
ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Этот том открывает серию книг, авторы которых пытаются показать, как и почему во многих приложениях математики появляются специальные функции. Элементарные трансцендентные функции, такие, как экспоненциальная функция, ее обратная (логарифмическая) и тригонометрические функции, входят в число рабочих инструментов не только математиков, но и большинства специалистов, использующих математику в своей работе. Было время, когда каждый математик в совершенстве знал теорию высших трансцендентных функций. Так, например, во второй половине девятнадцатого столетия появилось поразительное количество книг, посвященных эллиптическим функциям, а на выпускных экзаменах в университетах постоянно предлагались сложные задачи на доказательство различных фактов, относящихся к функциям Бесселя и функциям Лежандра. Теперь эти функции и другие исключительно полезные специальные функции известны не столь широкому кругу специалистов; это привело к тому, что возникающие в приложениях важные специальные функции вот уже в течение двадцати пяти с лишним лет изучаются людьми, не подозревающими, что многие открытые ими факты были установлены около ста лет тому назад,

За последние сорок лет нечто подобное произошло с так называемыми $(3 - j)$ -символами. С этими функциями приходится сталкиваться при исследовании разложения прямого произведения двух неприводимых представлений группы $SU(2)$. Поскольку гипергеометрические ряды известны не столь широко, как следовало бы, только недавно было обнаружено, что одно из соотношений ортогональности для $(3 - j)$ -символов является не чем иным, как соотношением ортогональности для некоторого семейства многочленов, полученным Чебышевым еще в 1875 г. Для этих многочленов Чебышев предложил несколько полезных формул, до сих пор не появившихся в физической литературе, к которой относится большинство работ, посвященных $(3 - j)$ -символам. Подобным же образом соотношение симмет-

рии для $(3 - j)$ -символов, полученное Регге в 1958 г., было предложено в 1923 г. Уипплом, а еще ранее — в 1879 г. — Томэ. Первые операторы симметрии для этих функций были найдены в 1836 г. Куммером. Можно было бы не беспокоиться о том, что старые результаты забываются, если бы получать такие результаты было легко и просто и если бы это было по плечу каждому, кто в них нуждается. Однако довольно часто дело обстоит совсем иначе, а для соотношения симметрии Регге это можно утверждать с полной уверенностью. В период с 1930 по 1958 г. многие специалисты занимались изучением $(3 - j)$ -символов, но никто из них не смог получить эту симметрию.

От недостатка обмена информацией между математиками и специалистами, применяющими математику в своей работе, страдают обе стороны, что можно показать на простом примере. В 1942 г. Рака опубликовал важное соотношение ортогональности для функций, которые мы теперь называем $(6 - j)$ -символами или коэффициентами Рака. Он также установил важное представление для этих функций в виде однократной суммы, обычно же эти функции представляются в виде четырехкратных сумм. Подставляя представление в виде однократной суммы в соотношении ортогональности Рака и применяя к $(6 - j)$ -символу формулу преобразования Уиппла (кстати, Рака переоткрыл эту же формулу), можно получить новое семейство ортогональных многочленов, совершенно не упоминаемое в математической литературе. В действительности положение было намного хуже: это семейство ортогональных многочленов не только не было открыто, но имелся ряд теорем, которые, казалось бы, утверждали, что существующее множество ортогональных многочленов от одной переменной является полным множеством всех ортогональных многочленов от одной переменной, которые можно представить в явном виде. Такое утверждение, как показал Рака на примере предложенных им многочленов, было ошибочным.

Этот случай должен послужить хорошим уроком, и из него следует сделать очень важный вывод: для того чтобы математика не превратилась в разрозненный набор отдельных узких областей, необходимы тесные контакты между специалистами по ее различным разделам. Цель настоящей серии книг — попытаться показать, как различные разделы математики связаны между собой и как эту связь можно использовать для решения проблем, представляющих интерес для специалистов в различных областях.

В оставшейся части этого предисловия мы дадим краткий обзор современных взглядов на специальные функции. Поскольку имеется довольно много важных специальных функций, мы в своем обзоре будем рассматривать специальные функции

примерно в том порядке, в котором они были открыты. Многих, возможно, удивит тот факт, что современный взгляд на некоторые вопросы почти не претерпел никаких изменений с того момента, когда были получены первые серьезные результаты. Мы придерживаемся современного стиля изложения, но большинство идей, которыми мы пользуемся, было предложено давным-давно.

