ПЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(Октябрь 1930 г.)

Почти-периодические функции. Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинакового периода. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих различные периоды. Соизмеримость и несоизмеримость периодов. Радиоприем „посредством биений". Роль нелинейности. Детекторы. Выпрямление. Образование разностного тона. Некоторые методы экспериментального исследования колебаний.

Как мы видели, сумма двух гармонических колебаний с разными периодами не может быть представлена как одно гармоническое колебание. Эта сумма — непериодическая функция, если периоды несоизмеримы. Когда ω_1 и ω_2 близки, сумму можно представить как „гармоническое колебание с переменной амплитудой и переменной фазой". Мы выяснили, при каких условиях можно пользоваться таким представлением.

Примеры явлений, в которых имеет место сложение гармонических колебаний с разными периодами, очень многочисленны. Вот два простых примера: колебание фонаря, подвешенного на пловучем маяке, и колебание языка колокола[1]. Еще один пример: в приливах и отливах мы имеем дело с периодическими силами, обусловленными Солнцем и Луной. Периоды этих сил различны. Возникают биения, — это сизигийные и квадратурные приливы, получающиеся в зависимости от относительного расположения Солнца и Луны. Необходимо отметить, что элементарная статическая теория приливов неправильна. Здесь происходит типично колебательное явление, в котором играет роль весь процесс в целом. Это явление очень похоже на явление резонанса, и для него существенна вся история воздействия[2].

Можно рассматривать суммы конечного числа гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами, а потом перейти к сумме бесконечного числа таких гармонических колебаний. Это приводит к новому классу функций, более общих, чем периодические. Фактически к таким функциям подошли с двух различных сторон: исходя из рядов Фурье и отправляясь от определения периодических функций.

Вспомним, что такое периодическая функция[3]. Это функция $f(t)$, обладающая свойством

$$f(t+\tau)=f(t).$$

[1] [См. 26-ую лекцию.]

[2] [См. том V, стр. 436].

[3] [См. 2-ую лекцию.]

Она имеет период τ, а также $n\tau$, где n — любое целое число. Рассмотрим теперь непрерывные функции $f(t)$, обладающие следующим свойством: для сколь угодно малого ε существуют такие „почти-периоды" $\tau(\varepsilon)$, что

$$|f[t+\tau(\varepsilon)]-f(t)|<\varepsilon,$$

причем таких почти-периодов имеется бесконечно много и они лежат не очень редко, — аналогично тому, как обстоит дело с периодами $n\tau$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) периодической функции. Такие функции повторяются, но повторяются не совсем точно. Они называются *почти-периодическими* функциями[1].

Оказывается, что всякую непрерывную почти-периодическую функцию можно апроксимировать суммой гармонических колебаний с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами:

$$f(t) \sim \sum_k c_k e^{i\omega_k t}.$$

Взяв достаточно большое число членов, можно получить сколь угодно хорошее приближение в смысле наименьшей квадратичной ошибки. И наоборот, такой ряд всегда представляет собой почти-периодическую функцию.

В физике мы постоянно сталкиваемся с почти-периодическими функциями. Например, смещение определенной точки струны выражается, как функция времени, бесконечным рядом синусоид с (вообще говоря) несоизмеримыми периодами. Это — почти-периодическая функция. Ряд Фурье получается только в том частном случае, когда частоты отдельных слагаемых относятся между собой, как целые числа.

Физика пришла к этим функциям иным путем, чем математика. Математика, определив свойство почти-периодичности, показала, что класс функций, обладающих этим свойством, совпадает с классом функций, которые могут быть представлены в виде ряда гармонических колебаний. Кроме этой основной теоремы, я пока что не нашел в математической теории почти-периодических функций чего-либо, что имело бы очень большое значение для теории колебаний.

Исследуем задачу о сложении двух гармонических колебаний, отличную от той, которую мы рассмотрели раньше, когда скла-

---

[1] [Г. Бор. Почти-периодические функции. М.—Л., 1934.]

дывались движения в одном направлении. Представим себе теперь, что какое-то тело качается в определенном направлении и его смещение есть

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \tag{1}$$

а некоторая точка колеблется в перпендикулярном направлении и ее смещение по отношению к этому телу есть

$$y = a_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \tag{2}$$

Тогда точка опишет некоторое сложное результирующее движение. Как говорят (не совсем точно), точка одновременно участвует в двух движениях. (Возникает вопрос, можно ли складывать перпендикулярные скорости. Это можно делать, если движение в одном направлении не зависит от движения в другом направлении.)

