ШЕСТАЯ ЛЕКЦИЯ

(24/X 1930 г.)[1]

Теория колебаний маятника, данная Галилеем. Теория колебаний маятника, основанная на законе сохранения энергии. Роль маятника в истории физики. Гармонические колебания механических систем, в которых сила определяется упругими деформациями. Колебания в контуре, обладающем емкостью и индуктивностью. Общие замечания о колебаниях около устойчивого положения равновесия. Кажущееся однообразие электрических колебательных систем.

Мы приступаем теперь к рассмотрению систем, совершающих гармонические колебания. Применив к некоторым физическим системам основные законы механики или электричества, мы обнаружим, что в силу этих законов рассматриваемые системы совершают гармонические колебания.

Начнем с наиболее простых систем. Но прежде всего, что значит „простая" система? Если мы возьмем абсолютно жесткий маятник, то для того, чтобы вполне определить его положение нужно знать *одну* величину. Такие системы называются системами с одной степенью свободы (заметим, что если можно определить положение системы заданием одной величины, то его можно определить также заданием какой-нибудь функции от этой величины).

Но такое рассмотрение всегда является идеализацией. В природе не существует систем с одной степенью свободы. Жестких тел не существует. Чтобы полностью определить положение тела следовало бы, строго говоря, задать положения всех его молекул. Но и этого может быть недостаточно (вспомним о волновой механике). В наших рассуждениях нам часто приходится отступать от строгости. Если бы науку с самого начала развивали такие строгие и тонкие умы, какими обладают некоторые современные математики, которых я очень уважаю, то сложность не позволяла бы двигаться вперед.

Итак, будем говорить об одной степени свободы.

Как движется маятник? Что значит ответить на этот вопрос? Речь может идти о двух вещах:

1) о практическом, экспериментальном изучении;

2) о теоретическом изучении на основании общих, уже установленных закономерностей.

---

[1] [Точные даты предшествующих лекций не установлены.]

Мы выберем второй путь и будем опираться при этом на закон сохранения энергии, который содержит высказывания очень общего характера. Нужно, однако, иметь в виду, что такой ход идей — от закона сохранения энергии „вниз" к маятнику — нарушает историческую перспективу. Как раз на маятнике был найден механический закон сохранения энергии. Его высказал в связи с маятником Гюйгенс.

Я кратко изложу развитие теории маятника.

Уже до Галилея было найдено, что период маятника при малых амплитудах не зависит от амплитуды (изохронизм малых качаний). Этот закон снова открыл Галилей. Для нас несущественно, рассматривается ли маятник как материальная точка, но в свое время это было существенно. Галилей уже знал, что в случае, когда маятник можно рассматривать как материальную точку, период τ пропорционален $\sqrt{l}$ (l — длина маятника).

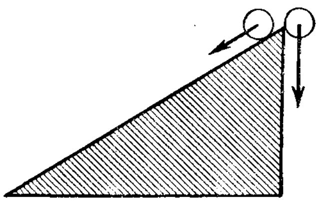

Рис. 10.

Путь, которым шел основатель динамики Галилей, можно восстановить из его „Диалогов". Будем идти примерно (но не совсем) по стопам Галилея.

Галилей изучал движение точки по наклонной плоскости. При этом он не пользовался маятником, а измерял время по истечению воды из сосуда и количество вытекшей воды считал пропорциональным времени. Галилей установил, что ускорения при движении по гипотенузе (рис. 10) и при свободном падении относятся друг к другу, как вертикальный катет к гипотенузе. Отсюда следует, что шарик, пущенный из верхней точки A окружности по секущей (рис. 11), придет на окружность через время, не зависящее от выбора секущей. Отсюда следует также, что шарик, пущенный с окружности по секущей, идущей в нижнюю точку B (рис. 12), приходит в нее через время, не зависящее от выбора секущей. Галилей исходил из этого и рассуждал так: при малых качаниях маятника дугу можно заменить хордой, и маятник движется по хорде, как по наклонной плоскости. Тогда, если t — время падения через весь вертикальный диаметр (рис. 13), то

$$2l = \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Период τ малого колебания равен, следовательно, учетверенному времени падения по хорде:

$$\tau = 8\sqrt{\frac{l}{g}},$$

независимо от того, откуда пущен маятник.

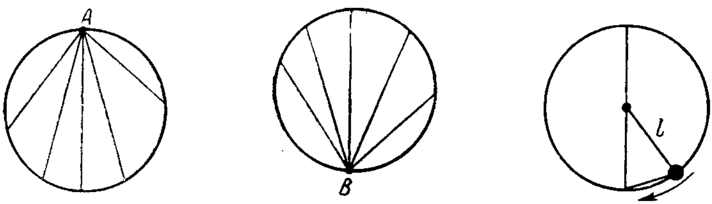

Рис. 11. Рис. 12. Рис. 13.

