между плоским и цилиндрическим конденсатором — такое же, как между балкой и закрученным стержнем. Коэффициент k в механике обычно раскрывается, а в электрических колебаниях нашли удобным раз навсегда назвать параметр, аналогичный $1/k$, емкостью. Разнообразие электрических систем скрыто в том, как выражаются C и L через параметры, характеризующие геометрическую конфигурацию конденсатора и катушки.

СЕДЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(27/X 1930 г.)

Примеры механических колебательных систем. Вал с двумя дисками и его электрическая модель. Осторожность, необходимая при идеализациях. Пример Бореля. „Неестественные" начальные условия в случае груза, висящего на пружине. Электрическая аналогия этого случая. Качественное исследование движений нелинейной консервативной системы с одной степенью свободы с помощью интеграла энергии: неограниченное одностороннее движение, либрационное движение, лимитационное движение. Применение общей теории к гармоническому осциллятору и к маятнику.

Зависимость периода гармонических колебаний от параметров системы играет важную роль во многих технических и физических измерениях, например: в определении моментов инерции тел, в измерении магнитных полей. Если известен момент инерции магнита, то из результатов исследования его колебаний в магнитном поле можно найти в отдельности произведение магнитного момента на поле и отношение магнитного момента к полю и вычислить по этим данным магнитное поле. Этим способом Гаусс определял напряжение магнитного поля Земли.

Вопросы, относящиеся к периоду колебаний, играют важную роль в машиностроении. Часто случается, что центр тяжести вращающейся массы машины немного смещен по отношению к оси вращения. При вращении развивается центробежная сила, периодически действующая на ось. Когда период вращения совпадает с периодом собственных колебаний системы, состоящей из машины и фундамента, на котором она укреплена, то развиваются опасные явления: колебания усиливаются. Это явление носит название резонанса.

Можно множить до бесконечности примеры систем, совершающих гармонические колебания. Остановимся на одном из них. Представим себе, что в Земле просверлен канал, проходящий через ее центр, и что в этом канале находится тяжелое тело. Легко доказать, что действующая на него сила пропорциональна расстоянию от центра Земли. Это соответствует гармоническому колебанию; его период — около 42 минут. Конечно, это шутка, но вы знаете, что Дж. Дж. Томсон положил подобную модель в основу своей теории атома. Согласно этой модели атом — шар, равномерно заряженный по всему объему положительным электричеством, внутри которого колеблются отрицательные заряды — электроны. Известно теперь, что эта модель глубоко, принципиально неправильна, но в свое время она сыграла большую роль.

Рассмотрим еще один пример, на котором мы убедимся, как мне кажется, в пользе рассмотрения колебательных вопросов с общей точки зрения. Попутно я хотел бы спросить, что для вас нагляднее: механические или электрические схемы? Кельвин говорил: „Я могу сказать, что я понял явление, если я могу составить для него механическую модель". Многие современные физики сказали бы обратное: „Я понимаю механическое явление, если я создал для него электрическую модель".

Представим себе два диска, соединенные стержнем (как сказал бы физик) или валом (как сказал бы техник). Эта система имеет две степени свободы: во-первых, диски могут вращаться вместе, как твердое тело; во-вторых, они могут поворачиваться друг относительно друга и закручивать стержень. Рассчитаем движение такой системы. Ее кинетическая энергия

$$T = \frac{I_1\dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2\dot{\varphi}_2^2}{2},$$

где I_1, I_2 — моменты инерции дисков; φ_1, φ_2 — их углы поворота. Потенциальная энергия U зависит только от разности $\varphi_1 - \varphi_2$:

$$U = \frac{k(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{2},$$

причем коэффициент k характеризует упругость стержня при кручении.

Представим себе, что мы скрутили систему и пустили ее. Тогда движение будет совершаться под действием одних только внутренних сил. При этом справедлив закон моментов количества движения:

$$I_1\dot{\varphi}_1 + I_2\dot{\varphi}_2 = \text{const}.$$

Если в начальный момент система была в покое, то $\text{const} = 0$ и

$$I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = \text{const}'.$$

Если теперь мы условимся отсчитывать углы так, чтобы для $t = 0$ было

$$I_1\varphi_1 + I_2\varphi_2 = 0, \tag{1}$$

то это уравнение будет оставаться верным для произвольного t. Уравнение (1) — это простое алгебраическое уравнение. Мы как будто получили систему с одной степенью свободы. Нас интересует, каков период ее собственных колебаний. Но мы не будем его вычислять, а рассмотрим вместо этого аналогичный электрический пример (рис. 20).

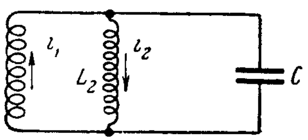

Рис. 20.