В приложениях наиболее важными специальными функциями оказываются гипергеометрические функции. Обобщенный гипергеометрический ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

причем a_{n+1}/a_n — рациональная функция от n . Эта рациональная функция, как правило, представляется в виде произведения

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2) \dots (n+a_p)}{(n+b_1)(n+b_2) \dots (n+b_q)} \frac{x}{n+1},$$

так что

$$a_n = \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Сдвинутый факториал $(a)_n$ определяется соотношениями

$$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (a)_0 = 1,$$

и поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ можно записать в следующем виде:

$${}_pF_q\left(\begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

Этот ряд сходится для всех комплексных x при $p \leq q$ и для $|x| < 1$ при $p = q + 1$. Имеют место следующие частные случаи:

$$\exp(x) = {}_0F_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$(1-x)^{-a} = {}_1F_0\left(\begin{array}{c} a \\ - \end{array} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x_n \quad (|x| < 1),$$

$$\sin x = x {}_0F_1\left(\begin{array}{c} - \\ 3/2 \end{array} \middle| -\frac{x^2}{4}\right),$$

$$\cos x = {}_0F_1\left(\begin{array}{c} - \\ 1/2 \end{array} \middle| -\frac{x^2}{4}\right),$$

$$\ln(1+x) = x {}_2F_1\left(\begin{array}{c} 1, 1 \\ 2 \end{array} \middle| -x\right) \quad (|x| < 1),$$

$$\arctg x = x {}_2F_1\left(\begin{array}{c} 1/2, 1 \\ 3/2 \end{array} \middle| -x^2\right) \quad (|x| < 1),$$

$$\arcsin x = x {}_2F_1\left(\begin{array}{c} 1/2, 1/2 \\ 3/2 \end{array} \middle| x^2\right) \quad (|x| < 1),$$

$$\cos \pi x = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} x, -x \\ 1/2 \end{array} \middle| 1\right).$$

Последняя формула имеет особенное значение, так как она находит на мысль о том, что параметры, входящие в гипергеометрические ряды, не просто дают нам возможность отличать один ряд от другого, а могут играть более важную роль в изучении гипергеометрических рядов. Первым понял это, вероятно, Гаусс. Мы еще вернемся к результатам Гаусса, но сначала познакомимся с установленными Валлисом и Эйлером более ранними результатами, которые помогут нам понять, почему последняя формула справедлива.

Когда рассматривается биномиальное разложение, приходится сталкиваться с факториалом $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Наиболее простым обобщением $n!$ является сдвинутый факториал $(a)_n$, определенный нами выше. Ясно, что $n! = (1)_n$, но это не дает ответа на интересный вопрос, что же такое $1/2!$? На этот вопрос ответил Эйлер после того, как он ввел функцию $\Gamma(x)$. Первоначальное выражение, предложенное Эйлером, имело вид бесконечного произведения, но он дал и интегральное представление эквивалентное следующему:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Вывод свойств функции $\Gamma(x)$ всегда начинается с исследования этого интеграла, но следует сказать несколько слов в защиту произведения Эйлера и других формул, определяющих гамма-функцию сразу для всех x , а не только для тех значений x , для которых $\operatorname{Re} x > 0$, как в указанном выше интеграле. Одна из таких формул имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{vx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n},$$

где

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Другая формула, полученная Эйлером, но обычно приписываемая Гауссу, записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x)_n}{(1)_n} n^{1-x}.$$

Применяя гамма-функцию, Эйлер вычислил интеграл, определяющий бета-функцию:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

и получил

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Легко видеть, что отсюда вытекает соотношение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. И действительно, первоначальная формула Эйлера для гамма-функции сводится при $x = 1/2$ (после некоторых простых алгебраических преобразований) к бесконечному произведению Валлиса для π .

В девятнадцатом веке было предложено много различных интегральных представлений для функции $\Gamma(x)$, а Ганкель¹⁾ доказал, что эта функция не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами. Она удовлетворяет разностному уравнению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, но это условие не является достаточно строгим для того, чтобы определить $\Gamma(x)$. Естественное условие, в силу которого мы имеем единственное решение и которое было установлено Бором и Моллерупом, состоит в следующем: функция $\ln \Gamma(x)$ является выпуклой при $x > 0$. Современное поколение математиков проявляет большой интерес к структурным условиям, и данная теорема является прекрасным образцом результатов, которым современные математики дают высокие оценки. Теорема эта очень красива и полезна, но не следует забывать, что истинная причина, почему мы проявляем повышенный интерес к гамма-функции и детально изучаем ее, заключается в том, что она чрезвычайно полезна. Она встречается столь часто, что мы просто вынуждены заниматься ею. Это как раз один из многих примеров того, как математическая эстетика и полезность совместно указывают нам путь исследования. Почему это происходит, все еще остается тайной.

Изучение факториала и гамма-функции привело к развитию целого ряда основных математических идей, нашедших применение в различных областях науки. Одним из наиболее полез-

¹⁾ В отечественной литературе эта теорема называется теоремой Гёльде. — Прим. ред.

ных достижений явилось введение понятия асимптотического разложения. Стирлинг нашел способ вычисления $n!$ при больших n . Полученный им ряд не сходится, но при помощи этого ряда можно получить очень точные значения $n!$. Используя формулу Эйлера

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x},$$

можно получить аналитическое продолжение гамма-функции из области $\operatorname{Re} x > 0$ в область $\operatorname{Re} x < 1$, $x \neq 0, -1, \dots$. Та же формула вместе с одним из бесконечных произведений для $\Gamma(x)$ дает произведение Эйлера

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Это произведение, а также произведение, полученное нами выше для $1/\Gamma(x)$, и некоторые произведения для эллиптических функций и тэта-функций, о которых речь пойдет ниже, привели Вейерштрасса к его теореме о разложении целых функций в произведение, а логарифмическая производная от произведения Вейерштрасса привели Миттаг-Леффлера к его теореме разложения для мероморфных функций.

