точек. Но это исключительный случай. Интересующие нас функции однозначно определяются своим рядом Фурье.

Теорема Фурье была впервые высказана им в 1822 г. в его „Théorie analytique de la chaleur“, но еще в 1750 г. ее предугадал Бернулли.

Синусы и косинусы — не единственная система ортогональных функций, по которым можно разлагать произвольную функцию. Существует бесконечное множество таких систем. С этой точки зрения ряд Фурье — чрезвычайно частный случай. Но разложение по косинусам и синусам, т. е. по гармоническим колебаниям, сыграло очень большую роль в развитии общей теории разложения по ортогональным функциям. В математике остальные разложения тоже важны, не менее важны, чем разложение Фурье. Но разложение Фурье выделено благодаря физическим условиям[1].

ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Ряды Фурье (продолжение); явление Гиббса. Биения. Как мы узнаём направление на источник звука. „Гармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой“. Критерий медленности определяется конкретной физической задачей. Кажущееся нарушение закона сохранения энергии при интерференции

Мы сейчас разберем немного формальные, но необходимые вопросы. Как мы видели в прошлый раз, всякую интересующую нас функцию $f(x)$ с периодом 2π можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1}$$

причем

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx. \tag{2}$$

Для того, чтобы эти формулы годились и для $k=0$, нужно писать постоянный член в виде $a_0/2$.

Обычно приходится иметь дело с функцией, имеющей период $\tau\neq 2\pi$. Если сделать замену

$$\frac{2\pi}{\tau}y=x, \tag{3}$$

---

[1] [См. 16-ую лекцию.]

то функция $f(2\pi y/\tau)$, рассматриваемая как функция y, имеет период τ, если $f(x)$ имеет период 2π (когда y увеличивается на τ, то аргумент x увеличивается на 2π). Обозначив

$$f\left(\frac{2\pi}{\tau}y\right)=\varphi(y)$$

и сделав в (1) и (2) замену (3), получаем:

$$\varphi(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi y}{\tau}\right)\right],$$

где

$$a_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}\varphi(y)\cos\left(k\frac{2\pi y}{\tau}\right)dy,\quad b_k=\frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}\varphi(y)\sin\left(k\frac{2\pi y}{\tau}\right)dy.$$

Упомяну еще о написании действительного ряда Фурье в комплексной форме.

Пусть действительная функция $f(x)$ имеет период 2π. Вместо

$$a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

можно написать

$$\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}$$

(это, конечно, действительная величина). Обозначим:

$$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)e^{-ikx}dx,$$

$$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)e^{ik}dx$$

(c_k и c_{-k} — комплексно сопряженные). Тогда

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}.$$

Это — изящная запись в комплексной форме обычного ряда Фурье, представляющего действительную функцию.

И, наконец, последнее замечание, уже не формальное, а по существу. Оно касается вопроса, который должен возникнуть у каждого.

В прошлый раз было сказано, какие функции можно разлагать в ряд Фурье. Функция $f(x)$ может быть разрывной, но у нее должно быть конечное число разрывов и она не должна иметь бесконечно большого числа максимумов и минимумов (напомню, что при построении периодических функций естественно входят в рассмотрение разрывные функции).

Что значит, что функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье? Это значит, что для каждого значения x сумма бесконечного ряда в правой части (1) равна соответствующему значению функции $f(x)$. Но в месте разрыва $f(x)$ имеет два значения. Чему *же здесь* равен ряд Фурье? Вот результат математического исследования: в точках разрыва $x=a$ ряд Фурье дает арифметическое среднее значений $f(x)$ слева и справа:

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2}.$$

Таким образом, рядом Фурье задается функция, определенная во всех точках.

