сводит уравнение (5.1) к двум уравнениям:

$$(\partial_{00} - \partial_{11} + \omega^2)\,\Phi = 0, \qquad (\partial_{22} + \partial_{33} + \omega^2)\,\Theta = 0, \tag{5.4}$$

где $\Psi = \Phi\Theta$. Возможные системы координат, допускающие разделение переменных для приведенных уравнений, можно найти в табл. 1 и 2.

В следующей главе будет дан анализ явной связи между функциями ${}_2F_1$ и волновым уравнением.

Упражнения

1. Вычислить алгебру симметрии волнового уравнения (1.1).

2. Пусть $y_0 = \cos\sigma$, $y_1 = \sin\sigma\cos\alpha$, $y_2 = \sin\sigma\,\sin\alpha$, где (ψ, σ, α) — координаты (2.6), в которых уравнение (1.1) имеет решения с R-разделенными переменными. Показать, что, подставив в волновое уравнение

$$\Psi = [\cos\sigma - \cos\psi]^{1/2} \exp[-i\psi\,(l + {}^1/_2)]\,\Phi\,(y_1, y_2, y_3),$$

мы получим приведенное уравнение $\left(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{23}^2\right)\Phi = -\,l\,(l+1)\,\Phi$, т. е. уравнение на собственные значения для оператора Лапласа на сфере $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1$. Здесь Γ_{12}, Γ_{13}, Γ_{23} — обычные операторы момента импульса на сфере.

3. Показать, что пространство операторов симметрии второго порядка в обертывающей алгебре алгебры $so\,(2,1)$ по модулю оператора Казимира разбивается сопряженным действием группы $SO(2,1)$ на девять типов орбит. (Указание: эта задача эквивалентна классификации классов эквивалентности вещественных симметрических (3×3)-матриц Q относительно преобразований $Q \to A^tQA$, $A \in SO\,(2,1)$; подробности можно найти в работе [38].)

4. Показать, что уравнение ЭПД (4.5) допускает разделение переменных в координатах

$$x = {}^1/_2\,[(t+r)^{1/2} + (t-r)^{1/2}], \qquad y = {}^1/_2\,[(t+r)^{1/2} - (t-r)^{1/2}],$$
$$t \pm r > 0,$$

соответствующих операторам Γ_{23}^2, $\{\Gamma_{51}, \Gamma_{41} + \Gamma_{45}\}$. Решения с разделенными переменными являются произведениями функций Бесселя [62].

5. Как показано в тексте, функция $\Phi(x_0, r)$ является решением уравнения ЭПД

$$\left(\partial_{00} - \partial_{rr} - r^{-1}\partial_r + m^2 r^{-2}\right)\Phi = 0$$

тогда и только тогда, когда $\Psi_m = e^{im\varphi}\Phi$ — решение волнового уравнения (1.1), где $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Таким образом, решения волнового уравнения, являющиеся собственными функциями оператора $M_{12} = \partial_\varphi$, соответствуют решениям уравнения ЭПД. Используя выражения $[iM_{12}, \pm iM_{01} + M_{02}] = \mp(\pm iM_{01} + M_{02})$, вывести дифференциальные рекуррентные формулы, отображающие решения уравнения ЭПД при $m = m_0$ в его решения при $m = m_0 \mp 1$ соответственно. Аналогичным образом остальные операторы симметрии Ли волнового уравнения отображают множество решений уравнения ЭПД во множество решений этого же уравнения (см. [94]).