Вернемся к гипергеометрическому ряду. Гаусс показал, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} = {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, & b \\ c & \end{array} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0.$$

При $c = 1/2$, $a = x$, $b = -x$ эта формула принимает вид

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} x, & -x \\ 1/2 & \end{array} \middle| 1\right) = \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{\Gamma(1/2-x)\Gamma(1/2+x)} = \sin \pi(1/2 + x) = \cos \pi x.$$

Первым функцию ${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, & b \\ c & \end{array} \middle| x\right)$ в общем случае изучил Эйлер.

Он получил дифференциальное уравнение второго порядка, которому эта функция удовлетворяет, дал формулу преобразования

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, & b \\ c & \end{array} \middle| x\right) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} c-a, & c-b \\ c & \end{array} \middle| x\right)$$

и интегральное представление

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, & b \\ c & \end{array} \middle| x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-xt)^{-a} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} dt.$$

Пфафф, занимаясь посмертным изданием работ Эйлера, нашел еще две формулы преобразований. Он получил обе формулы для случая, когда ряд конечен, но одна формула легко переносится на случай бесконечного ряда. Это следующие формулы:

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} \middle| x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, c-b \\ c \end{array} \middle| \frac{x}{x-1}\right)$$

и

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, b \\ c \end{array} \middle| x\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, b \\ b-n+1-c \end{array} \middle| 1-x\right),$$

$$n = 0, 1, \dots$$

Используя первую формулу, Эйлер рассмотрел целый ряд примеров преобразований рядов, ускоряющих сходимость. Например, при $x = -1$ ряд ${}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} \middle| -1\right)$ сходится медленно, а ряд ${}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, c-b \\ c \end{array} \middle| \frac{1}{2}\right)$ — гораздо быстрее. В век, когда вычисления выполняются легко и сравнительно недорого, нам трудно представить себе, как желание что-либо вычислить могло стимулировать столько математических исследований. Эти формулы преобразований вместе с преобразованием Эйлера были первыми из немногих открытых за последние два столетия формул преобразований обобщенных гипергеометрических рядов. Еще одной формулой преобразований является полученная Регге формула симметрии для упомянутых ранее $(3-j)$ -символов. Гаусс нашел правильное обобщение второй формулы преобразований Пфаффа на случай бесконечного ряда. Если в множителе

$$\frac{(c-b)_n}{(c)_n} = \frac{\Gamma(n+c-b)\Gamma(c)}{\Gamma(n+c)\Gamma(c-b)}$$

— n заменить на a , то, как можно догадаться, этот множитель примет вид

$$\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

но это не единственное изменение: следует добавить еще один член.

Гаусс занимался исследованием результатов и иного вида. Он считал два гипергеометрических ряда смежными, если все их параметры, за исключением одного, совпадают, а несовпадающие параметры различаются на единицу. Он показал, что функция общего вида ${}_2F_1\left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} \middle| x\right)$ и две смежные с ней функции ${}_2F_1$ линейно независимы. В силу симметрии функции

${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, b \\ c \end{array}\middle|x\right)$ по a и b имеется девять таких соотношений. Эти соотношения для смежных функций можно итерировать и таким образом показать, что любые три функции ${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+j, b+k \\ c+l \end{array}\middle|x\right)$, где j, k, l — целые числа, будут линейно независимыми. Поскольку

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, b \\ c \end{array}\middle|x\right) = \frac{ab}{c} {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a+1, b+1 \\ c+1 \end{array}\middle|x\right),$$

легко видеть, что дифференциальное уравнение Эйлера для ${}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} a, b \\ c \end{array}\middle|x\right)$ можно представить в виде одного из этих итерированных соотношений для смежных функций. Это разностное уравнение было дано Гауссом в конце его единственной опубликованной работы по гипергеометрическим функциям. В своей второй работе, которая так и не была издана при его жизни, Гаусс, рассматривая это уравнение как дифференциальное уравнение, получил большую часть явных формул, которые можно вывести непосредственно из этого уравнения. К ним относятся квадратичные преобразования, играющие очень важную роль в целом ряде проблем. Чтобы лучше понять значение этих преобразований, необходимо напомнить еще о двух важных открытиях восемнадцатого века.

