Используя дифференциальные рекуррентные формулы, которым удовлетворяют функции Ф и другие конфлюентные формы функции F_D, можно построить теорию алгебры Ли этих функций. Соответствующие алгебры Ли можно также получить как сужения алгебры симметрии функции F_D [91].

Функции Лауричеллы F_A, F_B, F_C также являются обобщениями функции ${}_2F_1$ на случай n переменных и могут изучаться при помощи методов теории алгебр Ли (см. [92, 93]). Однако не все рекуррентные формулы, которым удовлетворяет функция ${}_2F_1$, можно перенести на эти функции, представляющие поэтому меньший интерес, чем функции F_D. Аналогичным образом при помощи методов алгебр Ли можно изучать и обобщенные гипергеометрические функции ${}_pF_q$ [89].

Упражнения

1. Вывести соотношения коммутирования и показать, что $2(p+q)+1$ операторов

$$E^{\alpha_l} = t_l\left(z\partial_z + t_l\partial_{t_l}\right), \quad E_{\beta_k} = u_k^{-1}\left(z\partial_z + u_k\partial_{u_k} - 1\right),$$

$$E^{\alpha_1\cdots\beta_q} = t_1\cdots t_p u_1\cdots u_q\partial_z, \quad T_l = t_l\partial_{t_l}, \quad U_k = u_k\partial_{u_k},$$

$$l = 1, \ldots, p, \quad k = 1, \ldots, q,$$

образуют базис алгебры Ли $\mathcal{G}_{p,q}$.

2. Используя дифференциальные рекуррентные формулы (Б.20) для обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_q$, определить действие алгебры $\mathcal{G}_{p,q}$ на базисные функции

$$\Psi^{a_i}_{b_j}(t_i, u_j, z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_i \\ b_j \end{matrix}\middle| z\right) t_1^{a_1}\cdots t_p^{a_p} u_1^{b_1}\cdots u_q^{b_q}.$$

3. Показать, что дифференциальное уравнение (Б.19) для функции ${}_pF_q$ эквивалентно уравнению $L_{p,q}\Psi^{a_i}_{b_j} = 0$, где

$$L_{p,q} = E^{\alpha_1}\cdots E^{\alpha_p} - E^{\alpha_1\cdots\beta_q}E_{\beta_1}\cdots E_{\beta_q}.$$

4. Показать, что функции $\Psi^{a_i}_{b_j}$ являются решениями $\Psi(t_i, u_j, z)$ уравнений

$$L_{p,q}\Psi = 0, \quad T_l\Psi = a_l\Psi, \quad U_k\Psi = b_k\Psi, \quad 1 \leqslant l \leqslant p, \quad 1 \leqslant k \leqslant q,$$

аналитическими при $t = 0$. (Этим доказывается, что функция ${}_pF_q$ появляется в результате разделения переменных в дифференциальном уравнении в частных производных $L_{p,q}\Psi = 0$.)

5. Доказать, что $\mathcal{G}_{p,q}$ — алгебра симметрии уравнения $L_{p,q}\Psi = 0$.

6. Получить тождества для специальной функции ${}_pF_q$, соответствующие выражениям

$$\exp\left(cE^{\alpha_l}\right)\Psi^{a_i}_{b_j}, \quad \exp\left(cE_{\beta_1}\right)\Psi^{a_i}_{b_j} \quad \text{и} \quad \exp\left(cE^{\alpha_1\cdots\beta_q}\right)\Psi^{a_i}_{b_j}.$$

7. Используя метод Вейснера и выражение $\exp\left(1E^{a_1}\right)\Psi_{b_j}^{\sigma, a_i}$, получить тождество

$$(1-\tau)^{-\sigma}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}\sigma, a_i\\ b_j\end{matrix}\middle|\frac{-z\tau}{1-\tau}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\sigma+n)}{\Gamma(\sigma)\,n!}\,{}_pF_q\left(\begin{matrix}-n, a_i\\ b_j\end{matrix}\middle|z\right)\tau^n,\quad |\tau|<1.$$

8. Показать, что решение Ψ уравнения $L_{p,q}\Psi=0$, такое, что

$$E^{a_1}\Psi=\Psi,\quad T_l\Psi=a_l\Psi,\qquad 1\leqslant l\leqslant p-1;$$
$$U_k\Psi=b_k\Psi,\qquad 1\leqslant k\leqslant q,$$

принимает вид

$$\Psi=f\left(z/t_p\right)\exp\left(-t_p^{-1}\right)t_1^{a_1}\ldots t_{p-1}^{a_{p-1}}u_1^{b_1}\ldots u_q^{b_q},$$

т. е. показать, что Ψ — решение с R-разделенными переменными в координатах $t_1, \ldots, t_{p-1}, u_1, \ldots, u_q, z/t_p$. Показать, что если Ψ — функция, аналитическая при $z=0$, то с точностью до некоторого постоянного множителя

$$f(x)={}_{p-1}F_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\middle|x\right).$$

Применяя метод Вейснера, получить тождество

$$e^{\tau}\,{}_{p-1}F_q\left(\begin{matrix}a_i\\ b_j\end{matrix}\middle|-z\tau\right)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_pF_q\left(\begin{matrix}a_i, -n\\ b_j\end{matrix}\middle|z\right)\frac{\tau^n}{n!}.$$

(Другие тождества для функции ${}_pF_q$, полученные теоретико-групповыми методами, см. в [89].)

9. Используя дифференциальные рекуррентные формулы (Б.5) для ${}_2F_1$, доказать соотношения (1.4) для частного случая $n=1$.

10. Доказать тождества (2.21)—(2.23) при $n=1$; в этом случае указанные тождества определяют производящие функции для ${}_2F_1$.