Из этого рассуждения получается, что малые колебания обладают свойством изохронизма. Из него получается также, что период пропорционален $\sqrt{l}$, но *не* получается правильного значения коэффициента пропорциональности: он равен в действительности 2π, а не 8.

Мы видим, сколь опасно сделанное упрощение: как бы ни была мала дуга, важна кривизна пути. Нельзя переменный наклон

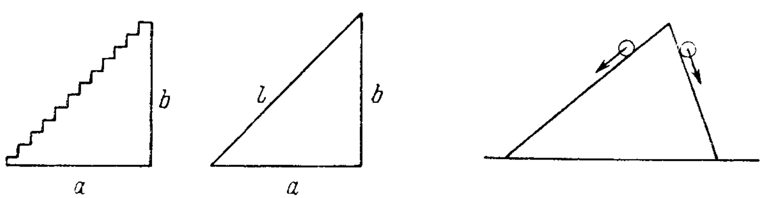

Рис. 14. Рис. 15.

заменять средним наклоном. Вот аналогичный пример: замена прямой ломаною (рис. 14) в пределе правильно дает площадь, но не длину; длина получается равной $a+b$, а не l.

У Галилея уже есть намек на закон сохранения энергии. Галилей пользовался предположением, что если материальные точки движутся по двум наклонным плоскостям (рис. 15), то на одном и том же горизонтальном уровне их скорости всегда одинаковы.

Задача о физическом маятнике (рис. 16) занимала почти всех выдающихся математиков того времени. При решении этой задачи Гюйгенс пришел к одной из первых формулировок закона сохранения энергии в механике[1]. Исследование Гюйгенса намного переросло частную задачу о маятнике. Современная трактовка задачи на основе закона сохранения энергии такова.

Кинетическая энергия физического маятника есть

$$T=\sum\frac{mv^2}{2}.$$

Здесь m — массы материальных точек; v — их скорости (вместо суммы можно написать интеграл). Далее

$$v=r\dot{\varphi}$$

и

$$T=\sum\frac{mr^2}{2}\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

(I — момент инерции).

Потенциальная энергия есть

$$U=Pl(1-\cos\varphi).$$

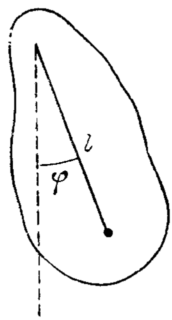

Рис. 16.

На основании закона сохранения энергии

$$T+U=\frac{I}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+Pl(1-\cos\varphi)=C'^2, \tag{1}$$

где C'^2 — постоянная. Это — дифференциальное уравнение движения маятника. Оно нелинейно. Ограничимся случаем, когда φ настолько мало, что можно пользоваться приближением

$$\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}.$$

Тогда вместо (1) можно написать приближенно:

$$\frac{I}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\frac{Pl}{2}\varphi^2=C'^2.$$

Обозначив

$$\frac{2C'^2}{Pl}=C^2,$$

[1] [Х. Гюйгенс. Три мемуара по механике. Изд-во АН СССР, 1951.]

получаем:

$$\frac{I}{Pl}\dot{\varphi}^2+\varphi^2=C^2,$$

откуда

$$\varphi=C\cos(\omega t+\psi),$$

где

$$\omega=\sqrt{\frac{Pl}{I}}.$$

Для математического маятника массы m и длины l

$$I=l^2m,\quad P=mg,\quad \tau=2\pi\sqrt{l/g}.$$

Период совершенно определенным образом зависит от параметров системы. Он не зависит от начальных условий. Но фаза ψ и амплитуда C произвольны. Это величины, определяемые не системой, а данными опыта, так называемыми начальными условиями.

Какие предположения были нами сделаны?

1. Предположение о том, что других видов энергии, кроме записанных в (1), здесь не существует. Это значит в частности, что мы пренебрегаем трением.

2. Предположение о том, что маятник совершает *малые* колебания. При этом кинетическая энергия равна постоянной, умноженной на $\dot{\varphi}^2$, а потенциальная энергия — постоянной, умноженной на φ^2.

Возьмем какую угодно систему, кинетическая и потенциальная энергии которой имеют именно такой вид: постоянная $\times\dot{\varphi}^2$ и постоянная $\times\varphi^2$ (φ — координата системы). Такая система будет совершать синусоидальные колебания. Это математически следует из вида выражения для энергии, и мы с этим встретимся в ряде других примеров.