Первым из них было изучение эллиптических интегралов, которыми занимались Фаньяно, Эйлер, Ланден и Лежандр, а также введение Лагранжем и Гауссом понятия арифметико-геометрического среднего. Вторым открытием было введение Лежандром и Лапласом сферических функций и многочленов Лежандра. Исследование эллиптических интегралов привело к эллиптическим функциям, которыми последние три четверти девятнадцатого века интенсивно занимались Абель, Якоби, Эйзенштейн, Вейерштрасс, Эрмит и многие другие. Второе открытие непосредственно связано с некоторыми алгебраическими подходами к исследованию специальных функций, которые были разработаны за последние пятьдесят лет. Миттаг-Леффлер [7] дал прекрасный исторический обзор первых работ по эллиптическим интегралам. В этой работе описывается преобразование Ландена в том виде, в каком его дал Лагранж (в ссылке на Эннепера на с. 291 должна быть указана с. 357 оригинальной работы, а не с. 307); Миттаг-Леффлер приводит также квадратичные преобразования Гаусса эллиптических интегралов первого рода. Интерес Лагранжа к эллиптическим интегралам объяснялся его желанием вычислить величину некоего важного

интеграла. Гаусс сначала исследовал последовательности $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = (a_n b_n)^{1/2}$; заметив, что они сходятся, он нашел величину, к которой они сходятся при $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 1$, и наконец вычислил предел в общем виде. Используя этот результат, Гаусс получил еще два результата, а именно ввел лемнискатные функции, являющиеся специальными эллиптическими функциями, и ввел два квадратичных преобразования общего вида обыкновенной гипергеометрической функции ${}_2F_1(a, b; c; x)$ с различными ограничениями на один из параметров. Эти функции образуют очень важный подкласс функций ${}_2F_1$ общего вида, поскольку, будучи умноженными на соответствующую алгебраическую функцию, они в точности составляют класс гипергеометрических рядов, которые мы называем функциями Лежандра.

Многочлены Лежандра интенсивно изучались в восемидесятых годах восемнадцатого века Лежандром и Лапласом. Эти многочлены были введены следующим образом. Функция $(c^2 - 2cr \cos \theta + r^2)^{-1/2}$ дает значение в точке P потенциала силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра C ; здесь r и c — расстояния от P и C до фиксированной точки O , а θ — угол между отрезками PO и OC . Разлагая эту функцию в степенной ряд по r , получаем

$$(c^2 - 2cr \cos \theta + r^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) r^n c^{-n-1},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n от x , называемый многочленом Лежандра. Лежандр и Лаплас вывели для этих многочленов следующие формулы:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n; \quad \int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (\text{L.1})$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad m \neq n; \quad (\text{L.1a})$$

$$\int_0^\pi [P_n(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1}.$$

$$P_n(\cos \theta) = (1/\pi) \int_0^\pi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi]^n d\varphi. \quad (\text{L.2})$$

$$P_n(\cos \theta) P_n(\cos \varphi) = (1/\pi) \int_0^\pi P_n(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \Psi) d\Psi. \quad (\text{L.3})$$

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = P_n(x). \quad (\text{L.4})$$

$$P_n(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi \cos \Psi) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \varphi) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\cos \theta) P_n^k(\cos \varphi) \cos k\Psi. \quad (\text{L.5})$$

Присоединенные функции Лежандра определяются соотношениями

$$P_n^k(x) = (-1)^k (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{L.6})$$

Еще раньше Лагранж получил эти же многочлены как решения разностного уравнения

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x). \quad (\text{L.7})$$

Каждая из приведенных выше формул — только одна из обширного класса формул для специальных функций более общего вида. Чтобы продемонстрировать эти формулы, мы ниже приведем соответствующие результаты для тригонометрических функций, а затем укажем условия их применения. Поскольку $\cos n\theta$ — многочлен степени n от $\cos \theta$, рассмотрим функцию $T_n(\cos \theta)$, определяемую соотношением $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-1}^1 [T_n(x)]^2 (1 - x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{T.1})$$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^\pi \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{T.1a})$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}. \quad (\text{T.2})$$

$$\cos n\theta \cos n\varphi = \frac{1}{2} [\cos n(\theta + \varphi) + \cos n(\theta - \varphi)]. \quad (\text{T.3})$$

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2y = 0, \quad y = T_n(x). \quad (\text{T.4})$$

$$u''(\theta) - n^2u(\theta) = 0, \quad u = \cos n\theta, \quad (\text{T.4a})$$

$$\cos n(\theta + \varphi) = \cos n\theta \cos n\varphi - \sin n\theta \sin n\varphi. \quad (\text{T.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{d \cos n\theta}{d\theta} &= -n \sin n\theta, \\ \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} &= \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} = nU_{n-1}(x), \quad x = \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{T.6})$$

$$2 \cos \theta \cos n\theta = \cos(n-1)\theta + \cos(n-1)\theta. \quad (\text{T.7})$$

$$\begin{aligned} xT_n(x) &= \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \\ xT_0(x) &= T_1(x). \end{aligned} \quad (\text{T.7a})$$

Соотношения ортогональности (L.1) и (T.1) являются фундаментальными. Поскольку $P_n(x)$ и $T_n(x)$ — многочлены, эти многочлены ортогональны. Для любого семейства многочленов от одной переменной, ортогонального относительно некоторой положительной меры, выполняется трехчленное рекуррентное соотношение

$$xp_n(x) = A_n p_{n+1}(x) + B_n p_n(x) + C_n p_{n-1}(x),$$

где $A_{n-1}C_n > 0$ и B_n — вещественная величина. Обратно, любое множество многочленов, удовлетворяющих этому рекуррентному соотношению, ортогонально относительно некоторой положительной меры, если $A_{n-1}C_n > 0$ и B_n — вещественная величина. Если $A_{n-1}C_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots, N$) и $A_N C_{N+1} = 0$, то эти многочлены ортогональны относительно положительной меры, носитель которой состоит лишь из конечного числа точек. Данное рекуррентное соотношение напоминает одно из соотношений Гаусса для смежных функций ${}_2F_1$; в ряде случаев можно показать, что это соотношение является вариантом одной из формул Гаусса или итерацией этих формул. В других случаях получаются иные гипергеометрические ряды: либо ${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ d, e \end{matrix} \middle| 1\right)$,

