

Приложение А

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

В этом разделе приводятся некоторые необходимые для работы с настоящей книгой основные факты, касающиеся групп и алгебр Ли. Полные доказательства и подробный анализ этих фактов можно найти в работе [86]. Поскольку почти все группы Ли, с которыми приходится сталкиваться в математической физике, являются группами матриц, мы ограничимся рассмотрением локальных линейных групп Ли.

Пусть W — открытое связное множество, содержащее $e = (0, \dots, 0)$ в пространстве R^n всех вещественных n -наборов $g = (g_1, \dots, g_n)$.

Определение. Любая n -мерная вещественная локальная линейная группа Ли G является множеством невырожденных комплексных $(m \times m)$ -матриц $A(g) = A(g_1, \dots, g_n)$, определенных для каждого $g \in W$ и таких, что

1) $A(e) = E_m$ (единичная матрица);

2) элементы матрицы $A(g)$ есть аналитические функции параметров g_1, \dots, g_n , и отображение $g \rightarrow A(g)$ взаимно однозначно;

3) матрицы $\partial A(g)/\partial g^j, j = 1, \dots, n$, линейно независимы для каждого $g \in W$;

4) существует некоторая окрестность W' элемента e в пространстве R^n , $W' \subset W$, такая, что для любой пары n -наборов g, h из W' найдется n -набор $k \in W$, удовлетворяющий условию $A(g)A(h) = A(k)$, причем в левой части этого равенства производится обычное умножение матриц.

Локальную группу Ли можно рассматривать как окрестность единицы в глобальной группе Ли. (С теорией глобальных групп Ли можно познакомиться в [131, 134].) Если в приведенном выше определении W и W' являются окрестностями элемента $e \in C^n$, то G является комплексной локальной линейной группой Ли.

Параметры $g = (g_1, \dots, g_n)$ определяют локальные координаты на группе G , и можно показать, что групповое умножение

можно представить в локальных координатах через $k = \varphi(g, h)$, где φ — аналитическая векторнозначная функция своих $2n$ аргументов для g и h , достаточно близких к e , и $\varphi(e, g) = \varphi(g, e) = g$. Любое преобразование локальных координат $g' = f(g)$ приводит к новой группе Ли, которую мы идентифицируем с группой G .

Пусть $g(t)$ — аналитическая кривая в R^n , такая, что $g(0) = e$. (Здесь t — вещественный параметр, а $g(t)$ определена и аналитична по t при $|t| < 1$.) Алгебра Ли \mathcal{G} группы G является множеством всех $(m \times m)$ -матриц $\mathcal{A} = (d/dt)A(g(t))|_{t=0}$, где g пробегает по всем аналитическим кривым, проходящим через e . Отсюда следует, что каждая матрица $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$ является линейной комбинацией n линейно независимых матриц

$$\mathcal{C}_i = \partial A(g)/\partial g_i|_{g=e}.$$

Действительно, $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{C}_i$, где $\alpha_i = (dg_i/dt)(t)|_{t=0}$. Это говорит о том, что \mathcal{G} является n -мерным вещественным векторным пространством, на котором введено сложение и скалярное умножение матриц. Матрицы \mathcal{C}_i образуют базис алгебры \mathcal{G} .

Кроме того, матричный коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ принадлежит \mathcal{G} для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{G}$. В частности, $[\mathcal{C}_l, \mathcal{C}_s] = \sum_{i=1}^m c_j^{ls} \mathcal{C}_i$, $1 \leq l, s \leq n$, где $c_j^{ls} = c_{j, ls} - c_{j, sl}$ и

$$c_{j, ls} = \frac{\partial^2}{\partial g_j \partial h_s} \varphi_j(g, h) \Big|_{g=h=e}, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Экспонента $(m \times m)$ -матрицы \mathcal{A} является следующей $(m \times m)$ -матрицей:

$$\exp(\mathcal{A}) = \sum_{p=0}^{\infty} (p!)^{-1} \mathcal{A}^p. \quad (\text{A.1})$$

В (A.1) мы имеем сходящийся к аналитической функции ряд от элементов матрицы \mathcal{A} , причем $\exp(\mathcal{A})\exp(-\mathcal{A}) = E_m$, и для $(m \times m)$ -матриц \mathcal{A}, \mathcal{B} , для которых $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, имеет место соотношение $\exp(\mathcal{A})\exp(\mathcal{B}) = \exp(\mathcal{A} + \mathcal{B})$.

