Упражнения

1. Найти алгебру симметрии уравнения Шредингера (1.2) для свободной частицы.

2. Описать разложение алгебры Шредингера $\mathcal{G}_2$ на орбиты в результате сопряженного действия группы G_2.

3. Показать, что в результате сопряженного действия группы $SL(2, R)$ алгебра Ли $sl(2, R)$ распадается на три орбиты.

4. Формула (1.30) показывает в явном виде эквивалентность уравнений Шредингера для свободной частицы и для гармонического осциллятора. Вывести соответствующую формулу, показывающую эквивалентность уравнений для свободной частицы и для линейного потенциала.

5. Получить билинейные разложения (1.55) для фундаментального решения уравнения Шредингера

$$k(t, x-y) = (4\pi it)^{-1/2} \exp[-(x-y)^2/(4it)]$$

при помощи базисов $\{F_\lambda^{(j)}\}$, $j = 2, 4$. (Подробное обсуждение таких непрерывных аналогов производящих функций см. в [124, 143].)

6. Используя методы, рассмотренные в разд. 2.2, решить задачу Коши для уравнения

$$\partial_t \Phi = \partial_{xx} \Phi + x\Phi,$$

т. е. найти при $t > 0$ ограниченное решение $\Phi(x, t)$ этого уравнения, непрерывное при $t \geqslant 0$ и такое, что $\Phi(0, x) = f(x)$, где функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на вещественной прямой.

7. Функции Эрмита $H_n(z)$, определяемые соотношениями (2.26), при $n = 0, 1, 2, \ldots$ являются многочленами, а при $n = -1, -2, \ldots$ называются функциями Эрмита второго рода. Показать, что функции Эрмита второго рода можно представить через функцию ошибок и ее производные [17]. Проверить, что функции $\Phi_n(z, s) = H_n(z)s^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$H_1\Phi_n = \Phi_{n+1}, \quad H^0\Phi_n = (n + {}^1/_2)\,\Phi_n, \quad H_{-1}\Phi_n = (n/2)\,\Phi_{n-1},$$
$$H_2\Phi_n = \Phi_{n+2}, \quad H_{-2}\Phi_n = {}^1/_2 n\,(n-1)\,\Phi_{n-2},$$

где операторы H_j, определяемые формулами (2.23), образуют базис для алгебры симметрии комплексного уравнения теплопроводности. Доказать, что это представление не является неприводимым. Пользуясь простыми моделями, построенными в разд. 2.2, вычислить матричные элементы этого представления и получить соответствующие тождества для специальных функций; в частности, вывести тождество, связанное с выражением $\exp(\alpha H_1)\Phi_{-1}$.

8. Получить билинейное разложение фундаментального решения $k(t, x, y)$ (3.19) уравнения Шредингера для изотропной свободной частицы в элементах базиса многочленов Лагерра. Показать, что разложение является частным случаем формулы Хилле — Харди (4.27). Получить билинейное разложение решения в элементах континуального базиса $\{\Psi_\lambda^{(2)}\}$; см. (3.16).

9. Найти алгебру симметрии комплексного уравнения теплопроводности $\partial_t\Phi - \partial_{xx}\Phi - \partial_{yy}\Phi = 0$.