либо ${}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, n+a, b, c \\ d, e, f \end{matrix} \middle| 1\right)$, где $a+b+c+1=d+e+f$,

удовлетворяющие соотношениям для смежных функций более общего вида, которые приводят к ортогональным многочленам. Теперь переменная многочлена стоит на месте одного из параметров или нескольких параметров, а не является переменной степенного ряда. По этой причине, а также в силу нашего исключительного интереса к степенным рядам изучением и применением этих многочленов стали заниматься с некоторым опозданием.

Одна из причин, объясняющих полезность функций $\cos \theta$ и $\sin \theta$, состоит в их тесной связи с окружностью. Для доказательства формулы (T.5) самым простым способом надо сделать поворот окружности. Такое доказательство было дано Коши. По-

добным же образом, чтобы доказать формулу сложения (L.5) для $P_n(x)$, надо рассмотреть группу поворотов, действующую на сфере в R^3 .

Чтобы разобраться в ситуации, рассмотрим сначала окружность. Функцию $f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $f(0) = f(2\pi)$, можно разложить в ряд Фурье

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta.$$

Это разложение можно использовать для построения гармонической функции $u(x, y)$ в круге $x^2 + y^2 < 1$, принимающей заданные значения на границе. Пусть

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta],$$

где $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Тогда $u(x, y)$ будет гармонической функцией, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(\theta),$$

если функция $f(\theta)$ непрерывна при $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Подобная задача существует и для трех переменных, и решается она аналогичным образом. Прежде всего необходимо найти семейство функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Для этого вводятся сферические координаты $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, а затем находятся решения уравнения Лапласа вида $a(r)b(\theta)c(\varphi)$. Можно взять $a(r) = r^n$, $c(\varphi) = \cos k\varphi$ или $c(\varphi) = \sin k\varphi$ и $b(\theta) = P_n^k(\cos \theta)$. Функции $r^n \cos n\theta = \operatorname{Re}(x + iy)^n$ и $r^n \sin n\theta = \operatorname{Im}(x + iy)^n$ являются однородными многочленами от x и y степени n . Подобным образом $r^n P_n^k(\cos \theta) \cos k\varphi$ и $r^n P_n^k(\cos \theta) \sin k\varphi$, $k = 0, 1, \dots, n$, являются однородными гармоническими линейно независимыми много-

членами от x , y и z степени n . Существует $2n + 1$ таких многочленов, и именно это число стоит в знаменателе в формуле (L.1). Подобным образом функции $r^n \cos n\theta$ и $r^n \sin n\theta$ линейно независимы при $n = 1, 2$, и во всех этих случаях существуют обе функции; если же $n = 0$, то имеется только одна из этих функций. Этим обстоятельством объясняется вид знаменателей в (T.1). Далее, при помощи этих однородных гармонических многочленов гармоническая функция в шаре $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ с заданными граничными значениями строится точно так же, как и в случае окружности, поскольку функции $P_n^k(\cos \theta) \cos k\phi$ и $P_n^k(\cos \theta) \sin k\phi$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = 0, 1, \dots$, образуют полную ортогональную систему.

Формула (L.3) является основным функциональным уравнением, которому удовлетворяет зональная сферическая гармоника степени n на S^2 («зональная» означает «не зависящая от угла ϕ »); зональные сферические гармоники мы называем сферическими функциями. При более общей постановке вопроса необходимым условием возникновения таких сферических функций является наличие метрического пространства и группы G , действующей на этом пространстве. Это пространство должно быть однородно в том смысле, что в результате действия группы любая точка отображается в любую другую точку. Кроме того, это пространство должно обладать следующим свойством: если $d(x_1, y_1) = d(x_2, y_2)$, то имеется элемент $g \in G$, такой, что $g(x_1) = x_2$, $g(y_1) = y_2$. О таких пространствах говорят, что они двуточечно однородны. Кроме сферы в R^3 и сфер любой размерности, вещественные проективные пространства, комплексные проективные пространства, кватернионные проективные пространства, а также двумерное проективное пространство над числами Кэли являются компактными двуточечно однородными Римановыми многообразиями. Во всех этих случаях сферические функции являются ортогональными многочленами от переменной, зависящей от расстояния. Каждый из этих ортогональных многочленов является также гипергеометрической функцией

вида ${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+a \\ b \end{matrix} \middle| t\right)$ при некоторых a и b . Меру $\sin \theta d\theta$ в случае (L.1a) дает размер орбиты малой дуги $d\theta$, получающийся в результате поворота, при котором северный полюс не подвижен.

