{E}_{11} - \mathscr{E}_{22}),$$

$$J_{\beta_k} = {}^1/_2\,(\mathscr{E}_{k+3,\,k+3} - \mathscr{E}_{33}), \quad J_{\gamma} = {}^1/_2\,(\mathscr{E}_{33} - \mathscr{E}_{11}), \qquad 1 \leqslant k,\ p \leqslant n,$$

$$k \neq p. \tag{1.7}$$

Пусть

$$C_k = E^{\alpha}E^{\beta_k} - E^{\alpha\beta_k\gamma}E_{\gamma}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.8}$$

Тогда легко проверить, что решение f системы уравнений

$$\begin{gathered} C_k f = 0, \quad J_{\alpha} f = (a - c/2)\,f, \quad J_{\beta_k} f = \Big(b_k - c/2 + (1/2)\sum_{j \neq k} b_j\Big) f, \\ J_{\gamma} f = \Big[c - (1/2)\Big(a + \sum_j b_j + 1\Big)\Big] f, \qquad k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{1.9}$$

аналитическое в окрестности $z_1 = \ldots = z_n = 0$, имеет вид

$$f = F_D(a;\ b_1, \ldots, b_n;\ c;\ z_1, \ldots, z_n)\, s^a u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c \tag{1.10}$$

и единственно с точностью до некоторой мультипликативной константы. Действительно, из последних $n+2$ уравнений следует, что

$$f = F(z_1, \ldots, z_n)\, s^a u_1^{b_1} \cdots u_n^{b_n} t^c,$$

а из n первых уравнений вытекают уравнения

$$\begin{gathered} \left\{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \partial_{z_j} + a\right)(z_k \partial_{z_k} + b_k) - \partial_{z_k}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \partial_{z_j} + c - 1\right)\right\} F = 0, \\ k = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{1.11}$$

т. е. дифференциальные уравнения в частных производных для функции F_D. Операторы C_k коммутируют не со всеми элементами алгебры $sl(n+3, \mathbb{C})$, но каждый элемент оставляет пространство решений этой системы уравнений инвариантным. Отсюда следует, что если $\Psi(s, u_j, t, z_j)$ — решение уравнения $C_k\Psi = 0$, $k = 1, \ldots, n$, представленное рядом Лорана

$$\Psi = \sum_{a,\, b_j,\, c} g_{ab_jc}(z_j)\, s^a u_1^{b_1} \ldots u_n^{b_n} t^c, \tag{1.12}$$

и если Ψ — аналитическая функция при $z_1 = \ldots = z_n = 0$, то

$$g_{ab_jc} = k(ab_jc) F_D(a;\ b_1, \ldots, b_n;\ c;\ z_1, \ldots, z_n), \qquad (1.13)$$

где k — некоторая константа. Кроме того, элементы алгебры $sl(n+3, \mathbb{C})$ отображают решение уравнения $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в другие решения этого уравнения.

Теперь мы видим, что функции F_D получаются как решения с разделенными переменными системы n дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в координатах s, u_j, t, z_j. Чтобы упростить эту систему, выполним R-преобразование $\Phi = t^{-1}\Psi$, убрав тем самым множитель t^{-1} из оператора E_γ. В результате мы перейдем к новым переменным v, v_j, w, w_j, таким, что

$$E^\alpha = \partial_v, \quad E^{\beta_k} = \partial_{v_k}, \quad E^{\alpha\beta_k\gamma} = \partial_{w_k}, \quad E_\gamma = \partial_w.$$

В явном виде мы имеем

$$s = -1/v, \quad u_j = -1/v_j, \quad t = w, \quad z_j = ww_j/(vv_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad (1.14)$$

а уравнения $C_k\Psi = 0$ принимают вид

$$(\partial_v\partial_{v_k} - \partial_w\partial_{w_k})\Phi = 0, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (1.15)$$

Из (1.2) следует, что уравнения (1.15) имеют решения

$$\Phi_c^{a,\,b_j} = t^{-1}\Psi_c^{a,\,b_j} =$$
$$= \frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)} F_D\left(a;\ b_1, \ldots, b_n;\ c;\ \frac{ww_1}{vv_1}, \ldots, \frac{ww_n}{vv_n}\right) \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{v}\right)^a \left(-\frac{1}{v_1}\right)^{b_1} \ldots \left(-\frac{1}{v_n}\right)^{b_n} w^c. \qquad (1.16)$$

В частном случае, когда $n = 1$, можно положить $v = (z+t)/2$, $v_1 = (z-t)/2$, $w = (ix+y)/2$, $w_1 = (ix-y)/2$, в результате чего уравнение (1.15) примет вид комплексного волнового уравнения

$$(\partial_{tt} - \partial_{xx} - \partial_{yy} - \partial_{zz})\Phi(t, x, y, z) = 0,$$

решения которого вида (1.16) содержат функцию ${}_2F_1$. Легко показать, что алгеброй симметрии этого уравнения является алгебра $o(6, \mathbb{C}) \cong sl(4, \mathbb{C})$.