Существует ряд приборов, позволяющих осуществить разложение по Фурье. Если начертить периодически повторяющуюся функцию, то определенные приборы — типа планиметра — позволяют последовательно определить ее коэффициенты Фурье. С помощью этих приборов нельзя вычислить бесконечное число членов, но для применений всегда достаточно конечного числа. Есть, например, приборы, вычисляющие 6 коэффициентов. Прибор Майкельсона дает 120 коэффициентов: 60 при синусах и 60 при косинусах. Он позволяет проделать и обратную операцию: суммировать функцию по заданным коэффициентам разложения Фурье. Прибор Майкельсона дает сумму Фурье S_{60}. Это — приближение, и ему соответствует, конечно, непрерывная кривая.

Когда суммируется с помощью прибора конечное число членов разложения Фурье разрывной функции $f(x)$ (например, изображенной на рис. 2), можно ожидать, что получится кривая, которая всюду будет близко подходить к кривой $f(x)$. На деле получается иной результат: апроксимирующая кривая хорошо подходит к $f(x)$ везде, кроме окрестностей мест разрыва; там она образует „хвосты“ (рис. 4), высота которых *не* уменьшается с ростом числа суммируемых членов разложения (она достигает примерно $^1/_{10}$ величины скачка), но в которых с ростом этого числа осцилляции сгущаются и сжимаются к точке разрыва.

Можно подумать, что появление „хвостов“ вызвано дефектом прибора, но это неверно. Как показал Гиббс, это — экспериментальное указание на чисто математический факт: неравномерную сходимость ряда Фурье в точках разрыва $f(x)$. Наличие осциллирующих „хвостов“ у конечных сумм Фурье около точек разрыва разлагаемой функции получило название *явления Гиббса*.

Перейдем теперь к другому вопросу.

Мы помним, что при сложении гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание с тем же периодом. Теперь речь будет идти о сложении двух гармонических колебаний *неодинакового* периода. Этот случай играет в физике колебаний очень существенную роль, и здесь возникает ряд общих вопросов, которые нужно с самого начала себе уяснить.

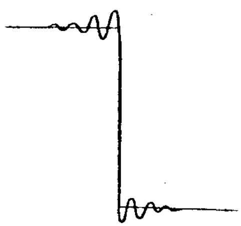

Рис. 4.

Итак, пусть

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (4)$$

Периодическая ли это функция? Если ω_1 и ω_2 соизмеримы, т. е. относятся, как целые числа, то y — периодическая функция. Действительно, пусть, например, первое слагаемое имеет период 1/300 сек., а второе — 1/200 сек. Тогда три периода первого слагаемого составляют два периода второго: через 1/100 сек. повторяются значения обоих, а следовательно, повторится и значение суммы.

Но какой смысл имеет в физике говорить о соизмеримости или несоизмеримости? Если, скажем,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1\,000\,001}{1\,000\,000},$$

то частоты соизмеримы, но y будет повторяться лишь через очень большое число периодов каждого из складываемых колебаний. Другими словами, если отношение частот равно отношению очень больших взаимно простых целых чисел, то физического отличия от случая несоизмеримых частот нет.

Здесь важно другое. Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то колебание (4) не может быть представлено как *одно* синусоидальное колебание в точном смысле слова.

Переписав (4) в виде

$$y = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + a_2 \cos[\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1) t - \varphi_2], \quad (5)$$

можно показать путем простых вычислений [1], что y можно представить как

$$y = a\cos(\omega_1 t - \varphi), \tag{6}$$

где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_1 - \varphi_2]}.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos[(\omega_2 - \omega_1)t - \varphi_2]}.$$

Как сказано, (6) не есть гармоническая функция, так как у гармонической функции a и φ по определению являются постоянными величинами.

Интересно, однако, следующее. Пусть $|\omega_1 - \omega_2|$ очень малая величина. В этом случае частота изменения величин a и φ очень мала, поскольку $\cos(\omega_2 - \omega_1)t$ — медленно меняющаяся функция. Величины a и φ меняются медленно, в течение очень долгого времени они почти постоянны и можно рассматривать y как „гармоническое колебание с очень медленно меняющейся амплитудой и с очень медленно меняющейся фазой“. Строго говоря, это, конечно, *не* гармоническое колебание. Только при известном легкомыслии можно сказать, что амплитуда и фаза „почти“ постоянны.