Имеются и другие компактные двуточечно однородные пространства. Для наглядности рассмотрим множество вершин единичного куба в R^N . В этом случае сферические функции также являются ортогональными многочленами, причем ортогональны они относительно симметрического биномиального распределения

ния $\binom{N}{x} 2^{-N}$, $x = 0, 1, \dots, N$, поскольку это распределение дает размер орбиты любой точки с x нулями и $N - x$ единицами, получаемый в результате действия на это пространство октаэдальной группы, оставляющей неподвижной точку $(0, 0, \dots, 0)$. Эти ортогональные многочлены также являются гипергеометрическими функциями ${}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, -x \\ -N \end{array} \middle| 2\right)$, $x, n = 0, 1, \dots, N$, а связывающее их трехчленное рекуррентное соотношение является одним из соотношений Гаусса для смежных функций. Эти многочлены называются многочленами Кравчука (хотя введены они были почти сто лет тому назад Грэмом) и играют важную роль в теории кодирования, которой посвящен третий том настоящей Энциклопедии («Теория информации и кодирования»).

Дифференциальные уравнения (L.4), (T.4) и (T.4a) получаются при решении уравнения Лапласа методом разделения переменных. Формулы сложения (L.5) и (T.5) относятся к наиболее важным из известных для этих функций формул. Для большинства двуточечного однородных пространств, где для сферических функций найдены явные формулы, имеется формула сложения, являющаяся неким ортогональным разложением и содержащая функциональное уравнение в качестве постоянного члена. Например, проинтегрировав (L.5) по отрезку $[0, \pi]$ по мере $d\Psi$ и применив формулу (T.1a), мы получим (L.3). Наиболее естественный способ вывода формул сложения этого типа состоит в том, что мы используем действие группы на это пространство. Фактически этим же методом пользовались Лежандр и Лаплас двести лет тому назад.

Другим важным классом функций, введенным в восемнадцатом столетии, являются функции Бесселя. Функции Бесселя первого рода $J_\alpha(x)$ можно определить следующим соотношением:

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha+1) n!} = \frac{(x/2)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} {}_0F_1\left(\begin{array}{c} - \\ \alpha+1 \end{array} \middle| \frac{-x^2}{4}\right).$$

После элементарных трансцендентных функций эти функции изучались наиболее интенсивно и нашли применение во многих областях, где применяется математика. Они тесно связаны с функциями Лежандра, и изучением этой связи занимались многие ученые. Простым примером такой связи является формула Мелера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\cos(z/n)) = J_0(z).$$

Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: будем рассматривать многочлены Лежандра как сферические функции на сфере большого радиуса и посмотрим, что происходит в окрестности северного полюса. Сфера при этом уплощается, и это наводит на мысль, что функция $J_0(z)$ должна играть ту же роль в R^2 , что и функция $P_n(\cos \theta)$ на S^2 . Аналоги зональных функций называются радиальными функциями, т. е. функциями, зависящими только от расстояния от начала координат. Пуассон установил следующий важный факт: если $f(x_1, x_2) = g((x_1^2 + x_2^2)^{1/2})$ и

$$F(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp[i(x_1 y_1 + x_2 y_2)] dx_1 dx_2$$

то

$$F(y_1, y_2) = G((y_1^2 + y_2^2)^{1/2})$$

и

$$G(t) = 2\pi \int_0^{\infty} g(r) r J_0(rt) dr.$$

Следующим важным этапом в исследовании специальных функций было введение Якоби и Абелем эллиптических функций и тэта-функций. (Исторический обзор можно найти в работе Миттаг-Леффлера.) После введения этих функций был сделан целый ряд открытий, которые позволили несколько изменить наш взгляд на этот предмет. Важным достижением было введение Гейне класса рядов, аналогичных гипергеометрическим рядам. Напомним, что гипергеометрическим рядом называется ряд $\sum a_n$, где a_{n+1}/a_n — рациональная функция от n . Ряды, введенные Гейне, имеют вид $\sum a_n$, где a_{n+1}/a_n — рациональная функция от q^n для некоторого фиксированного q . Роль, которую в гипергеометрическом ряде играет сдвинутый факториал $(a)_n$, теперь исполняет $(a; q)_n = (1 - a)(1 - aq)\dots(1 - aq^{n-1})$.

Если $|q| < 1$, то $(a; q)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - aq^n)$, а $(a; q_n) = (a, q)_{\infty}/(aq^n; q)_{\infty}$ определяется для нецелочисленных значений n , пока имеет место соотношение $aq^{n+k} \neq 1$, $k = 0, 1, \dots$. Эйлер вычислил два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(x; q)_{\infty}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{(q; q)_n} = (x; q)_{\infty}.$$

Эти равенства суть частные случаи q -биномиальной теоремы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} x^n = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}},$$

приписываемой различным ученым. Гейне получил этот результат, когда предложил основной аналог функции ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right)$

в 1847 г., Коши опубликовал доказательство несколькими годами ранее, а Якоби ссылается на работу Швейнса 1820 г. Эта формула приводится в работе Швейнса, но последний ссылается на более раннюю работу Роте. К сожалению, я не знаком с работой Роте и не могу подтвердить, что эта теорема действительно была известна уже в 1811 г., как утверждает Швейнс; впрочем, вполне вероятно, что он прав, так как в 1811 г. Гаусс опубликовал формулы, связанные с этим результатом.

