лучены аналитическим продолжением решений с разделенными переменными вещественного уравнения Лапласа и продолжением решений с разделенными переменными волнового уравнения

$$(\partial_{tt} - \Delta_2)\Phi(x, y, t) = 0,$$

которое будет рассматриваться в следующей главе. (Полагается $t = iz$.) Таким способом можно получить огромное количество производящих функций для многочленов Гегенбауэра.

В общем случае в соотношение (7.28) входит двойная сумма, но если $\mathbf{T}(g)\Psi$ является собственной функцией оператора J^0, то m фиксировано и суммирование ведется только по l. Эти функции являются решениями уравнения (6.33), и для того, чтобы их получить, нужно считать Ψ одним из решений уравнения (6.33) с разделенными переменными, а g — элементом комплексной группы $SL(2, \mathbb{C})$, порождаемой операторами P^0, K^0 и D. В статье [41] Висванатан дал подробный вывод производящих функций (за исключением довольно сложных систем функций Ламе), получаемых указанным способом. Когда $\mathbf{T}(g)\Psi$ является собственной функцией оператора D, сумма в соотношении (7.28) тоже сводится к однократной; в этом случае фиксируется l и суммирование ведется только по m. Системы координат, в которых D является диагональным оператором, будут рассмотрены в разд. 4.3.

И наконец, следует заметить, что при помощи конформной симметрии комплексного уравнения Лапласа можно получить формулы квадратичного преобразования для гипергеометрической функции ${}_2F_1$; см. [94].

Упражнения

1. Показать, что сопряженное действие группы $E(3)$ разбивает алгебру $\mathscr{E}(3)$ на три орбиты.

2. Доказать, что в системе координат параболического цилиндра $x = (\xi^2 - \eta^2)/2$, $y = \xi\eta$, $z = z$ уравнение Гельмгольца имеет решения с разделенными переменными и что соответствующими определяющими операторами являются $\{J_3, P_2\}$ и P_3^2.

3. Используя выражения (4.10), (4.11), вычислить билинейные разложения функции $\sin(\omega R)/\omega R$ по решениям с разделенными переменными уравнения Гельмгольца в сферических координатах и в координатах вытянутого сфероида.

4. Вычислить алгебру симметрии уравнения Лапласа $\Delta_3\psi = 0$.

5. Показать, что в результате замены переменных $x = u$, $y - iz = s$, $y + iz = 2t$ и подстановки $\Psi = e^{\lambda s}\Phi(t, u)$ комплексное уравнение Лапласа $(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz})\Psi = 0$ сводится к уравнению теплопроводности для функции Φ,