Но, решая уравнение (1), мы допустили некоторую неточность. Дело в том, что уравнение (1) имеет еще одно решение, а именно $\varphi=\text{const}$. Из закона сохранения энергии нельзя вывести, что если отклонить маятник и затем отпустить его, то он не будет оставаться в покое в отклоненном положении. Существование дополнительного решения $\varphi=\text{const}$ — недостаток этого способа рассмотрения. Второй закон Ньютона дает более определенный ответ: на тело действует сила, отличная от нуля; следовательно, тело имеет ускорение и φ не может быть постоянным. Закон сохранения энергии дает ответ на вопрос о том, *как* движется маятник, если *известно*, что он не остается в покое. Для систем с несколькими степенями свободы закон сохранения энергии не может дать и этого.

В неизданных при жизни рукописях Галилея содержится предложение использовать маятник в качестве регулятора хода часов.

Маятник сыграл чрезвычайно большую роль в истории физики. Как известно, он может служить для определения ускорения тяжести g — одной из самых важных „естественных" величин.

Рише в 1774 г. провел сравнение значений g в Париже и Кайенне. Эти значения получились различными, что объясняется вращением и формой Земли.

С помощью качаний маятника g может быть измерено до седьмого знака. Для этого пользуются так называемым оборотным маятником, причем приходится вносить поправки на трение и на архимедову подъемную силу.

Бессель использовал маятник для того, чтобы с большой точностью проверить пропорциональность инертной и тяжелой массы. Уже Ньютон отлично знал, что закон качания маятника (независимость периода от массы) справедлив лишь в том случае, если тяжелая масса пропорциональна инертной. С доступной ему точностью он показал на опыте, что эти величины пропорциональны одна другой. Бессель доказал это с гораздо большей точностью — до 1/60 000. Он исследовал вещество метеоритов, воду и другие материалы.

Впоследствии Этвеш подтвердил, что все тела имеют одно и то же g, с точностью $5 \cdot 10^{-8}$ (но не с помощью маятника). Эйнштейн возвел это в постулат общей теории относительности.

Пусть мы находимся в лифте. Все тела в нем давят вследствие притяжения Земли. Представим себе, что притяжение отсутствует, тогда давления нет. Но пусть лифт движется ускоренно вверх. Тогда, согласно постулату Эйнштейна, тела давят точно так же, как и в том случае, когда действует притяжение Земли. Если бы g для различных тел было различным, этого не могло бы быть.

Явление, которое исследовали Ньютон и Бессель с помощью маятника, привело к общей теории относительности.

Громадная точность, с которой измеряется период качания маятника, достигается методом совпадений. Пустим маятник вместе с часами. Мало-помалу они разойдутся. Пусть, например, маятник часов имеет период 1 секунду и 1000 колебаний часов совпадают с 1001 колебаниями маятника. Тогда мы знаем, что за 1001 колебание маятника прошло 1000 секунд, и отсюда находим период маятника.

Типичными механическими системами, совершающими гармонические колебания, являются такие, в которых силы определяются упругими деформациями.

Если для балки (рис. 17) справедлив закон Гука, то сила пропорциональна прогибу:

$$h = \alpha P$$

(h — прогиб; P — вес груза; α — постоянная).

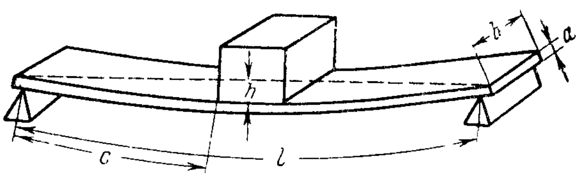

Рис. 17.

Если действует сила, пропорциональная смещению из положения равновесия:

$$F = -kx,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Если на тело, которое может вращаться около оси, действует момент сил, пропорциональный угловому смещению:

$$M = -K\varphi,$$

то потенциальная энергия будет

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}.$$

В нашем случае (рис. 17) потенциальная энергия

$$U = \frac{kh^2}{2} - Ph$$

(второй член появился вследствие того, что на груз действует еще сила тяжести). Пренебрежем кинетической энергией балки. Кинетическая энергия груза равна

$$T=\frac{M\dot{h}^2}{2},$$

и, следовательно, полная энергия системы будет

$$E=T+U=\frac{M\dot{h}^2}{2}+\frac{kh^2}{2}-Ph.$$

Легко привести это выражение к прежнему виду (сумма квадратов) заменой

$$x=h-\frac{P}{k},$$

откуда

$$\dot{x}=\dot{h}.$$

Тогда

$$E=\frac{M\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}-\frac{P^2}{2k}.$$

Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{M\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=C'^2,$$

и, следовательно,

$$x=C\cos(\omega t+\psi),$$

причем частота

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}.$$

Здесь также период строго определен, если определена сама рассматриваемая система.