Одним из наиболее важных рядов является ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n = (q^2; q^2)_{\infty} (-qx; q^2)_{\infty} (-qx^{-1}; q^2)_{\infty},$$

сумма которого представляет собой известную тэта-функцию. Этот результат был не первым примером билатерального ряда (ряда, бесконечного в обоих направлениях), поскольку

$$\begin{aligned} \pi \operatorname{ctg} \pi z &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{z-m} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-m} - \frac{1}{\frac{1}{2}-m} \right) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}-z)}{(m-z)(m-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

и

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2},$$

тем не менее это было весьма плодотворным открытием. Первоначально Якоби, исследуя эллиптические функции в *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* (1829 г.), получил результаты для тэта-функций (как следствия результатов для эллиптических функций). Позднее он обратил эту процедуру и использовал тэта-функции, чтобы получить результаты для эллиптических функций. Функция $\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n$ появилась в работе Фурье, посвященной анализу уравнения теплопроводности, а Пуассон получил очень важное преобразование этой функции,

но тот факт, что эта функция является фундаментальной, установил и объяснил Якоби. Недавно для этой функции были получены новые результаты, позволяющие применить к ней теоретико-групповые методы исследования, подобные тем, которые были указаны нами выше. Соответствующей группой является трехмерная группа Гейзенберга, т. е. группа матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & z & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(см. работу Картье [5], а также Ауслендер и Толимьери [1]).

Другими примерами аналогов гипергеометрических рядов являются многочлены, получающиеся как сферические функции на дискретных двуточечных однородных пространствах в результате действия на эти пространства некоторых групп Шевалле. Пока еще рано говорить, какое значение будут иметь эти функции, но я твердо уверен, что, развивая эту идею, мы получим важные результаты. В девятнадцатом столетии эллиптические функции были исследованы самым подробным образом и, казалось бы, заняли определенное место в математическом образовании. Усилия ученых постигнуть смысл этих функций породили много идей. Однако сами эти функции оказались не столь полезными, как можно было ожидать, и поэтому их место в общепринятых программах обучения математике заняли другие, представляющиеся более полезными понятия, и в течение десятилетий эллиптические функции были известны лишь ограниченному кругу ученых-теоретиков, некоторым специалистам, занимающимся прикладными вопросами, и немногим инженерам. В настоящее время каждый, кто изучает и применяет комбинаторный анализ, стремится узнать как можно больше об упомянутых выше аналогах гипергеометрических рядов. Сюда можно отнести специалистов в области статистики, занимающихся блочным планированием, и многих специалистов, которые изучают и применяют в своей работе вычислительные алгоритмы. Эти ряды играют важную роль в теории разбиений, которой посвящен второй том («Теория разбиений») настоящей Энциклопедии.

Большим вкладом в развитие учения о специальных функциях в прошлом столетии было введение дифференциальных уравнений более чем с тремя регулярными особыми точками. Риман заметил, что дифференциальное уравнение Эйлера

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0, \quad y = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x\right).$$

имеет регулярные особые точки в $x = 0, 1, \infty$ и что при помощи дробно-линейного преобразования эти особые точки можно переместить в три произвольные точки. Полученное в результате дифференциальное уравнение определяется положением этих особых точек и некоторыми параметрами, характеризующими природу решений в окрестности этих точек. Риман показал простой способ получения результатов Гаусса, Куммера и некоторых результатов Якоби, относящихся к гипергеометрическим рядам, и нашел кубическое преобразование, которое до сих пор еще по-настоящему не понято. Однако истинная ценность его работы состоит в установлении того факта, что особые точки дифференциального уравнения дают гораздо больше информации о его решении, чем это предполагалось. Впоследствии были предложены и другие дифференциальные уравнения, например уравнения Хойна, Матье, Ламе и уравнения для сфероидальных волновых функций, часто получающиеся при разделении переменных в волновом уравнении или уравнении Лапласа, вследствие которого эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Решения этих уравнений являются интересными специальными функциями, значительно более сложными, чем гипергеометрические функции. До сих пор все еще непонятно, какой подход к изучению этих функций является наилучшим, и можно надеяться, что алгебраические методы, предлагаемые Миллером в его книге, дадут нам возможность действительно понять эти важные функции.

Аппель ввел гипергеометрические функции от двух переменных и установил для них результаты, аналогичные некоторым результатам, полученным для обычных гипергеометрических функций. Однако, несмотря на то что мы обладаем рядом методов, позволяющих плодотворно исследовать некоторые аспекты этой проблемы, истинное понимание гипергеометрических функций от двух переменных остается делом будущего.

Пинчерле, а впоследствии Меллин и Барнс предложили новый способ изучения гипергеометрических рядов и функций. Они проинтегрировали отношения гамма-функций и без труда получили аналитические продолжения гипергеометрических функций. Интегралы рассмотренного ими вида встречаются во многих работах, начиная с ранней работы Мелера, посвященной проблемам теории электричества с конической симметрией, и кончая работой Баргманна о представлениях группы Лоренца.