Возвратимся теперь к операторам (1.3) и определим действие группы $SL(n+3, \mathbb{C})$, индуцируемое этими операторами. Не определяя глобального действия этой группы, укажем, что

каждый из следующих триплетов:

$$\begin{gathered}\{J^+, J^-, J^0\} \equiv \{E^\alpha, E_\alpha, J_\alpha\}, \quad \{E^{\beta_k}, E_{\beta_k}, J_{\beta_k}\}, \\ \{E^\gamma, E_\gamma, J_\gamma\}, \quad \{E^{\alpha\beta_k\gamma}, E_{\alpha\beta_k\gamma}, J_\alpha + J_{\beta_k} + J_\gamma\}, \\ \{E^{\alpha\gamma}, E_{\alpha\gamma}, J_\alpha + J_\gamma\}, \quad \{E^{\beta_k\gamma}, E_{\beta_k\gamma}, J_{\beta_k} + J_\gamma\}, \\ \{E^{\beta_l}_{\beta_p}, E^{\beta_p}_{\beta_l}, J_{\beta_l} - J_{\beta_p}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad 1 \leqslant l < p \leqslant n,\end{gathered} \tag{1.17}$$

удовлетворяет соотношениям коммутирования

$$[J^0, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^0$$

и образует базис подалгебры алгебры $sl(n+3, \mathbb{C})$, изоморфной алгебре $sl(2, \mathbb{C})$. Кроме того, каждый триплет порождает локальную подгруппу Ли группы $SL(n+3, \mathbb{C})$, изоморфную группе $SL(2, \mathbb{C})$; полученные таким образом подгруппы порождают полное действие группы $SL(n+3, \mathbb{C})$.

Используя соотношения

$$\mathbf{T}(A) = \exp(-bd^{-1}J^+)\exp(-c\,dJ^-)\exp(\tau J^0), \quad \exp(\tau/2) = d^{-1}, \tag{1.18}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

(см. (4.14) разд. 2.4), перейдем от действия алгебры Ли, порождаемой операторами (J^+, J^-, J^0), к групповому действию. Мы видим, что триплет $\{E^\alpha, E_\alpha, J_\alpha\}$ порождает групповое действие

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_1(A)\Psi(s, u_j, t, z_j) = \\ &= \Psi\left[\frac{as+c}{d+bs}, \frac{u_j(as+c)}{as+c(1-z_j)}, \frac{ts}{as+c}, \frac{z_j s}{(d+bs)(as-cz_j+c)}\right],\end{aligned} \tag{1.19}$$

а триплет $\{E^{\beta_k}, E_{\beta_k}, J_{\beta_k}\}$ — действие

$$\begin{aligned}&\mathbf{T}_{2,k}(A)\Psi(s, u_j, u_k, t, z_j, z_k) = \\ &= \Psi\left(\frac{s(au_k+c)}{au_k+c(1-z_k)}, \frac{u_j}{u_k}(au_k+c), \frac{au_k+c}{d+bu_k}, \frac{u_k t}{au_k+c}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{au_k z_j + c(z_j - z_k)}{au_k+c(1-z_k)}, \frac{z_k u_k}{(d+bu_k)(au_k-cz_k+c)}\right), \\ &\qquad k = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{1.20}$$

В (1.20) j пробегает значения от 1 до n, исключая k. Триплет $\{E^{\gamma}, E_{\gamma}, J_{\gamma}\}$ порождает действие

$$\mathbf{T}_3(A)\Psi(s, u_j, t, z_j) = (a + c/t)^{-1} \times$$
$$\times \Psi(s(d + bt), u_j(d + bt), (at + c)/(d + bt), [dz_j - bt(1 - z_j)](a + c/t)), \qquad (1.21)$$

триплет $\{E^{\alpha\beta_k\gamma}E_{\alpha\beta_k\gamma}, J_{\alpha} + J_{\beta_k} + J_{\gamma}\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{4,k}(A)\Psi(s, u_j, u_k, t, z_j, z_k) = [a + c(1 - z_k)/(u_k ts)]^{-1} \times$$
$$\times \Psi\left[as - \frac{cz_k}{u_k t}, u_j\left[\frac{asu_k t - cz_k}{asu_k t + cz_j - cz_k}\right],\right.$$
$$au_k - \frac{cz_k}{st}, t\left[\frac{asu_k t + c(1 - z_k)}{asu_k t - cz_k}\right],$$
$$\left. z_j\left[\frac{asu_k t + c(1 - z_k)}{asu_k t + c(z_j - z_k)}\right], [z_k d - bsu_k t]\left[a + \frac{c(1 - z_k)}{su_k t}\right]\right], \qquad (1.22)$$