Уравнения (1) и (2) являются параметрическими уравнениями траектории точки. В случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, исключить из них t очень легко. Это можно сделать изящным способом, но можно пойти и лобовым путем: решить уравнения (1) и (2) относительно $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, как два линейных уравнения с двумя неизвестными, возвести затем полученные выражения в квадрат и сложить. Это даст уравнение траектории в виде

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3}$$

Таким образом, траектория представляет собой эллипс с центром в начале координат. С самого начала можно сказать, что эллипс заключен в прямоугольнике

$$x = \pm a_1, \quad y = \pm a_2.$$

Форма же эллипса и то, как он повернут, зависит от разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$. Здесь интересно то, что по направлению осей эллипса можно определить разность фаз.

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда

$$\left(\frac{x}{a_2} - \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm n\pi \qquad (n = 1,\ 3,\ 5, \ldots),$$

тогда

$$\left(\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2}\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) — это уравнения прямых, проходящих через начало координат. Таким образом, когда колебания совершаются с одинаковыми или с противоположными фазами, эллипс (3) вырождается в отрезок прямой.

Эти вещи играют фундаментальную роль в оптике при рассмотрении двоякопреломляющих тел. С ними связана целая глава физики — кристаллооптика. В двоякопреломляющих телах световые колебания распространяются с разной скоростью, в зависимости от того, происходят ли они в направлении перпендикулярном или параллельном оптической оси.

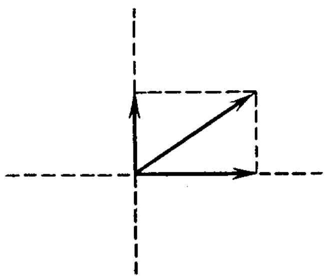

Рис. 6.

Пусть на пластинку (рис. 6) падает прямолинейно поляризованный свет. Скорости распространения двух взаимно перпендикулярных составляющих колебания различны, и они выйдут из пластинки с различными фазами. Значит, луч выйдет из пластинки (вообще говоря) эллиптически поляризованным. Таким образом, пластинка превращает прямолинейно поляризованный луч в эллиптически поляризованный.

В частном случае, когда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2},$$

имеем из (3):

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1,$$

т. е. эллипс с главными осями, направленными по осям x и y. Если, кроме того, $a_1 = a_2$, то получается окружность. Таким путем получают свет, поляризованный по кругу.

Посмотрим, что будет, если частоты ω_1 и ω_2 не равны друг другу, но разность их очень мала. Для глаза это значит, что числа колебаний в секунду отличаются меньше, чем, скажем, на 10. Мы можем тогда сказать, что имеются два колебания с одинаковой частотой, но разность фаз между ними медленно меняется. Эллипс не будет неподвижен, а будет медленно поворачиваться. Получается последовательная смена тех картин, которые соответствуют разным $\varphi_1 - \varphi_2$ и о которых мы только что говорили.

Пусть теперь частоты ω_1 и ω_2 разнятся как угодно. Здесь интересно следующее. Математика показывает, что если частоты соизмеримы, то получается замкнутая кривая, если несоизмеримы — незамкнутая. Но ведь физика ничего не знает о соизмеримых или несоизмеримых числах, в физике это различие не играет роли... Получается так, будто бы я только что указал на различие между обоими случаями, а теперь от этого отказываюсь. Позвольте привести аналогию.

Химики мне не простят, если я скажу, — а я это скажу, — что закон кратных отношений в общепринятой формулировке не имеет никакого смысла. Пусть соединяются элементы A и B. Тогда, как говорят обычно, B вступает в реакцию с заданным количеством элемента A в количествах, относящихся между собой, как целые числа. Говорят иными словами, что эти количества элемента B всегда соизмеримы. Я утверждаю, что это высказывание не имеет содержания: задав любые соизмеримые числа, всегда можно подобрать такие, близкие к ним, несоизмеримые числа, что нельзя будет различить одни от других. Что же имеет в виду химия? Что количества элемента B, соединяющиеся с данным количеством элемента A, относятся между собой, как *малые* целые числа. Но что такое малые числа? Подходят ли, например, числа 5 или 6? Где здесь надо остановиться? Точно сформулировать закон кратных отношений очень трудно.

