Приложение В

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом приложении перечисляются основные свойства эллиптических функций, необходимые для работы с настоящей книгой. Подробные сведения относительно этих функций можно найти в работах [7, 17, 125].

Эллиптические функции зависят от комплексной переменной z и вещественного параметра (*модуля*) k, который в настоящей книге всегда удовлетворяет условию $0 \leqslant k \leqslant 1$. *Дополнительный модуль* имеет вид $k' = (1-k^2)^{1/2}$, $1 \geqslant k^2 \geqslant 0$. Эллиптические функции $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$, $\operatorname{dn}(z, k)$, или сокращенно $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, определяются соотношениями

$$z = \int_0^{\operatorname{sn} z} [(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{-1/2}\,dt = \int_{\operatorname{cn} z}^{1} [(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)]^{-1/2}\,dt =$$
$$= \int_{\operatorname{dn} z}^{1} [(1-t^2)(t^2-k'^2)]^{-1/2}\,dt. \qquad \text{(B. 1)}$$

Значения этих интегралов зависят от контуров интегрирования, и эта зависимость отражается на свойствах периодичности эллиптических функций.

При $k \to 0$ мы имеем

$$\operatorname{sn}(z, k) \to \sin z, \quad \operatorname{cn}(z, k) \to \cos z, \quad \operatorname{dn}(z, k) \to 1,$$

а при $k \to 1$

$$\operatorname{sn}(z, k) \to \operatorname{th} z, \quad \operatorname{cn}(z, k) \to 1/\operatorname{ch} z, \quad \operatorname{dn}(z, k) \to 1/\operatorname{ch} z.$$

Свойства периодичности:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(z+2K) = -\operatorname{sn}(z), && \operatorname{sn}(z+2iK') = \operatorname{sn} z, \\ &\operatorname{cn}(z+2K) = -\operatorname{cn}(z), && \operatorname{cn}(z+2iK') = -\operatorname{cn} z; \\ &\operatorname{dn}(z+2K) = \operatorname{dn}(z), && \operatorname{dn}(z+2iK') = -\operatorname{dn} z. \end{aligned} \qquad \text{(B. 2)}$$

Здесь K, K' определяются соотношениями

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta,\quad K'=K(k'). \tag{B. 3}$$

Основные соотношения:

$$\begin{gathered}\operatorname{sn}(-z)=-\operatorname{sn}(z),\quad \operatorname{cn}(-z)=\operatorname{cn}(z),\quad \operatorname{dn}(-z)=\operatorname{dn}(z),\\ \operatorname{sn}^2 z+\operatorname{cn}^2 z=1,\qquad k^2\operatorname{sn}^2 z+\operatorname{dn}^2 z=1.\end{gathered} \tag{B. 4}$$

Частные значения:

$$\begin{gathered}\operatorname{sn}0=0,\quad \operatorname{sn}K=1,\quad \operatorname{sn}(K+iK')=1/k,\\ \operatorname{cn}0=1,\quad \operatorname{cn}K=0,\quad \operatorname{cn}(K+iK')=-ik'/k,\\ \operatorname{dn}0=1,\quad \operatorname{dn}K=k',\quad \operatorname{dn}(K+iK')=0.\end{gathered} \tag{B. 5}$$

В точке $z=iK'$ все эллиптические функции имеют простые полюсы. Если z возрастает от 0 до K, то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от 0 до 1, функция $\operatorname{cn} z$ убывает от 1 до 0, а функция $\operatorname{dn} z$ убывает от 1 до k'. Если z меняется от K до $K+iK'$, то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от 1 до k^{-1}, функция $\operatorname{cn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от 0 до $-ik'/k$, а функция $\operatorname{dn} z$ убывает от k' до 0. Если z меняется от $K+iK'$ до iK', то функция $\operatorname{sn} z$ возрастает от $1/k$ до $+\infty$, функция $\operatorname{cn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от $-ik'/k$ до $-i\infty$, а функция $\operatorname{dn} z$ имеет чисто мнимые значения и меняется от 0 до $-i\infty$.

Производные:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}\operatorname{sn} z=\operatorname{cn} z\operatorname{dn} z,\qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cn} z=-\operatorname{sn} z\operatorname{dn} z,\\ \frac{d}{dz}\operatorname{dn} z=-k^2\operatorname{sn} z\operatorname{cn} z.\end{gathered} \tag{B. 6}$$