Взяв произведение двух решений с индексом $+\nu$, мы видим, что Ψ' представляется степенным рядом по s

$$J_\nu(u')\,J_\nu(v') = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\nu+n}(r)\, s^{\nu+n}, \qquad |\alpha| < 1, \qquad \nu \neq -1, -2, \ldots. \tag{7.43}$$

Полагая $r = a$, $s = b/a$, устремляя a к нулю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях b в обеих частях полученного равенства, находим, что

$$c_n = \frac{2^{-\nu}[i(1-\alpha^2)^{1/2}]^n}{\Gamma(\nu+1)\,n!}\; {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n,\ n+2\nu+1 \\ \nu+1 \end{matrix}\,\middle|\, \frac{\alpha + i(1-\alpha^2)^{1/2}}{2i(1-\alpha^2)^{1/2}}\right). \tag{7.44}$$

При $\alpha = -1$ мы имеем

$$J_\nu(^1/_2\,[r - (r^2 - 4rs)^{1/2}])\,J_\nu(^1/_2\,[r + (r^2 - 4rs)^{1/2}]) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2\nu-2n)_n}{\Gamma(\nu+n+1)\,n!}\, J_{\nu+n}(r)\left(\frac{s}{2}\right)^{\nu+n}, \tag{7.45}$$

где $(a)_n$ — символ Похгаммера (Б.3).

Упражнения

1. Подставляя матричные элементы (3.54) в тождество (3.44), получить формулу сложения для функций Бесселя, известную как формула сложения Графа. (Обобщения и приложения этой формулы см. в [32, гл. 11]; см. также тождество (7.27).)

2. Используя решение $\Psi^{(j)}(\mathbf{x})$ с разделенными переменными уравнения Гельмгольца для $j = 2, 3, 4$, получить билинейные разложения функции Бесселя (3.55). Доказать, что разложение для $j = 2$ является частным случаем формулы сложения Графа. Показать, что разложение для $j = 4$ дает в результате интегральное тождество вида

$$2\int_{-\pi}^{\pi} J_0\{\omega[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}\}\,\mathrm{ce}_n(\beta', q)\,d\beta' = \\ = |C_n|^2\,\mathrm{Ce}_n(\alpha, q)\,\overline{\mathrm{Ce}}_n(\alpha', q)\,\mathrm{ce}_n(\beta, q), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и аналогичный результат для функции se_n.

3. Доказать, что полной алгеброй симметрии уравнения Клейна — Гордона (4.1) является алгебра $\mathscr{E}(1, 1) \oplus \{1\}$, причем базис для $\mathscr{E}(1, 1)$ определяется в (4.2).

4. Показать, что в результате сопряженного действия группы $\tilde{E}(2)^c$ алгебра симметрии комплексного уравнения Гельмгольца $\mathscr{E}(2)^c$ разбивается точно на три орбиты.

5. Одним из преимуществ методов локальной теории Ли над методами глобальных групп является тот факт, что локальная теория применима к так называемым специальным функциям второго рода. Функции Бесселя второго

рода $Y_m(r)$ определяются соотношением

$$Y_m(r) = [J_m(r)\cos(m\pi) - J_{-m}(r)]/\sin(m\pi)$$

или пределом этого соотношения, когда m — целое число [32, гл. 3]. Показать, что $Y_m(r)$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению и рекуррентным формулам (Б.16), (Б.17), что и функции $J_m(r)$. (Действительно, для любого комплексного m пара $J_m(r)$, $Y_m(r)$ образует базис решений уравнения Бесселя (7.3).) Показать на основании этого, что функции $\Psi_m(r, s) = Y_m(r)s^m$ удовлетворяют формулам (7.15), а следовательно, и тождествам (7.26), где матричные элементы $T_{lj}(g)$ определены в (7.22). Получить тождества для $Y_m(r)$, аналогичные соотношениям (7.28) — (7.30). (См. [32, гл. 11].)

6. Простые многочлены Бесселя $f_m(r)$ определяются соотношением

$$f_m(r) = {}_2F_0\left(\begin{matrix} -m,\ m+1 \\ - \end{matrix}\middle| -\frac{r}{2}\right), \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

причем $f_{-m}(r) = f_{m-1}(r)$ и $f_{-1}(r) = f_0(r) = 1$; см. (Б.18). Эти многочлены удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$r^2 f'_m(r) + (1 - mr) f_m(r) = f_{m-1}(r),$$

$$r^2 f'_m(r) + [1 + (m+1)r] f_m(r) = f_{m+1}(r).$$

Показать, что функции $\Psi_m(r, s) = f_m(r)s^m$ удовлетворяют соотношениям (7.15), где

$$P^0 = s\partial_s, \quad P^- = -s^{-1}\left(r^2\partial_r + 1 - rs\partial_s\right), \quad P^+ = -s\left(r^2\partial_r + r + 1 + rs\partial_s\right).$$

Учитывая указанное выше, доказать, что

$$\mathbf{T}(g)\Psi_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} T_{lj}(g)\Psi_l,$$

где матричные элементы T_{lj} определяются формулой (7.22) при $m_0 = 0$. Вычислить операторы $\mathbf{T}(g)$ и получить тождества для многочленов Бесселя, аналогичные соотношениям (7.27)—(7.30). (Более подробно этот вопрос рассматривается в [77, гл. 3].)