Возьмем пример. Пусть у нас имеются два камертона, периоды которых немного различаются. Создаваемое ими в некоторой точке суммарное колебание y имеет вид (4) или, что то же, (5). Можно сказать, что складываются два колебания с одинаковым периодом, но с медленно меняющейся разностью фаз. В какой-то момент амплитуда суммарного колебания есть сумма амплитуд $a_1 + a_2$; потом она очень медленно переходит в разность амплитуд $a_1 - a_2$ и т. д.

Можно сказать (и это будет *точно*), что y есть сумма двух гармонических колебаний с несколько отличными периодами. Но можно сказать и так: y есть *одно* колебание с определенным периодом, но амплитуда его медленно меняется от некоторого максимума до некоторого минимума и обратно. Это уже некоторая неряшливость в выражениях. Она вызвана тем, что мы стараемся здесь перенести то, что мы знаем о сложении колебаний с *одинаковыми* периодами, на сложение колебаний с *разными* периодами. Итак, мы говорим: когда звучат оба камертона, возникает тот же тон, что при *одном* камертоне, но с медленно меняющейся фазой

[1] [Ср. 2-ую лекцию, формулы (1).]

и амплитудой. Это явление *биений*. Сведя, таким образом, рассматриваемый случай на прежний, уже известный, мы сразу предвидим, что̀ будет наблюдаться.

Мы можем на слух определять направление, откуда приходит звук. Это нам удается не очень хорошо, но все же удается. Существенно при этом то, что мы слышим *двумя* ушами. Может показаться, что мы производим оценку направления по разности интенсивностей в обоих ушах. Для низких тонов это объяснение заведомо неверно. Можно теоретически подсчитать, насколько голова ослабляет звук. Оказывается, что в случае длинных волн ослабление очень мало. Это можно проверить так: прикрыв одно ухо, вы все-таки правильно оцените направление. Повидимому, объяснение следует искать в *разности фаз* между колебаниями, воспринимаемыми каждым ухом. На рис. 5 показано, как получается эта разность фаз.

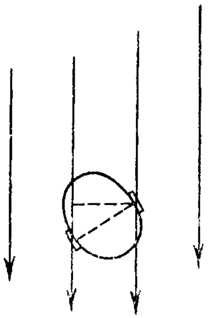

Рис. 5.

Можно проверить это предположение следующим образом. К обоим ушам подводится звук от одного камертона, но по различным путям, и затем меняется разность фаз колебаний, приходящих к обоим ушам. Наблюдатель чувствует при различных значениях разности фаз, что источник находится в направлении, как раз соответствующем задаваемой разности фаз. Но можно сделать иначе. Возьмем два камертона, несколько различных по частоте. Тогда к ушам приходят два колебания с непрерывно изменяющейся разностью фаз, и наблюдатель будет чувствовать, что источник ходит вокруг него. Очевидно, при истолковании этого явления целесообразно говорить, что имеются два колебания с одинаковым периодом, но с изменяющейся разностью фаз, — это не точно, но *целесообразно*.

Способ рассуждения, которым мы пользовались, иногда приемлем. Часть опытов отлично описывается теоретически с помощью представления о меняющейся амплитуде или фазе. Но иногда это представление становится предвзятым и приводит к ошибкам (Флеминг не мог освободиться от взгляда на сумму, как на колебание одного периода, но с меняющейся амплитудой и фазой). Надо знать, когда можно и когда нельзя им пользоваться.

Вообще говоря, им нельзя пользоваться в вопросах резонанса. Сделаем следующий опыт. Мы берем два одинаковых камертона, возбуждаем один из них и затем его останавливаем. Теперь звучит другой камертон: во время звучания первого он возбудился. Теперь мы расстраиваем первый камертон (с помощью нагрузки немного изменяем его период) и снова возбуждаем. После остановки первого камертона второй теперь молчит (вернее, звучит очень слабо). Заставив звучать оба камертона одновременно, мы услышим биения: ведь частоту одного из камертонов мы изменили. Если один (расстроенный) камертон совершает 500 колебаний в секунду, другой 504, то биения происходят 4 раза в секунду. Биения очень хорошо описываются с помощью меняющейся амплитуды. Здесь этот способ рассмотрения вполне пригоден: мы ясно слышим повторяющиеся изменения амплитуды.

