Мы рассмотрели частный случай, когда фазы равны либо 0, либо π. Можно рассмотреть общий случай, когда фазы принимают любые значения. Релей показал, что и в этом общем случае некогерентности энергии (всреднем) складываются. Это — очень существенная теорема.

ТРЕТЬЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Задача об апроксимации функций тригонометрическими полиномами. Теорема Фурье. Исторические замечания о понятии функции. Класс функций, разложимых в ряд Фурье. Метод комплексных величин; когда можно и когда нельзя его применять.

Нам нужно коснуться вычислительного приема, широко применяемого в теории колебаний, — использования комплексных величин. Здесь необходимо предостеречь от одной распространенной ошибки: часто бывает так, что к этому приему привыкают, а потом забывают, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Напишем известные формулы:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx,$$

$$\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

где

$$i \cdot i = -1.$$

Эти формулы позволяют выразить синусоидальные колебания через комплексные экспоненциальные функции. В волновой механике теория строится так, что в нее непосредственно входят комплексные величины. Здесь, в теории колебаний, дело обстоит иначе. Нас интересуют *действительные* величины. Например, когда мы пишем e^{ikx}, то нас интересует действительная часть этого выражения, т. е. $\cos kx$; но работать с комплексными величинами удобно, потому что при дифференцировании они себя воспроизводят с точностью до множителя, между тем как синус и косинус ведут себя сложнее.

Всякую комплексную величину $a+ib$ можно представить в виде $Ae^{i\varphi}$, где A и φ — действительные величины, причем

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$$

(заметим, что фаза φ определена здесь неоднозначно).

При перемножении комплексных величин фазы их просто складываются, и это — второе, очень удобное свойство.

Часто мы имеем дело с величинами вида

$$\xi=(a+ib)\,e^{i\omega t}. \qquad (1)$$

Какова действительная часть этого выражения? Имеем:

$$(a+ib)\,e^{i\omega t}=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=A\cos(\omega t+\varphi)+iA\sin(\omega t+\varphi),$$

и, следовательно, искомая действительная часть есть

$$A\cos(\omega t+\varphi).$$

Если колебание задано в виде (1), то произведение $\xi\xi^*$ величины ξ на сопряженную ей величину

$$\xi^*=(a-ib)\,e^{-i\omega t}$$

дает квадрат амплитуды действительной части ξ:

$$\xi\xi^*=(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2=A^2. \qquad (2)$$

Для того, чтобы найти квадрат амплитуды, не нужно переходить от выражения (1) к его действительной части.

Рассмотрим оптическую задачу — о диффракционной решетке (рис. 3), наглядно иллюстрирующую преимущества оперирования комплексными величинами.

Колебания, идущие от соседних щелей решетки, имеют благодаря разности путей разность фаз

$$\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\alpha.$$

В фокусе линзы происходит сложение m когерентных колебаний (m — число щелей решетки). Результирующее колебание в точке наблюдения есть

$$\cos\omega t+\cos(\omega t+\varphi)+\cos(\omega t+2\varphi)+\ldots+\cos[\omega t+(m-1)\varphi]. \qquad (3)$$

Непосредственно сложить эти m членов не так просто. Воспользуемся, однако, комплексным представлением: первый член суммы есть действительная часть от $e^{i\omega t}$, второй — действительная часть от $e^{i(\omega t+\varphi)}$ и т. д.

Как известно, действительная часть суммы комплексных величин есть сумма действительных частей слагаемых (но действительная часть произведения не равна произведению действительных частей). Сумму комплексных величин найти очень просто: это сумма геометрической прогрессии с показателем $e^{i\varphi}$. Она равна

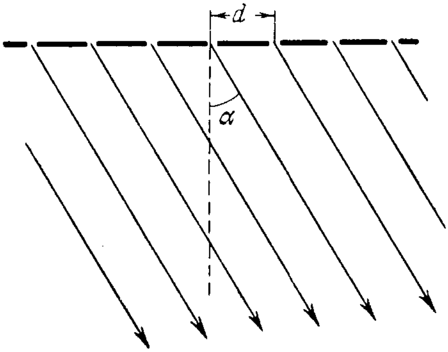

Рис. 3.

$$\xi = e^{i\omega t}\,\frac{e^{im\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}. \tag{4}$$

Сумма (3) равна действительной части этого выражения. Но часто нас интересует только квадрат амплитуды колебания (3), т. е. квадрат амплитуды A действительной части комплексного выражения (4). Согласно (2)

$$A^2 = \xi\xi^* = \frac{1-\cos m\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Рассмотрим еще одно свойство комплексных величин, которое также играет существенную роль в том, почему они так часто употребляются в теории колебаний.

