

Приложение Б

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом приложении мы собрали, как в справочнике, некоторые основные определения и формулы для тех специальных функций, которые наиболее часто встречаются в настоящей книге. Все эти функции (за исключением гамма-функции и эллиптических функций) являются решениями дифференциальных уравнений, получающихся в результате разделения переменных в уравнениях математической физики. Условные обозначения, которыми мы здесь пользуемся, предложены Бейтменом (см. [16, 17]); в этих работах читатель может найти много дополнительных сведений, касающихся свойств специальных функций.

1. Гамма-функция

Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Аналитическим продолжением $\Gamma(z)$ можно расширить до функций, аналитической на всей комплексной плоскости, за исключением простых полюсов при $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Функциональные соотношения:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z.$$

Частные значения:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Биномиальные коэффициенты определяются соотношениями

$$\binom{\mu}{n} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)/n! = \Gamma(\mu+1)/\Gamma(\mu-n+1)n!. \quad (\text{Б. 1})$$

2. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрический ряд, сходящийся при $|z| < 1$, определяется следующим образом:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n, \quad (\text{Б.2})$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{Б.3})$$

есть символ Погаммера. Аналитическим продолжением функцию ${}_2F_1$ можно расширить до функции, аналитической и однозначной на комплексной z -плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной оси от $+1$ до $+\infty$.

Интегральное представление:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1+tz)^{-a} dt,$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

При фиксированном z функция ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)/\Gamma(c)$ является целой функцией параметров a, b, c . Если a или b — отрицательное число, а c не является отрицательным целым числом, то гипергеометрический ряд сводится к многочлену от z .

Дифференциальное уравнение:

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0. \quad (\text{Б.4})$$

Это уравнение имеет решение $u = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$. Если c не является целым числом, то уравнение (Б.4) допускает линейно независимое решение $u = z^{1-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-c+1, b-c+1 \\ 2-c \end{matrix} \middle| z\right)$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{ab}{c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b+1 \\ c+1 \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} + a \right] {}_2F_1 = a {}_2F_1\left(\begin{matrix} a+1, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} + c-1 \right] {}_2F_1 = (c-1) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c-1 \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z(1-z) \frac{d}{dz} - bz + c-a \right] {}_2F_1 = (c-a) {}_2F_1\left(\begin{matrix} a-1, b \\ c \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\begin{aligned} \left[(1-z) \frac{d}{dz} - (a+b-c) \right] {}_2F_1 &= (c-a)(c-b)c^{-1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c+1 \end{matrix} \middle| z \right), \\ \left[z(1-z) \frac{d}{dz} - bz + c-1 \right] {}_2F_1 &= (c-1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-1, b \\ c-1 \end{matrix} \middle| z \right), \\ \left[(1-z) \frac{d}{dz} - a \right] {}_2F_1 &= a(b-c)c^{-1} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+1, b \\ c+1 \end{matrix} \middle| z \right), \\ \left[z(1-z) \frac{d}{dz} - (b+a-1)z + c-1 \right] {}_2F_1 &= \\ &= (c-1) {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a-1, b-1 \\ c-1 \end{matrix} \middle| z \right). \end{aligned} \quad (\text{Б. } 5)$$

Соотношение симметрии:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} b, a \\ c \end{matrix} \middle| z \right).$$

Формулы преобразования:

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right) &= (1-z)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| \frac{z}{z-1} \right) = \\ &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c-a, c-b \\ c \end{matrix} \middle| z \right). \end{aligned}$$

Частные случаи. (i) Многочлены Лежандра:

$$P_n(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+1, -n \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

(ii) многочлены Гегенбауэра:

$$C_n^v(x) = \frac{\Gamma(2v+n)}{\Gamma(2v)n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2v+n, -n \\ v+1/2 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

(iii) многочлены Якоби:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n+\alpha+\beta+1, -n \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

(iv) функции Лежандра:

$$\begin{aligned} P_v^\mu(z) &= \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} v+1, -v \\ 1-\mu \end{matrix} \middle| \frac{1-z}{2} \right) / \Gamma(1-\mu), \\ Q_v^\mu(z) &= e^{i\pi\mu} 2^{-v-1} \pi^{1/2} \Gamma(v+\mu+1) z^{-v-\mu-1} (z^2-1)^{\mu/2} \times \\ &\quad \times {}_2F_1 \left(\begin{matrix} v/2+\mu/2+1, v/2+\mu/2+1/2 \\ v+3/2 \end{matrix} \middle| z^{-2} \right) / \Gamma(v+3/2). \end{aligned} \quad (\text{Б. } 6)$$

3. Конфлюентная гипергеометрическая функция

Функция ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$ определяется рядом

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

сходящимся при всех z .

Интегральное представление:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Для фиксированного z функция ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)/\Gamma(c)$ является целой функцией от a и c .