Возьмем теперь третий камертон частоты 504 и будем возбуждать сразу первый и второй. Вместе они будут действовать на третий. Колебания первого камертона практически совсем не действуют на третий.

Пользуясь прежним способом рассуждения, мы скажем: колебание от первого и второго камертона есть „колебание с частотой первого камертона, но с переменной амплитудой", и оно не должно поэтому заметно действовать на третий. В действительности же при совместном воздействии первого и второго камертонов третий сильно возбуждается. Таким образом, пользуясь прежним способом рассмотрения, мы пришли в вопросе о действии двух камертонов на третий к неправильному результату. Одно „гармоническое колебание с изменяющейся амплитудой" ведет себя, как два гармонические колебания с неизменными амплитудами. На такие явления натолкнулись, и именно в таких случаях возникает потребность разобраться, *когда* и *почему* можно пользоваться тем или иным упрощенным представлением.

Имеем ли мы право переносить результаты, полученные для *постоянных* a и φ, *на медленно меняющиеся* a и φ? Математика запрещает так поступать: если a и φ не постоянны, тогда то, что выведено для постоянных a и φ, вообще говоря, неверно. Но в природе не бывает строго определенных, строго постоянных величин. Требование абсолютного постоянства тех или иных величин невыполнимо. Физика ставит вопрос по-иному: в какой степени позволительно, чтобы те или иные величины менялись, если мы пользуемся результатами, полученными в предположении, что эти величины постоянны? В физике вопрос часто ставится именно так, и на данном примере я хочу его разъяснить.

Я говорил: „разность частот $|\omega_1 - \omega_2|$ — очень малая величина". Это выражение неряшливо. Более того, оно лишено всякого смысла. Пусть числа колебаний в секунду будут 500 и 502. Мы говорим, что разность этих чисел мала: число 2 мы считаем малым. Это *уже* подозрительно. Числа колебаний в минуту разнятся на 120, но явление от этого не изменяется. А ведь можно взять числа колебаний и за год? Говорить о малости именованных чисел в физике лишено всякого смысла. В одних единицах величина мала, в других — она велика. В физике может иметь значение только малость относительных величин. Только их значения не зависят от выбора единиц.

Имеем ли мы право говорить: „медленно меняющаяся амплитуда"? Имеем, но мы должны сказать, *по отношению к чему* мала частота изменения амплитуды.

Пусть ω_1 и ω_2 — частоты акустических колебаний. Наши уши так устроены, что если отличие частот двух колебаний меньше определенного порога, то мы перестаем их слышать раздельно. Повторяю, это факт физиологический. Если отличие в периодах мало по отношению к 1/10 сек., то в вопросах слуха можно считать, что имеется одно колебание с переменной амплитудой. В опыте же с резонансом была важна малость $|\omega_1 - \omega_2|$ по отношению *к совсем другой* величине — коэффициенту затухания третьего камертона [1]. В приведенных двух примерах важна малость разности частот по отношению к *различным* величинам. Это часто встречающаяся ошибка. Говорят: „такая-то величина мала", и переносят это высказывание на опыт, где играет роль малость по отношению к иным величинам, по отношению к которым она вовсе не мала. Если вы говорите о малости каких-то величин, то, во-первых, вы обязаны указывать, по отношению к чему они малы, и, во-вторых, знать, что в различных вопросах играет роль малость по отношению к *разным* величинам. Всегда нужно знать, *для чего* говорится о малости. В разобранном случае могло быть правильным считать такую-то расстройку малой в вопросах слуха, а в том или ином опыте с резонансом это уже было неправильно.

В радиотелефонии передаваемая речь изменяет амплитуду посылаемого колебания [2]. Для того, чтобы эта „модуляция" повторялась в приемнике без искажения, ее частота должна быть мала

---

[1] [См. 16-ую лекцию.]