Пусть дана комплексная функция времени

$$f(t) + ig(t).$$

Ее производная есть

$$\dot f + i\dot g,$$

т. е. действительная часть от производной комплексной функции по действительному аргументу есть производная от действительной части функции.

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение

$$\ddot y + k\dot y + \omega_0^2 y = \cos\omega t. \tag{5}$$

Можно найти частное решение этого уравнения, работая с косинусом и синусом, но проще сделать так. Напишем *другое* дифференциальное уравнение:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \omega_0^2 y = e^{i\omega t}$$

и будем искать решение нового уравнения в комплексной форме:

$$y = Ae^{i\omega t}. \tag{6}$$

Тогда для A получается простое уравнение

$$A(-\omega^2 + i\omega k + \omega_0^2)\, e^{i\omega t} = e^{i\omega t}.$$

Действительная часть получаемого таким путем выражения (6) будет удовлетворять интересующему нас дифференциальному уравнению (5). Это возможно лишь потому, что при подстановке (6) в дифференциальное уравнение мы только дифференцировали и складывали.

Все это важно и полезно, но нужно знать, когда так делать нельзя. Пусть, например,

$$y\dot{y} = \cos\omega t.$$

Можно ли решать это уравнение, заменив правую часть на $e^{i\omega t}$? Нельзя, и эта замена ничего не даст, потому что действительная часть произведения не есть произведение действительных частей.

Пусть $y = a\cos\omega t$ есть ток. Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в сопротивлении R, равно

$$Ry^2 = Ra^2\cos^2\omega t.$$

Мы не получим правильного значения этого выражения, если напишем $y = ae^{i\omega t}$, возведем в квадрат и возьмем действительную часть: действительная часть квадрата не есть квадрат действительной части.

Итак, комплексные величины представляют большое удобство, но, пользуясь ими, нужно остерегаться нелинейных операций.

Перейдем теперь к рассмотрению функций периодических, но не гармонических, — к рядам Фурье. Вся теория этих рядов возникла из физики — из вопроса о колебаниях струны. Недаром известный математик Клейн настаивал на том, чтобы вопрос о разложении в ряд Фурье излагался физикам иначе, чем это обычно делают математики.

Предположим, что мы имеем периодическую функцию $f(x)$. Для простоты примем период равным 2π (отсюда легко перейти к функции с любым периодом). Можно ли апроксимировать $f(x)$ другими периодическими функциями $\varphi(x)$, т. е. заменить $f(x)$ другими периодическими функциями так, чтобы ошибка при замене была очень мала?

Нужно выбрать какую-нибудь меру ошибки. В качестве такой меры возьмем среднюю квадратичную ошибку:

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\}^2 \, dx. \tag{7}$$

Это — принимаемое нами определение погрешности. Мы будем апроксимировать так, чтобы средняя квадратичная ошибка была возможно меньше. Если бы, например, мы выставили требование, чтобы интеграл

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \{f(x) - \varphi(x)\} \, dx$$

(средняя ошибка) был возможно меньше, то ни к чему хорошему это не привело бы. Могло бы быть так, что средняя ошибка равна нулю, между тем как на больших интервалах существуют громадные (по абсолютной величине) отклонения $\varphi(x)$ от $f(x)$. При выбранной нами мере ошибки этого не может быть. Но вместе с тем ясно, что это не единственно возможный целесообразный выбор.

Возьмем в качестве заменяющей функции $\varphi(x)$ периодическую функцию

$$S_n = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \tag{8}$$

с тем же периодом 2π, что и исходная функция $f(x)$. Вопрос ставится так: нужно выбрать $(2n+1)$ коэффициентов α_0, α_1, $\alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$ таким образом, чтобы средняя квадратичная ошибка (7) была возможно меньше. Подставим (8) в (7):

$$\overline{\Delta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) \, dx - \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx+\beta_k\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2 dx. \qquad (9)$$

Введем далее величины:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx \qquad (10)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

которые называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$.