Итак, при несоизмеримых периодах получается незамкнутая кривая. Она подходит как угодно близко к любой точке внутри прямоугольника, она заполняет его „всюду плотно". Но кто запрещает рассуждать в случае несоизмеримых частот так, как если бы они были соизмеримы? Если мы заменим нерациональное отношение ω_1/ω_2 близким рациональным, физические результаты не могут измениться скачком. И действительно, оба подхода дают практически одно и то же. Весь вопрос в том, через сколько времени заканчивается опыт. В течение ограниченного промежутка времени я могу рассматривать дело так, как будто частоты соизмеримы. Скажем, через год кривая покроет всю площадь прям(угольника, но на опыте, если отношение частот близко к раци(нальному отношению 1 : 1, мы увидим эллипс. Качественное ра: личие здесь практически не существенно из-за медленности изм(нения формы эллипса.

Если отношение периодов равно 1 : 2, 2 : 3, 1 : 4 и т. д., пол; чаются замкнутые кривые самого разнообразного типа. В завис| мости от фазовых соотношений получаются различные картин

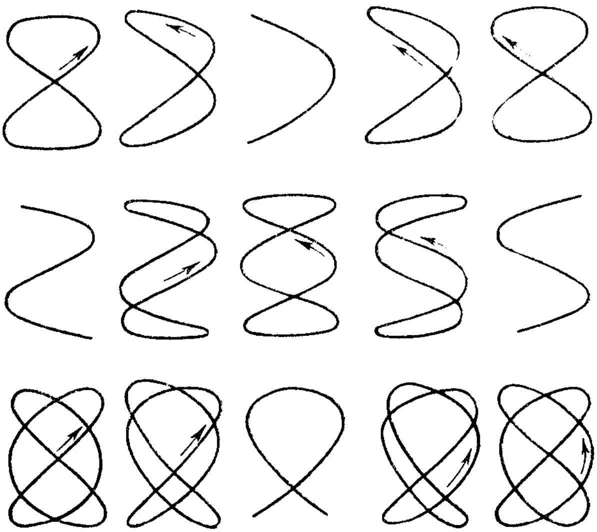

Рис. 7.

(фигуры Лиссажу); например, такие, как показано на рис. 7 Можно по фигуре узнавать отношение частот. Его можно уст: новить по отношению чисел точек касания кривой к сторона прямоугольника, в который она вписана.

Сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний можн продемонстрировать с помощью двойного маятника, к котором подвешена воронка с песком (правда, здесь движения не совсе независимы).

На этом вопрос о сложении колебаний мы будем считать зако ченным. Перейдем теперь к вопросу о выпрямлении колебани

Допустим, что имеется радиостанция, посылающая незатуха щую волну высокой частоты 100 000 герц, — частоты, наход щейся далеко за пределом слышимости. Мы принимаем это кол бание, но ничего не слышим. Пусть теперь на месте приема имеется источник колебаний близкой частоты, скажем 100 500. Тогда мы слышим в телефоне разностный акустический тон частоты 500. Если же работает только передатчик или только местный генератор (так называемый гетеродин), то ничего не слышно. Это было замечено, и в результате появился чрезвычайно удобный способ приема колебаний, оказавшийся к тому же чрезвычайно чувствительным. Этот способ приема сделался одним из самых распространенных. Его еще не так давно зачастую объясняли следующим образом: происходят *биения* 500 раз в секунду, и мы слышим эти биения как тон.

Это неверно. Если в приемнике *есть* гармоническое колебание с частотой 500, то вы услышите соответствующий тон. Если такого колебания в приемнике *нет*, то этого тона вы не услышите. Пусть в приемнике имеются колебания только с частотами 100 000 и 100 500. Происходят биения, но *нет* гармонического колебания с частотой 500. Следовательно, мы ничего не услышим. Поэтому употребляемое название „прием методом биений“ неправильно.

В объяснении, которое я привел, забыто одно обстоятельство, — то, что имеется *детектор*. Его роль в приемнике — самая существенная. Более того, освободиться от детектирования нелегко: всякий плохой контакт есть детектор, так как при загрязнении место контакта не подчиняется закону Ома.

Наводимая в контуре приемника электродвижущая сила имеет вид

$$e = a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t, \tag{6}$$

причем в нашем конкретном случае $\omega_1/2\pi = 100\,000$, $\omega_2/2\pi = 100\,500$.

Если контур подчиняется закону Ома, в нем будет течь ток, пропорциональный (6). На практике мембрана телефона за таким током не уследит. Но пусть даже удалось построить такую „мембрану“, которая будет заметно колебаться под действием тока высокой частоты (это не безнадежно: я имею в виду пьезокварц). Смещение такой мембраны будет иметь вид

$$x = \frac{a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t}{w},$$

где w — некоторая постоянная. Здесь *нет* акустической частоты.