[2] [В 1930 г. другие способы модуляции практически еще не применялись.]

не по отношению к частоте немодулированного колебания. Иногда говорят обратное, но это неверно; критерий малости здесь другой. Частота модуляции должна быть мала по отношению к коэффициенту затухания колебательного контура приемника.

Сравним все, что было сказано, с вопросом: что такое разреженный газ? Вопрос сам по себе не имеет смысла. Он приобретает смысл, если сказать, для чего нужен ответ. Теплопроводность не очень разреженного газа почти не зависит от плотности. Но если газ „очень разрежен", то наступают отклонения. Здесь „очень разрежен" означает, что средний пробег молекул велик *по отношению к размерам сосуда*. Понятие „разреженность вообще" не имеет смысла. В достаточно большом сосуде газ не является разреженным, как бы ни была велика длина свободного пробега.

В оптике — совсем другой критерий. Там следует считать, что газ разрежен, если время между столкновениями молекул очень велико *по сравнению со временем затухания* колебаний оптических электронов.

Вернемся к вопросам интерференции. Здесь необходимо еще разобраться в одном кажущемся противоречии с законом сохранения энергии.

Пусть имеется два источника света. В каждой точке пространства квадрат амплитуды определяет проходящую энергию. Колебания от обоих источников складываются, и поэтому, как мы знаем, квадраты амплитуд *не* складываются. Энергия, проходящая в каждой точке, отлична от суммы энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности.

Часто это объясняют следующим образом. В одном месте колебания усиливаются, и здесь энергия больше суммы энергий от отдельных источников, зато в другом месте колебания уничтожаются, и там энергия равна нулю; если проинтегрировать по замкнутой поверхности, то получится сумма энергий, которые посылали бы источники, взятые в отдельности. Это объяснение встречается у Гельмгольца, но оно неправильно. Проинтегрировать по замкнутой поверхности не трудно. Проинтегрируйте — и вы *не* получите сумму энергий, которые посылал бы каждый источник в отдельности. Вернее, вы ее получите только в том случае, когда источники достаточно далеки друг от друга 1) по отношению к длине волны и 2) по отношению к размерам самих источников; в этом случае действительно получается просто перераспределение энергии.

Пусть источники, размер которых мал по сравнению с длиной волны, колеблются в одинаковой фазе, но расстояние между ними меньше половины длины волны. Тогда колебания всюду складываются и энергия *всюду больше* суммы энергий, которые посылали бы источники в отдельности. Получается кажущееся нарушение закона сохранения энергии.

Как всегда в таких случаях, нужно продумать, что это значит. Для того, чтобы источники продолжительно колебались, нужно затрачивать определенную энергию на поддержание их колебаний; уход энергии покрывается работой, совершаемой над источником. Если энергии уходит больше или меньше, чем сумма того, что давали бы отдельные источники, в этом еще нет нарушения закона сохранения энергии. Нарушение было бы, если для поддержания колебаний нужно было затрачивать сумму тех работ, которые требуются в случае отдельных источников. Но ведь нигде не сказано, что внешние силы, раскачивающие электроны (источники света), совершают одинаковую работу и тогда, когда раскачивается отдельно взятый электрон, и тогда, когда этот электрон раскачивается *в присутствии другого*, тоже колеблющегося, электрона. Если энергии излучается больше, то и работы вкладывается больше, и, таким образом, закон сохранения энергии полностью соблюдается.

Аналогичный вопрос встретился и в радиотелеграфии. Речь шла о затухающих колебаниях, которые не поддерживаются извне и уменьшаются вследствие излучения. Пусть совместно излучают две антенны. Затухание — то же самое, что и у одной антенны, а излучаемая энергия может оказаться больше, чем сумма энергий, которые излучались бы отдельными антеннами. Опять противоречие? Но откуда взято утверждение, что затухание то же, что у одной антенны? В действительности затухание каждой антенны вблизи другой меняется и как раз настолько, насколько меняется энергия при совместном излучении обеих антенн.