Гармонические функции обладают следующими свойствами:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\sin lx\,dx=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\cos kx\cos lx\,dx=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ \pi & (k=l),\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\sin kx\sin lx\,dx=\begin{cases}0 & (k\neq l),\\ \pi & (k=l),\end{cases}\\ \qquad (k,\ l=1,\ 2,\ \ldots).\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Воспользовавшись формулами (10) и (11), после несложных преобразований получаем из (9):

$$\overline{\Delta^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx+\frac{(\alpha_0-a_0)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2\right]-$$

$$-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).$$

В этом выражении переменными являются α_k и β_k. Мы должны их выбрать так, чтобы $\overline{\Delta^2}$ было наименьшим. Это будет, очевидно, тогда, когда члены, зависящие от α_k и β_k, равны нулю, т. е. когда коэффициенты при косинусах и синусах в заменяющей функции (8) равняются соответствующим коэффициентам Фурье.

Ошибка при таком апроксимировании [при таком выборе функции $\varphi(x)$] равна

$$\overline{\Delta^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx-\frac{a_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2). \tag{12}$$

Здесь нужно отметить следующие два замечательные обстоятельства.

Допустим, что мы прибавляем к заменяющей функции (8) еще один член с $k=n+1$. Тогда оказывается, что при наилучшем апроксимировании коэффициенты при прежних членах останутся теми же, что и раньше. Ниоткуда не следует, что в задачах об апроксимации функций дело будет так обстоять всегда. Но в данном случае наилучшая апроксимация n членами не зависит от последующего улучшения апроксимации: первые члены не нужно пересматривать при добавлении новых. Это объясняется тем свойством синусов и косинусов, что интеграл за период 2π от произведения любых двух различных функций из совокупности $\cos kx$, $\sin kx$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n)$ равен нулю [формулы (11)]. Функции, обладающие таким свойством, называются *ортогональными* функциями.

Совокупность функций

$$\begin{matrix}\cos t, & \cos 2t, & \cos 3t, \ldots\\ \sin t, & \sin 2t, & \sin 3t, \ldots\end{matrix}$$

является примером совокупности ортогональных функций в интервале $(-\pi, +\pi)$.

Перейдем ко второму замечательному обстоятельству. Возникает вопрос: является ли система функций

$$\cos kx,\ \sin kx \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

замкнутой, т. е. существует ли периодическая функция с периодом 2π, которая была бы ортогональна ко всем этим функциям? Оказывается, что при $n=\infty$ всякая функция, ортогональная ко всем функциям (13), равна тождественно нулю, т. е. при $n=\infty$ система (13) — замкнутая.

Вернемся к выражению (12) для средней квадратичной ошибки. Чем больше берется членов в заменяющей функции (8), тем ошибка меньше. Теорема Фурье заключается в следующем: при некоторых условиях[1] бесконечный ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{14}$$

сходится и представляет собой функцию $f(x)$.

Обычно начинают изложение с задачи о точном представлении функции тригонометрическим рядом. Но физик не может работать с бесконечным числом членов. Поэтому для него важна именно та задача, с которой мы начали, — задача об апроксимации.

Очень важно выяснить, всякую ли периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье (14)? В связи с этим интересно проследить историю задачи о представлении функции рядами Фурье. Первый вопрос, который здесь возник, был общий вопрос о том, что такое функция.

Эйлер считал, что существуют аналитические и геометрические функции. Мы получаем, говорил он, аналитические функции, беря такие выражения, как x, x^2, $\sin x$ и т. д. Мы получаем геометрическую функцию, если опишем „свободной рукой“ произвольную кривую[2]. Эти воззрения не отвечают современному определению функции: y есть функция от x, если каждому значению x соответствует определенное значение y.

Бернулли, получив решение в виде тригонометрического ряда[3] (т. е., по Эйлеру, в виде „аналитической функции“), утверждал, что им получено *общее* решение, что так можно представить *любую* функцию.