Обозначим элементы матрицы \mathcal{A} через \mathcal{A}_{ij} , $1 \leq i, j \leq m$, и определим норму матрицы \mathcal{A} через $\|\mathcal{A}\| = \max_{i,j} |\mathcal{A}_{ij}|$. Существуют положительные числа ε и δ , такие, что (1) $\exp(\mathcal{A}) \in G$ для каждой матрицы $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, если $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$, и (2) каждую матрицу $A \in G$, для которой $\|A - E_m\| < \delta$, можно представить как $A = \exp(\mathcal{A})$ для единственной матрицы $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$. Экспоненциальное отображение является взаимно однозначным аналитическим отображением окрестности нулевой матрицы в \mathcal{G} .

на окрестность единичной матрицы E_m в G . Представляя A через $\exp(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{C}_j$, можно параметризовать G , используя канонические координаты a_1, \dots, a_n .

Пусть U — открытое связное множество в \mathbb{C}^p . Любую точку $\mathbf{z} \in U$ можно задать через ее координаты: $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p)$, $z_i \in \mathbb{C}$. Пусть \mathbf{Q} — отображение, которое каждой паре (\mathbf{z}, A) , $\mathbf{z} \in U$, $A \in G$, ставит в соответствие элемент $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, A)$, принадлежащий \mathbb{C}^p . Будем писать $\mathbf{Q}(\mathbf{z}, A) = \mathbf{z}^A \in \mathbb{C}^p$.

Определение. Если \mathbf{Q} удовлетворяет следующим условиям:

- 1) \mathbf{z}^A — аналитическое отображение от $p + n$ координат точки \mathbf{z} и матрицы A ;
- 2) $\mathbf{z}^{E_m} = \mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z} \in U$;
- 3) если $\mathbf{z}^A \in U$, то $(\mathbf{z}^A)^B = \mathbf{z}^{(AB)}$ для всех $A, B \in G$, таких, что $AB \in G$,

то n -мерная локальная линейная группа Ли G действует на множество U как локальная группа Ли преобразований.

Предположим, что G — локальная группа Ли преобразований на множестве U и что \mathcal{F} — пространство всех функций $f(\mathbf{z})$, аналитических в окрестности фиксированной точки $\mathbf{z}^0 \in U$. (Предполагается, что окрестность зависит от функции.) Локальная мультипликативная функция v для этой группы преобразований представляет собой скалярнозначную аналитическую функцию $v(\mathbf{z}, A)$ от $p + n$ координат, $\mathbf{z} \in U$, $A \in G$, и такую, что (1) $v(\mathbf{z}, E_m) = 1$ и (2) $v(\mathbf{z}, AB) = v(\mathbf{z}, A)v(\mathbf{z}^A, B)$ для A, B , $AB \in G$. Заметим, что $v(\mathbf{z}, A) \equiv 1$ — (тривиальная) локальная мультипликативная функция. (С общей теорией локальных мультипликативных функций можно познакомиться в работе [83].)

Локальное мультипликативное представление \mathbf{T} , соответствующее G , U , \mathcal{F} , v , является отображением $\mathbf{T}(A)$ пространства \mathcal{F} на себя, определенным для $A \in G$ и $f \in \mathcal{F}$ посредством соотношения

$$[\mathbf{T}(A)f](\mathbf{z}) = v(\mathbf{z}, A)f(\mathbf{z}^A). \quad (\text{A.2})$$

Так как v — локальная мультипликативная функция, то

- 1) $\mathbf{T}(E_m)f = f$ для всех $f \in \mathcal{F}$;
- 2) $\mathbf{T}(AB)f = \mathbf{T}(A)[\mathbf{T}(B)f]$ для всех $A, B \in G$, достаточно близких к E_m .