Пуанкаре, исследуя автоморфные функции, получил важные обобщения эллиптических функций. Было предложено несколько способов обобщения этих функций на несколько переменных. Одним из наиболее плодотворных из них оказался предложенный Зигелем метод, в котором используются функции матричного аргумента. Гамма-функции от матричного аргумента

были введены несколько раньше Ингамом в связи с его работами по статистике. С точки зрения специальных функций, используемых в прикладной математике, основную пользу от автоморфных функций, возможно, мы получим в виде методов, которые могут быть применены для развития теории функций от многих переменных; хотя теория гипергеометрических функций и аналогичных им функций Гейне от нескольких переменных почти не разработана, мы имеем достаточно результатов, чтобы понять, что можно получить еще много фундаментальных результатов. Хорошим примером может служить недавно вышедшая работа Макдональда, посвященная соотношениям, подобным тройному произведению для тэта-функции, которые он получил из аффинных систем корней классических алгебр Ли. Как гипергеометрические функции от нескольких переменных можно рассматривать интегралы Фейнмана (см. [4]), а также $(3n - j)$ -символы, применяющиеся для разложения тензорных произведений представлений группы $SU(2)$ [2]. И те и другие очень полезны и тем не менее еще мало исследованы. Таким образом, положение в этой области математики нисколько не отличается от положения в других областях этой науки; необходимо как можно быстрее ответить на все вопросы, связанные со специальными функциями от многих переменных.

До сих пор мы не дали определения термина «специальная функция». Я даю простое, но не инвариантное относительно времени определение: функция называется специальной, если она встречается настолько часто, что ей присваивается название. Имеется целый ряд очень важных специальных функций, которые не укладываются в изложенную выше схему, например дзета-функция Римана, которая играет основную роль в изучении простых чисел и в решении многих других теоретико-числовых проблем. Другим примером таких функций могут служить многочлены Бернулли и числа Бернулли. Числа Бернулли были введены в целях вычисления рядов, а теперь они часто встречаются в совершенно неожиданных ситуациях.

Гарри Бейтмен составил список более чем тысячи специальных функций. И, хотя многие из этих функций являются частными случаями гипергеометрических рядов и нет никаких оснований присваивать им особые названия, поскольку все установленные для этих функций факты являются частными случаями результатов, известных для гипергеометрических рядов более общего вида, совершенно очевидно, что многие функции заслуживают того, чтобы о каждой из них были написаны отдельные книги. Некоторые из этих функций обладают столь интересными свойствами и встречаются настолько часто, что каждое поколение математиков непременно заново начинает исследовать их и регистрировать полученные результаты, с тем чтобы ими могли

пользоваться другие. Пока нельзя точно сказать, какие книги по специальным функциям выйдут в настоящей серии, но в настоящее время не существует надлежащего подхода к гипергеометрическим рядам и их аналогам, введенным Гейне. Имеется несколько работ [3, 6, 8], в которых применяется алгебраический подход к исследованию специальных функций, но ни в одну из них не включены очень интересные исследования унитарной группы, которые приводят к формулам сложения для многочленов Якоби и Лагерра и для круговых многочленов, образующих важный класс ортогональных многочленов от двух переменных. Дискретные ортогональные многочлены тоже рассматриваются неадекватным образом. Все это — материал для будущих книг.

Существует также ряд очень интересных приложений специальных функций к комбинаторным задачам, лишь частично рассмотренных в упомянутых выше втором и третьем томах настоящей Энциклопедии. И подождем дальнейших открытий. Опыт подсказывает, что нас ожидают удивительные открытия в этой области математики. Такие открытия можно предсказывать ретроспективно, но не заранее.

Ричард Аски,
Главный редактор серии
«Специальные функции»

Список литературы

1. Ауслендер, Толимьери (Auslander L., Tolimieri R.). Abelian harmonic analysis, theta functions and function algebras on a nilmanifold. — Lecture Notes in Mathematics, No. 436. — Berlin: Springer, 1975.
2. Биденхарн, Вандам (Biedenharn L. C., VanDam H.). Quantum theory of angular momentum. — New York: Academic Press, 1965.
3. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
4. Голубева В. А. Некоторые задачи аналитической теории интегралов Фейнмана. — Мат. заметки, 1976, т. 31, 139—207; УМН, 1976, т. 31, 135—202.
5. Картье (Cartier P.). Quantum mechanical commutative relations and theta functions. — In: Proc. Symp. Pure Math. IX. — Providence: Amer. Math. Soc., 1965, p. 363—387.
6. Миллер (Miller W., Jr.). Lie theory and special functions. — New York: Academic Press, 1968.
7. Миттаг-Леффлер (Mittag-Leffler G.). An introduction to the theory of elliptic functions. — Ann of Math., Ser. 2, v. 24, 1923, 271—351. (Перевод работы, впервые опубликованной в 1876 г.)
8. Толмен (Tolman J. D.). Special functions, a group theoretic approach. — New York: W. A. Benjamin, 1968.