Триплет $\{E^{\alpha\gamma}, E_{\alpha\gamma}, J_{\alpha} + J_{\gamma}\}$ — действие

$$\mathbf{T}_5(A)\Psi(s, u_j, t, z_j) = (a - c/(st))^{-1} \times$$
$$\times \Psi\left[\frac{s}{d - bst}, \frac{u_j st}{ast - cz_j}, at - \frac{c}{s}, \frac{(dz_j - bst)(ast - c)}{(ast - cz_j)(d - bst)}\right], \qquad (1.23)$$

триплет $\{E^{\beta_k\gamma}, E_{\beta_k\gamma}, J_{\beta_k} + J_{\gamma}\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{6,k}(A)\Psi(s, u_j, u_k, t, z_j, z_k) = [a + c/(u_k t)]^{-1} \times$$
$$\times \Psi\left(\frac{su_k t}{au_k t + cz_k}, u_j, \frac{u_k}{d + bu_k t}, at + \frac{c}{u_k}, \frac{z_j(au_k t + c)}{au_k t + cz_k},\right.$$
$$\left.\frac{(dz_k + bu_k t)(au_k t + c)}{(d + bu_k t)(au_k t + cz_k)}\right), \qquad (1.24)$$

а триплет $\left\{E^{\beta_k}_{\beta_p}, E^{\beta_p}_{\beta_k}, J_{\beta_k} - J_{\beta_p}\right\}$ — действие

$$\mathbf{T}_{7,k,p}(A)\Psi(s, u_j, u_k, u_p, t, z_j, z_k, z_p) =$$
$$= \Psi\left(s, u_j, \frac{u_k u_p}{du_p + bu_k}, \frac{u_p u_k}{au_k + cu_p}, t, z_j, \frac{dz_k u_p + bz_p u_k}{du_p + bu_k},\right.$$
$$\left.\frac{az_p u_k + cz_k u_p}{au_k + cu_p}\right), \qquad 1 \leqslant k < p \leqslant n. \qquad (1.25)$$

Каждый из операторов $\mathbf{T}_l(A)$ отображает решение Ψ системы уравнений $C_k\Psi = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, в другое решение.

Чтобы вычислить матричные элементы групповых операторов $\mathbf{T}_l(A)$ относительно базиса $\left\{\Psi_c^{a, b_j}\right\}$, полезно построить более

простую модель соотношений (1.4). Такая модель определяется функциями

$$f_c^{a,\,b_j}(s,\ u_j,\ t)=s^a u_1^{b_1}\cdots u_n^{b_n} t^c$$

от $n+2$ комплексных переменных и операторами

$$\begin{aligned} &E^{\alpha}=s(t\partial_t-s\partial_s-1), \qquad E^{\alpha\beta_k\gamma}=su_k^2 t\partial_{u_k}, \qquad E^{\beta_k}=u_k^2\partial_{u_k},\\ &E_{\gamma}=t^{-1}(t\partial_t-s\partial_s-1), \qquad E_{\alpha}=s^{-1}(s\partial_s-1),\\ &E_{\beta_k}=u_k^{-1}\Big(t\partial_t-\sum_j u_j\partial_{u_j}\Big), \qquad 1\leqslant k\leqslant n, \end{aligned} \tag{1.26}$$

порождающими алгебру $sl(n+3,\ \mathbb{C})$. Некоторые примеры матричных элементов, вычисленных таким способом, и соответствующих производящих функций для F_D и ${}_1F_2$ можно найти в работах [91] и [83, гл. 5].

5.2. Формулы преобразований и производящие функции для функций F_D

Теперь покажем, что формулы преобразований для функций F_D определяются свойствами группы симметрии $SL(n+3,\ \mathbb{C})$. Пусть

$$I=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in SL(2,\ \mathbb{C}); \tag{2.1}$$

тогда из формул (1.2) и (1.19) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(I)\,\Psi_c^{a,\,b_j}=(-1)^{a+c}\,\frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\,F_D\Big(a;\ b_j;\ c;\ -\frac{z_j}{1-z_j}\Big)\times\\ \times(1-z_1)^{-b_1}\cdots(1-z_n)^{-b_n}\,s^{c-a}u_1^{b_1}\cdots u_n^{b_n}t^c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Однако функция $\mathbf{T}_1(I)\,\Psi_c^{a,\,b_j}$ является общей собственной функцией операторов J_α, J_{β_j} и J_γ, аналитической при $z_1=\ldots$ $\ldots=z_n=0$. Следовательно,

$$\mathbf{T}_1(I)\,\Psi_c^{a,\,b_j}=kF_D(c-a;\ b_j;\ c;\ z_j)\,s^{c-a}u_1^{b_1}\cdots u_n^{b_n}t^c. \tag{2.3}$$

Полагая в (2.2) и (2.3) $z_1=\ldots=z_n=0$, вычислим константу k и получим формулу преобразования

$$(1-z_1)^{-b_1}\cdots(1-z_n)^{-b_n}\,F_D\Big(a;\ b_j;\ c;\ \frac{z_j}{z_j-1}\Big)=F_D(c-a;\ b_j;\ c;\ z_j) \tag{2.4}$$