
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой книге рассматривается связь между операторами симметрии линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, системами координат, в которых это уравнение допускает решения с разделенными переменными, и свойствами получающихся при этом специальных функций. Книга рассчитана на широкий круг специалистов, занимающихся дифференциальными уравнениями в частных производных, специальными функциями и теорией групп Ли, т. е. специалистов в области теории групп, прикладных вопросов математики, теоретической физики и химии, а также инженеров. Мы продемонстрируем, как в старый метод разделения переменных вводятся некоторые современные теоретико-групповые приемы, применение которых может дать нам основу для теории специальных функций. В частности, мы покажем в явном виде, что все специальные функции, получающиеся в процессе разделения переменных в уравнениях математической физики, можно изучать при помощи теоретико-групповых методов. Это относится к функциям Ламе, Айнса, Матье и другим функциям, включая функции гипергеометрического типа.

Сейчас в истории применения теоретико-групповых методов к теории специальных функций наступил критический момент. Основные связи между группами Ли, специальными функциями и методами разделения переменных были выяснены совсем недавно. Теперь появилась возможность сконструировать некий теоретико-групповой алгоритм, который, будучи примененным к заданному дифференциальному уравнению, сможет дать рациональное описание возможных систем координат, допускающих решения с разделенными переменными, и различные теоремы разложений, связывающие решения с разделенными переменными (специальные функции), полученные в различных системах координат. Действительно, для большинства важных линейных уравнений решения с разделенными переменными являются общими собственными функциями множеств коммутирующих операторов второго порядка из универсальной обвер-

тывающей алгебры алгебры Ли симметрий, соответствующей этому уравнению. Задача разложения одной системы решений с разделенными переменными по элементам другой сводится к задаче теории представлений алгебры Ли симметрий.

Несмотря на простоту, элегантность и полезность этого метода, он пока применялся к сравнительно немногим дифференциальным уравнениям. (Во время работы над настоящей книгой волновое уравнение $(\partial_{tt} - \Delta_3)\Psi = 0$ все еще интенсивно изучалось.) Кроме того, пока что доказано мало теорем, раскрывающих все возможности этого метода. Автор надеется, что настоящая работа, рассчитанная на широкий круг специалистов, сможет убедить читателя в исключительной полезности и уместности теоретико-групповых методов при изучении разделения переменных и специальных функций. Можно также надеяться, что эта работа вызовет у некоторых читателей интерес к данной области математики и что со временем мы получим от них ответы на многие еще не решенные задачи.

Идеи, связывающие группы Ли, специальные функции и разделение переменных, исходят из различных источников. Первая глубокая работа, в которой изучались связи теории представлений групп со специальными функциями, обычно приписывается Картану [65]. Однако первые подробные указания на использование этих связей в вычислительных целях, возможно, дают работы Вигнера. Вигнер начал работать в этой области еще в тридцатых годах, а в 1955 г. в конспектах лекций, прочитанных в Принстонском университете, он изложил полученные им результаты. Впоследствии эти результаты были обобщены и усовершенствованы в книге Толмена [122].

Следующий большой вклад в теорию вычислений внес Виленкин, который, начиная с 1956 г., выпустил целую серию работ, основные результаты которых изложены в его книге [37]. Этот энциклопедический труд создавался под сильным влиянием явных конструкций неприводимых представлений классических групп, предложенных Гельфандом и Наймарком (см., например, [44]). Виленкин (и Вигнер) получил специальные функции в виде матричных элементов операторов, определяющих неприводимые представления групп.

Еще одним предшественником нашей теории явился метод факторизации. Данный метод был предложен Шредингером, который применил его к решению не зависящего от времени уравнения Шредингера для ряда систем, представляющих определенный интерес с физической точки зрения (см., например, [141]). Это полезное орудие вычисления собственных функций и рекуррентных соотношений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка было разработано несколькими авторами, включая Инфельда и Халла

[51], которые дали обзор состояния теории на 1951 г. Совершенно независимая и несколько иная разработка этой теории дана в работе Инуи [50].

Автор настоящей книги также внес определенный вклад в развитие этой теории, показав в 1964 г. [81], что метод факторизации эквивалентен теории представлений 4-алгебр Ли.