В детекторе зависимость тока от напряжения не следует закону Ома. (Вся радиотехника основана на проводниках, не подчиняющихся закону Ома, как в передающих устройствах, та в приемниках. Найдите новый проводник, не подчиняющийся кону Ома,и вы сможете сказать, что вы сделали открытие в рад технике). В детекторе

$$i = f(e),$$

где $f(e)$ — некоторая нелинейная функция (характеристика дет тора).

Существуют и механические системы, обладающие аналогичн свойством, например механическая система уха. Барабанная пе понка уха связана с тремя костями (молоточек, наковальня и стрем Они соединяются с лабиринтом. Смещение перепонки не проп циональна силе. Если на нее действует сила в одном направлен то смещение имеет другую величину, чем при силе такой же ве чины, действующей в противоположном направлении.

Будем говорить о кристаллическом детекторе. В нем испо зуются гален (свинцовый блеск), пирит и другие кристалл Электродвижущие силы одной и той же величины, но разно направления, создают в детекторе токи различной силы, иног даже различного *порядка* величины. (Теперь в качестве детекто употребляется катодная лампа. В ней в вакууме находятся р каленная нить и холодный анод. Такое устройство в одном н правлении пропускает ток, а в другом совсем не пропускает).

Примем определенный вид характеристики детектора. Мног явления можно охватить следующей простой характеристикой:

$$i = \alpha e + \beta e^2.$$

Пусть

$$e = \cos \omega t.$$

Если бы был верен закон Ома, то такая гармоническая эле тродвижущая сила создавала бы гармонический ток (средний т был бы равен нулю) и гальванометр постоянного тока ничего б не показал. Если же зависимость между i и e дается форм лой (7), то

$$i = \alpha \cos \omega t + \beta \cos^2 \omega t = \alpha \cos \omega t + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \cos 2\omega t,$$

т. е. ток имеет совсем другой вид, чем e. В нем присутству прежнее гармоническое колебание частоты ω, но, кроме тог имеется постоянная слагающая и гармоническое колебание дво ной частоты. Если наши аппараты не откликаются на частоту ω, то тем более они не будут откликаться на частоту 2ω: включив в цепь детектора телефон, мы ничего не услышим. Но если ток i протекает через аппарат, реагирующий на постоянный ток, например гальванометр, то мы получим отклонение. Поэтому говорят о *выпрямлении*. Взятая нами характеристика (7) несимметрична: для положительных значений e оба члена имеют один знак (если α и β положительны), для отрицательных — разные знаки. Все дело в этой несимметричной „податливости". В результате получается детектор (в смысле „обнаружитель") и выпрямитель.

Но гораздо более интересен вопрос о том, что происходит, если к детектору подводится сумма двух гармонических колебаний разного периода, т. е. электродвижущая сила вида (6). Тогда

$$i = \alpha(a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t) +$$
$$+ \beta(a_1^2 \cos^2 \omega_1 t + a_2^2 \cos^2 \omega_2 t + 2a_1 a_2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t). \tag{8}$$

Здесь все члены, кроме последнего, дают то, что мы уже знаем. Член с произведением косинусов дает нечто новое. Его можно представить в виде

$$\beta a_1 a_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2) t + \cos(\omega_1 + \omega_2) t].$$

Второе слагаемое имеет в нашем конкретном случае высокую частоту 200 500, но первое слагаемое имеет *низкую* частоту 500, равную разности частот подводимых колебаний. Это гармоническое колебание звуковой частоты, и мембрана телефона будет колебаться гармонически с частотой 500. Никаких биений в (8) нет, а есть *настоящее* гармоническое колебание с разностной частотой, *возникшее* благодаря детектору. Оно создается детектором из двух колебаний с высокими частотами.

Все, что было сказано, справедливо потому, что колебания мембраны телефона в приемнике очень малы. Как я сказал, ухо само обладает нелинейной характеристикой. Пусть на ухо действуют *сильные* звуки частоты 10 000 и 10 500. Тогда в ухе возникает колебание частоты 500, и мы слышим разностный тон. Но это опять не биения, а образование колебания разностной частоты, так как само ухо является детектором. При идеальной линейности характеристики уха мы не услышали бы тона частоты 500. К этому необходимо добавить, что для очень сильных звуков уже заметно нелинейны уравнения колебаний воздуха и разностные тоны могут возникнуть из-за того, что сам *воздух* является детектором.