В технике нас интересует, как k связано с константами балки. Теория упругости дает:

$$k=\frac{la^3bE}{4c^2(l-c)^2},$$

где E — модуль Юнга материала балки, а a, b, c и l — геометрические параметры, указанные на рис. 17. Таким образом, если балка дана, то, подставив числа, можно рассчитать частоту колебаний.

Рассмотрим еще случай кручения. Пусть имеется (рис. 18) стержень круглого сечения с диском на конце. Здесь

$$U = \frac{K\varphi^2}{2}, \qquad T = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Уравнение колебаний есть

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{K\varphi^2}{2} = C'^2,$$

так что здесь опять получается гармоническое колебание. Частота его равна

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}.$$

Согласно теории упругости

$$K = \frac{G\pi r^4}{2l},$$

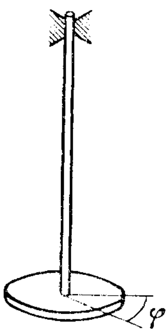

Рис. 18.

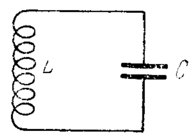

Рис. 19.

где G — модуль сдвига материала стержня, r — радиус его сечения, l — его длина. В случае спиральной пружины K тоже имеет очень простое выражение.

Во всех случаях, когда действуют упругие силы, подчиняющиеся закону Гука, имеют место изохронные гармонические колебания, т. е. колебания с периодом, зависящим только от системы, но не от начальных условий.

Возьмем теперь электрическую систему, состоящую из емкости C и индуктивности L (рис. 19). Электрическая энергия есть

$$W_e = \frac{Q^2}{2C},$$

где Q — заряд конденсатора, а магнитная энергия

$$W_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\dot{Q}^2}{2},$$

где $i = \dot{Q}$ — сила тока. Если отвлечься от сопротивления, как мы это делали раньше, то закон сохранения энергии дает:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = C'^2.$$

Таким образом, здесь тоже происходят гармонические колебания с периодом

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Это — знаменитая формула Томсона.

Математическое условие гармоничности колебаний может быть сформулировано так: потенциальная энергия должна быть положительна и должна квадратично зависеть от координаты (кинетическая энергия всегда положительна и квадратична по скорости).

Положительность потенциальной энергии — достаточное условие устойчивости равновесия. В общем случае

$$U = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{2}$$

В положении устойчивого равновесия U имеет минимум: если немного вывести систему из состояния устойчивого равновесия, она не может в этом случае далеко уйти, так как сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, причем обе эти величины положительны. Совсем иначе обстоит дело, если U имеет максимум. По мере роста x кинетическая энергия увеличивается и система все более удаляется от состояния равновесия.

Можно поместить начало координат в положение равновесия. Если $x = 0$ является устойчивым положением равновесия, то, как сказано, в этом положении U имеет минимум, для чего необходимо

$$a_1 = 0, \quad a_2 > 0.$$

Если система выведена из состояния устойчивого равновесия, то при малых отклонениях, когда можно пренебречь высшими членами разложения (2), она совершает гармонические колебания.

Все разобранные нами примеры являются частными случаями таких колебаний около устойчивого положения равновесия.

Эти примеры могут создать впечатление, что механические колебательные системы очень разнообразны, а электрические — крайне однообразны: в них всегда „одно и то же“—конденсатор и катушка самоиндукции. Это—*кажущееся* однообразие. Различие между плоским и цилиндрическим конденсатором — такое же, как между балкой и закрученным стержнем. Коэффициент k в механике обычно раскрывается, а в электрических колебаниях нашли удобным раз навсегда назвать параметр, аналогичный $1/k$, емкостью. Разнообразие электрических систем скрыто в том, как выражаются C и L через параметры, характеризующие геометрическую конфигурацию конденсатора и катушки.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/X 1930 г.)

Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Бореля. „Неестественные" начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллатору и к маятнику.

Зависимость периода гармонических колебаний от параметров системы играет важную роль во многих технических и физических измерениях, например: в определении моментов инерции тел, в измерении магнитных полей. Если известен момент инерции магнита, то из результатов исследования его колебаний в магнитном поле можно найти в отдельности произведение магнитного момента на поле и отношение магнитного момента к полю и вычислить по этим данным магнитное поле. Этим способом Гаусс определял напряжение магнитного поля Земли.

Вопросы, относящиеся к периоду колебаний, играют важную роль в машиностроении. Часто случается, что центр тяжести вращающейся массы машины немного смещен по отношению к оси вращения. При вращении развивается центробежная сила, периодически действующая на ось. Когда период вращения совпадает с периодом собственных колебаний системы, состоящей из машины и фундамента, на котором она укреплена, то развиваются опасные явления: колебания усиливаются. Это явление носит название резонанса.