Другой подход к решению проблем, рассматриваемых в настоящей книге, был предложен и разработан Вейснером в его замечательных работах [33—35], первая из которых появилась в 1955 г. Вейснер раскрыл теоретико-групповой смысл семейств производящих функций для гипергеометрических функций, функций Эрмита и функций Бесселя. В этих статьях можно также найти примеры допускающих разделение переменных систем координат, описанных при помощи операторов симметрии алгебры Ли. Теория Вейснера получила дальнейшее развитие и была связана с методом факторизации в монографии [83] автора настоящей книги, где рассматривалась главным образом теория локальных групп Ли, а не теория глобальных групп Ли, как в работах Толмена и Виленкина.

Необходимо также сказать несколько слов о монографии Труслелла [123], посвященной F -уравнению, в которой показан способ прямого получения производящих функций и интегральных представлений для специальных функций, если известны дифференциальные рекуррентные соотношения, которым эти специальные функции удовлетворяют. В 1968 г. было установлено, что метод Труслелла вполне соответствует теоретико-групповому подходу к изучению специальных функций [83].

Основная идея настоящей работы состоит в том, что системы координат, допускающие разделение переменных для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, можно охарактеризовать при помощи систем операторов симметрии второго порядка для этих уравнений. Эта идея вполне естественна с квантовомеханической точки зрения. Кроме того, уже с тех пор, как появилась работа Ли, известно, что данная идея справедлива для некоторых простых систем координат, таких, как сферические, цилиндрические и декартовы, т. е. систем координат, связанных с некоей подгруппой.

Для некоторых важных уравнений Шредингера, например уравнения для атома водорода, известен способ операторной характеристики некоторых неподгрупповых систем координат [10, 71]. Но явное утверждение о связи между операторами симметрии и разделением переменных впервые появилось лишь в 1965 г. в работе Винтернитца и Фриша [40], которые дали теоретико-групповую характеристику допускающих разделение

переменных систем координат, соответствующих уравнениям на собственные значения для операторов Лапласа — Бельтрами на двумерных пространствах с постоянной кривизной. Эта работа была продолжена Винтернитцем и др. (см. [38, 39, 79, 108]). И наконец, автор настоящей книги в сотрудничестве с Бойером и Калнинсом дал теоретико-групповую классификацию систем координат, допускающих разделение переменных для целого ряда важных уравнений в частных производных, и исследовал связь между этой классификацией и теорией специальных функций. Интересной особенностью этой работы, которой мы обязаны Калнинсу, было открытие целого ряда допускающих разделение переменных систем координат, не указанных в работе [101], на которую обычно ссылаются все авторы. Другой особенностью этой работы является разработка теоретико-группового метода, позволяющего получать тождества для негипергеометрических специальных функций, таких, как функции Матье, Ламе, сфероидальные функции, функции Айнса, функции ангармонического осциллятора, а также для более известных гипергеометрических функций.

Для понимания настоящей книги необходимо некоторое знакомство с группами и алгебрами Ли (точнее, с гомоморфизмом и изоморфизмом групп и алгебр Ли); необходимые знания могут дать работы [45, 86]. Однако рассматриваемые нами примеры просты и должны быть понятны всем, кто хотя в какой-то мере знаком с теорией Ли. Предполагается также, что читатель имеет некоторый опыт в решении дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, скажем, в прямоугольных, полярных и сферических координатах.

В силу недостатка места, времени и компетенции автора мы были вынуждены опустить некоторые темы; наиболее важное место среди них занимает теория сферических функций на группах. Этой теме, которая является обобщением теории сферических гармоник, посвящена обширная литература (см., например, [126, 131]). Кроме того, недавно при помощи сферических функций была получена формула сложения для многочленов Якоби [69, 138]. Но сферические функции всегда связаны с координатами подгрупп, поэтому для большинства даже элементарных уравнений, рассматриваемых в настоящей книге, они не могут охватить все специальные функции, получающиеся в процессе разделения переменных.

Краевые задачи также не рассматриваются, хотя при их решении метод операторов симметрии имеет большое значение (см. [19]). В последней работе, а также в работах [106, 144, 145] рассматривается применение метода операторов симметрии

к решению нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных; этот вопрос нами не рассматривался, так как окончательного мнения по нему пока нет.

Я искренне благодарен Полю Винтернитцу за полезные обсуждения основных концепций, связывающих симметрию и разделение переменных. И в заключение я выражаю свою признательность Чарльзу Бойеру и Эрни Калнинсу, без творческого сотрудничества с которыми эта книга не была бы написана.

Уиллард Миллер, мл.