Это казалось невероятным. Ведь коэффициенты ряда

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

образуют счетное множество, в то время как „число“ значений функции гораздо больше, множество этих значений более мощное. Тем не менее Фурье имел смелость сказать, что совершенно произвольная (графически заданная) непрерывная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. И это правильно, потому что (как теперь известно) непрерывные функции

[1] [См. ниже.]

[2] [См., например, С. Н. Бернштейн. Исторический обзор развития понятия функции. Вестник опытной физики и элементарной математики, № 559, сем. 47, стр. 177, 1912.]

[3] [См. 32-ую лекцию и 5-ую лекцию части II.]

вовсе не так разнообразны, как это кажется на первый взгляд. Достаточно задать непрерывную функцию в рациональных точках чтобы определить ее полностью. Другими словами, непрерывны функции задаются совокупностью своих значений в *рациональны* точках. Но эти точки составляют множество такой же мощности как и коэффициенты разложения (счетное множество). Если мы примем это во внимание, то нас уже не удивит возможност представить любую непрерывную функцию в виде ряда Фурье

Но плохо, если что-нибудь становится „слишком" понятным Я боюсь, что разложение в ряд Фурье уже кажется чем-то сам собой понятным. Это не так: с бесконечными совокупностям нужно обращаться осторожно. Например, возьмите ряд Фурь и выбросьте из него третий член. Число членов остается беско нечным, и тем не менее с помощью такого бесконечного ряд любую непрерывную функцию уже представить нельзя.

Теорема Фурье справедлива при известных ограничения (достаточные условия того, что функция может быть представ лена рядом Фурье, были указаны Дирихле); рядом Фурье могу быть представлены не все непрерывные функции. С другой сто роны, в виде рядов Фурье может быть представлен определен ный класс разрывных функций, имеющих только разрывы первог рода (т. е. такие, что и слева и справа от разрыва функци имеет определенное значение). Для того, чтобы функция могл быть представлена рядом Фурье, она должна иметь конечно число разрывов и не должна иметь бесконечного числа максиму мов и минимумов. Например, непрерывную функцию $\sin(1/x)$ которая при $x \to 0$ имеет бесконечно густые максимумы, нельз разложить в ряд Фурье.

Тот класс функций, которые могут быть представлены рядо Фурье, вполне достаточен для физических целей. Практическ любая интересующая физика функция может быть разложен в ряд Фурье.

Как быстро убывают коэффициенты Фурье? Ряд (14) сходитс тем быстрее, чем функция $f(x)$ глаже. Если h — порядок разрыв (т. е. порядок наинизшей терпящей разрыв производной), то асимпто тически, при достаточно больших k, коэффициенты убываю как $1/k^{h+1}$.

Существуют ли различные функции, представляемые одни и тем же рядом Фурье? Да, существуют. Они отличаются одн от другой тем, что имеют различные значения в ***конечном*** ряд точек. Но это исключительный случай. Интересующие нас функции однозначно определяются своим рядом Фурье.

Теорема Фурье была впервые высказана им в 1822 г. в его „Théorie analytique de la chaleur“, но еще в 1750 г. ее предугадал Бернулли.

Синусы и косинусы — не единственная система ортогональных функций, по которым можно разлагать произвольную функцию. Существует бесконечное множество таких систем. С этой точки зрения ряд Фурье — чрезвычайно частный случай. Но разложение по косинусам и синусам, т. е. по гармоническим колебаниям, сыграло очень большую роль в развитии общей теории разложения по ортогональным функциям. В математике остальные разложения тоже важны, не менее важны, чем разложение Фурье. Но разложение Фурье выделено благодаря физическим условиям[1].

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаём направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой“. Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции

Мы сейчас разберем немного формальные, но необходимые вопросы. Как мы видели в прошлый раз, всякую интересующую нас функцию $f(x)$ с периодом 2π можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

причем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx. \tag{2}$$

Для того, чтобы эти формулы годились и для $k=0$, нужно писать постоянный член в виде $a_0/2$.

Обычно приходится иметь дело с функцией, имеющей период $\tau \neq 2\pi$. Если сделать замену

$$\frac{2\pi}{\tau} y = x, \tag{3}$$

[1] [См. 16-ую лекцию.]