Дифференциальное уравнение:

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (c-z) \frac{du}{dz} - au = 0. \quad (\text{Б.7})$$

Это уравнение имеет решение $u = {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right)$; если же c не является целым числом, то уравнение допускает независимое решение $u = z^{1-c} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a-c+1 \\ 2-c \end{matrix} \middle| z\right)$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = \frac{a}{c} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a+1 \\ c+1 \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} - z + c - 1 \right] {}_1F_1 = (c-1) {}_1F_1\left(\begin{matrix} a-1 \\ c-1 \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} + a \right] {}_1F_1 = a {}_1F_1\left(\begin{matrix} a+1 \\ c \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} - z + c - a \right] {}_1F_1 = (c-a) {}_1F_1\left(\begin{matrix} a-1 \\ c \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[\frac{d}{dz} - 1 \right] {}_1F_1 = \frac{a-c}{c} {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c+1 \end{matrix} \middle| z\right),$$

$$\left[z \frac{d}{dz} + c - 1 \right] {}_1F_1 = (c-1) {}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c-1 \end{matrix} \middle| z\right). \quad (\text{Б.8})$$

Формула преобразования:

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \middle| z\right) = e^z {}_1F_1\left(\begin{matrix} c-a \\ c \end{matrix} \middle| -z\right).$$

Частные случаи. (i) Многочлены Лагерра:

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a+1)n!} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -n \\ a+1 \end{matrix} \middle| x\right), \quad n=0, 1, 2, \dots;$$

(ii) функции Бесселя:

$$J_v(x) = \frac{e^{-ix}(x/2)^v}{\Gamma(v+1)} {}_1F_1\left(\begin{matrix} v+1/2 \\ 2v+1 \end{matrix} \middle| 2ix\right);$$

(iii) функции параболического цилиндра:

$$\begin{aligned} D_v(x) = & 2^{1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \left[\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-v/2)} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -v/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{2}\right) + \right. \\ & \left. + x 2^{-1/2} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-v/2)} {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1/2-v/2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{x^2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

4. Функции параболического цилиндра

Функция $u = D_v(x)$, определенная формулой (Б.9iii), является решением уравнения

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u = 0. \quad (\text{Б.10})$$

Линейно независимым решением этого уравнения является функция $u = D_{-v-1}(iz)$; если же v не является целым числом, то решением будет функция $D_v(-z)$. Если $v = n = 0, 1, 2, \dots$, то

$$D_n(z) = 2^{-n/2} \exp(-z^2/4) H_n(2^{-1/2}z), \quad (\text{Б.11})$$

где

$$H_n(z) = (-1)^n \exp(z^2) \frac{d^n}{dz^n} \exp(-z^2) \quad (\text{Б.12})$$

есть многочлен Эрмита порядка n .

Дифференциальные рекуррентные соотношения:

$$\left[\frac{d}{dz} + \frac{z}{2}\right] D_v(z) = v D_{v-1}(z), \quad \left[-\frac{d}{dz} + \frac{z}{2}\right] D_v(z) = D_{v+1}(z). \quad (\text{Б.13})$$

5. Функции Бесселя

Функции Бесселя $J_v(z)$ определяются соотношением (Б.9ii) или соотношением

$$J_v(z) = \frac{(z/2)^v}{\Gamma(v+1)} {}_0F_1\left(v+1 \left| \frac{-z^2}{4}\right.\right), \quad |\arg z| < \pi, \quad (\text{Б.14})$$

где

$${}_0F_1(c|x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n n!}; \quad (\text{Б.15})$$

этот ряд сходится при всех x . Функция $z^{-v} J_v(z)$ является целой функцией от z .

Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) u = 0. \quad (\text{Б.16})$$

Это уравнение имеет решения $u_1 = J_v(z)$ и $u_2 = J_{-v}(z)$, линейно независимые, если v не является целым числом n . Однако $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$, и при $v = n$ функция $J_n(z)$ является единственным решением уравнения (Б.16), ограниченным в окрестности $z = 0$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\left[-\frac{d}{dz} + \frac{v}{z}\right] J_v(z) = J_{v+1}(z), \quad \left[\frac{d}{dz} + \frac{v}{z}\right] J_v(z) = J_{v-1}(z). \quad (\text{Б.17})$$

Функции, рассмотренные нами в разд. 2—5, являются либо гипергеометрическими функциями ${}_2F_1$, либо различными частными или предельными случаями функции ${}_2F_1$. Однако функции, которые будут рассматриваться в разд. 6 и 7, являются обобщениями функции ${}_2F_1$, причем в разд. 6 рассматриваются обобщения на дифференциальные уравнения более высокого порядка, а в разд. 7 — обобщения на функции от нескольких переменных.

6. Обобщенные гипергеометрические функции

Функции ${}_pF_q$ определяются рядом

$$\begin{aligned} {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z\right) &= {}_pF_q(a_i; b_j; z) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n, \dots, (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (\text{Б.18}) \end{aligned}$$

Если параметры a_i, b_j выбираются так, что этот ряд бесконечен и его члены не теряют смысла, то можно показать, что он

сходится при всех z , если $p \leq q$, сходится при $|z| < 1$, если $p = q + 1$, и расходится при всех $z \neq 0$, если $p > q + 1$.