Пусть $A(g(t))$ — однопараметрическая кривая, принадлежащая G , с элементом алгебры Ли

$$\mathcal{A} = \frac{d}{dt} A(g(t))|_{t=0} = \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{C}_j, \quad (\text{A.3})$$

как определено выше. Пусть \mathbf{T} — мультипликативное представление группы G и $f \in \mathcal{F}$.

Определение. Обобщенная производная Ли $D_{\mathcal{A}}$ функции f является аналитической функцией

$$D_{\mathcal{A}}f(z) = \frac{d}{dt} [\mathbf{T}(Ag(t))f](z) |_{t=0}. \quad (\text{A.4})$$

Непосредственные вычисления дают

$$D_{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n P_{ij}(z) \alpha_j \partial_{z_i} + \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j(z), \quad (\text{A.5})$$

где $D_{\mathcal{A}}$ зависит только от $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, а не от возможных кривых $g(t)$, которые приводят к \mathcal{A} . Элементы $P_{ij}(z)$ вычисляются однозначно по $\mathbf{Q}(z, A)$, а элементы $P_j(z)$ — по $v(z, A)$. В частности, если $v = 1$, то $P_j = 0$ и $D_{\mathcal{A}}$ будет *обыкновенной* производной Ли.

Приведенные ниже теоремы, часто используемые в настоящей книге, предложены Софусом Ли [83, 86].

Теорема A.1. Обобщенные производные Ли локального мультиликативного представления образуют алгебру Ли относительно операций сложения производных и скобки Ли

$$[D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}] = D_{\mathcal{A}}D_{\mathcal{B}} - D_{\mathcal{B}}D_{\mathcal{A}}. \quad (\text{A.6})$$

Эта алгебра является гомоморфным образом алгебры \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} D_{(a\mathcal{A}+b\mathcal{B})} &= aD_{\mathcal{A}} + bD_{\mathcal{B}}, & D_{[\mathcal{A}, \mathcal{B}]} &= [D_{\mathcal{A}}, D_{\mathcal{B}}], \\ \mathcal{A}, \mathcal{B} &\in \mathcal{G}, \quad a, b \in R. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(Смысл равенств (A.6) и (A.7) состоит в том, что они выполняются на любой функции $f \in \mathcal{F}$.)

Теорема A.2.

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}(\exp(t\mathcal{A}))f](z) &= \sum_{j=0}^{\infty} (j!)^{-1} t^j D_{\mathcal{A}}^j f(z) = \\ &= (\exp D_{\mathcal{A}})f(z), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(Этот результат справедлив для всех $t \in R$ при достаточно малых $|t|$.)

Теорема A.3. Пусть

$$D_j = \sum_{i=1}^p P_{ij}(z) \partial_{z_i} + P_j(z), \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.9})$$

суть n линейно независимых дифференциальных операторов, определенных и аналитических на некотором открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}^p$. Если существуют вещественные константы c_{jk}^l , та-

кие, что

$$[D_j, D_k] = \sum_{l=1}^n c_{jk}^l D_l, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (\text{A. 10})$$

то D_i образуют базис алгебры Ли, т. е. алгебры обобщенных производных Ли для локального мультиликативного представления Γ локальной группы Ли G . Имеется базис $\{\mathcal{C}_j\}$ алгебры Ли \mathfrak{G} группы G , такой, что

$$[\mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k] = \sum_{l=1}^n c_{jk}^l \mathcal{C}_l.$$

Действие группы G получается интегрированием уравнений

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(\mathbf{z}(t)) a_j, \quad \frac{d}{dt} \ln v(\mathbf{z}^0, \exp(t\mathcal{A})) = \sum_{j=1}^n a_j P_j(\mathbf{z}(t)), \quad (\text{A. 11})$$

зде

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}^0, \quad v(\mathbf{z}^0, E_m) = 1, \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{z}^0 \exp(t\mathcal{A}), \quad 1 \leq i \leq p, \quad (\text{A. 12})$$

а \mathcal{A} определено формулой (A. 3).