Мы видим, насколько существенны детекторы. Детекторы — проводники, не подчиняющиеся закону Ома, — дают мощное средство исследования колебаний, переводя частоты из одной области значений в другую область.

Что будет, если взять детектор с другими свойствами, например с характеристикой, изображенной на рис. 8? Выпрямления уже не получится. Такой антисимметричный детектор $[i(-e) = -i(e)]$ создает колебания тройной частоты[1].

Коснемся коротко некоторых практических задач, возникающих в ряде случаев, когда мы имеем дело с колебаниями. Основные задачи таковы:

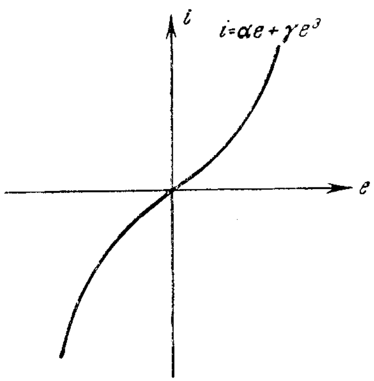

Рис. 8.

1. Приходят колебания, нужно их обнаружить (независимо от частоты и формы).

2. Нужно узнать, имеются ли колебания данной частоты.

3. Нужно узнать всю форму колебаний. Это иногда очень важно.

Для того, чтобы знать, как строить приборы для решения этих задач, нужно знать теорию колебаний, — то, о чем будет речь впереди.

Часто для изучения колебаний к колеблющемуся телу прикрепляется зеркальце. Отраженный от него пучок света можно развернуть путем вращения другого зеркала. Световой луч практически не имеет инерции; он следует за движением зеркальца. Но если попытаться изучить таким способом быстрые колебания воздуха, ничего хорошего не получится. Инерция зеркальца исказит форму колебания. Но существуют приспособления, позволяющие изучать колебание, почти не искажая его формы. Они основаны на использовании катодного пучка. Катушка с током отклоняет его, и светлая точка (конец пучка) чертит движение. Такой катодный осциллограф позволяет записать чрезвычайно быстрые изменения, происходящие, например, за одну десятимиллионную секунды. При этом точка смещается горизонтально на один миллиметр за одну десятимиллионную секунды. Для того, чтобы

---

[1] [С. М. Рытов. Журн. техн. физики, 2, 972, 1932.]

осуществить такую быструю развертку в механической системе, потребовались бы колоссальные силы.

Часто требуется определить разность частот двух колебаний. Например, одно колебание имеет частоту 500, частота другого неизвестна. Чтобы ее узнать, наблюдают число биений. Пусть, например, происходят два биения в секунду. Тогда второе колебание имеет частоту 502 или 498. Подумайте, как узнать, которую из них?

Есть очень изящный способ изучения периодических явлений — стробоскопический способ. Мы хотим определить, сколько оборотов в секунду совершает колесо. Будем освещать его короткими вспышками через диск с вырезами. Пусть, скажем, колесо делает 100 оборотов в секунду и число вспышек за секунду также равно 100. При этом вспышки будут освещать колесо только в такие моменты, когда начерченная на нем линия (рис. 9) находится в каком-нибудь определенном, например вертикальном, положении. Мы будем видеть колесо так, как будто оно стоит на месте. Если давать вспышки немного чаще, то будет казаться, что колесо медленно вращается в сторону, обратную его истинному движению. Если вспышки следуют одна за другой медленнее, чем 100 раз в секунду, то видимая картина будет медленно поворачиваться по ходу колеса. Таким способом можно искусственно замедлить весь процесс.

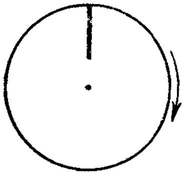
Рис. 9.

Таким же образом можно узнать, как светит источник света, например неоновая лампочка, — вспышками или непрерывно. Будем махать палкой. Если происходят вспышки, то они застают ее в определенных положениях, и мы видим ряд раздельных положений палки — веер.

Вернемся к опыту с вращением. Если вспышки следуют вдвое чаще, чем период вращения колеса, то они будут заставать его в двух различных положениях. Если вращать разноцветный диск, то цвета сливаются. Но при стробоскопическом освещении они восстанавливаются.

Применение стробоскопических методов имеет существенное значение для определения динамических деформаций частей машин.