Дифференциальное уравнение:

$$\left(z \frac{d}{dz} + a_1 \right) \dots \left(z \frac{d}{dz} + a_p \right) u - \frac{d}{dz} \left(z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \dots \\ \dots \left(z \frac{d}{dz} + b_q - 1 \right) u = 0. \quad (\text{Б.19})$$

Это уравнение имеет решение $u = {}_pF_q(a_i; b_j; z)$, и, за исключением случаев, когда параметры a_i, b_j выбираются особым способом, это единственное решение уравнения (Б.19), ограниченное в окрестности точки $z = 0$.

Дифференциальные рекуррентные формулы:

$$\left(z \frac{d}{dz} + a_1 \right) {}_pF_q(a_i; b_j; z) = a_1 {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1 + 1, a_2, \dots, a_p \\ b_j \end{matrix} \middle| z \right], \\ \left(z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) {}_pF_q(a_i; b_j; z) = (b_1 - 1) {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_i \\ b_1 - 1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right], \\ \frac{d}{dz} {}_pF_q(a_i; b_j; z) = \frac{a_1 \dots a_p}{b_1 \dots b_q} {}_pF_q(a_i + 1; b_j + 1; z). \quad (\text{Б.20})$$

Соотношение симметрии: функция ${}_pF_q(a_i; b_j; z)$ является симметрической функцией от a_1, \dots, a_p и b_1, \dots, b_q .

7. Функции Лауричеллы

Функции Лауричеллы являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на случай n переменных z_1, \dots, z_n . Они подразделяются на четыре класса:

$$F_A [a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; z_1, \dots, z_n] = \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+ \dots + m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \quad (\text{Б.21})$$

$|z_1| + \dots + |z_n| < 1,$

$$F_B [a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n] = \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+ \dots + m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \quad (\text{Б.22})$$

$|z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1,$

$$F_C [a; b; c_1, \dots, c_n; z_1, \dots, z_n] = \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b)_{m_1+\dots+m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \quad (B. 23)$$

$|z_1|^{1/2} + \dots + |z_n|^{1/2} < 1,$

и

$$F_D [a; b_1, \dots, b_n; c; z_1, \dots, z_n] = \\ = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n}} \frac{z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}, \quad (B. 24)$$

$|z_1| < 1, \dots, |z_n| < 1.$

В следующем разделе мы рассмотрим функции, которые нельзя получить как частные или предельные случаи функций гипергеометрического типа.

8. Функции Матье

Дифференциальное уравнение Матье имеет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (a - 2q \cos 2x) u = 0, \quad (B. 25)$$

где обычно переменная x имеет вещественное значение, а q — заданный вещественный ненулевой параметр. Если решения уравнения (B.25) подчинить условию периодичности $u(x) = u(x + 2\pi)$, то это уравнение можно рассматривать как задачу Штурма — Лиувилля на собственные значения a . Из общей теории задач на собственные значения следует, что существует счетное бесконечное множество таких собственных значений, причем все они вещественны, имеют кратность, равную единице, ограничены снизу и стремятся к $+\infty$. В силу свойств симметрии уравнение (B.25) имеет четыре типа периодических решений (называемых функциями Матье первого рода или просто функциями Матье):

- (i) $\text{ce}_{2n}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{(2n)} \cos 2mx,$
- (ii) $\text{ce}_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{(2n+1)} \cos (2m+1)x,$
- (iii) $\text{se}_{2n+1}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{(2n+1)} \sin (2m+1)x,$
- (iv) $\text{se}_{2n+2}(x, q) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{(2n+2)} \sin (2m+2)x, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (B. 26)$

Коэффициенты A, B зависят от q , и рекуррентные формулы для этих коэффициентов легко получить подстановкой выражений (Б.26) в уравнение (Б.25) [7]. Собственные значения a , отвечающие функциям ce_{2n} , ce_{2n+1} , se_{2n+1} , se_{2n+2} , обозначаются через a_{2n} , a_{2n+1} , b_{2n+1} , b_{2n+2} . Этими собственными значениями являются такие значения a , при которых функции (Б.26), коэффициенты которых определяются рекуррентными формулами, принадлежат $L_2[-\pi, \pi]$, т. е. такие, при которых эти функции интегрируемы с квадратом. Всегда можно выбрать коэффициенты таким образом, чтобы они были вещественными, а функции Матье нормировать так, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} [u(x)]^2 dx = \pi. \quad (\text{Б. 27})$$

Кроме того, в силу такой нормировки

$$\lim_{q \rightarrow 0} \text{ce}_0(x, q) = 2^{-1/2},$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \text{ce}_n(x, q) = \cos nx, \quad \lim_{q \rightarrow 0} \text{se}_n(x, q) = \sin nx, \quad n \neq 0. \quad (\text{Б. 28})$$