Введем обозначения:

$$Q_1 = \int_0^t i_1 dt, \quad Q_2 = \int_0^t i_2 dt$$

(Q_1 и Q_2 — заряды). Потенциальной энергией здесь является электростатическая энергия

$$U = \frac{(Q_1 - Q_2)^2}{2C}.$$

Кинетической энергией здесь является магнитная энергия

$$T = \frac{L_1\dot{Q}_1^2}{2} + \frac{L_2\dot{Q}_2^2}{2}.$$

Кроме того, если взять обход, показанный стрелками, то по обобщенному закону Кирхгофа имеем:

$$L_1\dot{Q}_1 + L_2\dot{Q}_2 = 0.$$

Сравните наши две задачи: они совершенно аналогичны. Те, кто занимается электрическими схемами, сразу дадут ответ на вторую задачу. Две параллельно соединенные индуктивности эквивалентны одной индуктивности:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}.$$

Отсюда видно, что в механическом примере мы можем рассуждать так, как будто у нас одна степень свободы, но момент инерции есть

$$I = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

Следовательно, период колебаний механической системы равен

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}}.$$

Для меня механический пример не был *сразу* ясен. Я бы не смог сразу, не рассуждая, заменить два диска *одним* диском с подходящим моментом инерции. Между тем электрическая модель для меня совершенно очевидна. Вероятно, для тех, кто много занимается пропеллерами, дело обстоит как раз наоборот.

Еще одно замечание: чему в электрической системе соответствует вращение всей механической системы как целого? Ему соответствует постоянный ток в цепи из индуктивностей. Если он есть, то он будет продолжать течь неопределенно долго (в случае отсутствия сопротивления). Здесь видно, что теория колебаний систем с одной степенью свободы охватывает более широкий класс явлений, чем это могло показаться с первого взгляда.

Перейдем к другому вопросу. Очень часто, когда делают выводы из той или иной теории, забывают, что допущена определенная идеализация и впадают при этом в большие ошибки. Вернемся к тем предпосылкам, из которых мы исходили, когда рассматривали маятник с одной степенью свободы. Мы считали, что стержень не имеет массы. В сущности, этим мы откинули все явления, связанные с тем, что стержень может колебаться, как распределенная система. Казалось бы, естественно представить себе, что стержень становится все более и более жестким, но здесь нельзя перейти к пределу. Современная физика считает, что принципиально не существует абсолютно жестких тел. Я приведу доказательство этого утверждения, данное Лауэ. Предположим, что у нас имеется очень длинный стержень (рис. 21) и пусть он абсолютно жесткий. Если мы передвинем конец A стержня, то в то же мгновение должен передвинуться и конец B. Теория относительности утверждает, что это невозможно: она принимает в качестве постулата, что скорость сигнала может быть только меньше или равна скорости света. Выход из противоречия в том, что благодаря сжимаемости стержня движение передается по нему не мгновенно.

Разберем другое сделанное нами предположение. Допустим, что мы можем ограничиться рассмотрением одной степени свободы. Вообще говоря, закон Гука не имеет места. Пользуясь, как мы это делали, законом Гука, мы ограничились первым членом разложения силы, как функции смещения, в степенной ряд. Можно ли отбрасывать остальные члены? Это очень важный

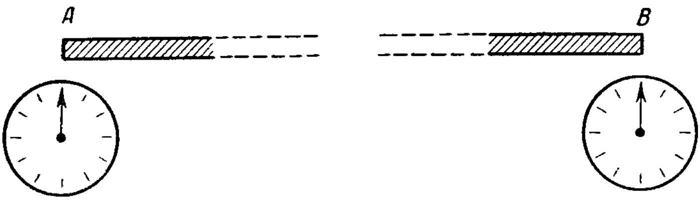

Рис. 21.

и тонкий вопрос. Существует ли непрерывная зависимость между параметрами, входящими в дифференциальное уравнение, и его решениями? Я не знаю, рассмотрен ли этот вопрос где-нибудь как следует (кое-что сказано в книге Куранта и Гильберта[1]). Между тем без такого рассмотрения никакая математическая теория не может претендовать на физическую значимость.

Борель приводит пример, где сколь угодно малое специальное изменение дифференциального уравнения ведет к коренному изменению характера решений. Надо надеяться, что тот класс уравнений, с которым мы имеем дело, не допускает подобных вещей. Пример Бореля связан как раз с гармоническими колебаниями. Напишем уравнение

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const}.$$

Его решениями являются синусоидальные функции, имеющие периодический или, говоря более обще, осцилляторный (колебательный) характер. (Здесь характерно чередование: максимум, нуль, минимум и т. д.)

---

[1] [Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики. (М.—Л., 1951).]

Изменим уравнение следующим образом:

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \mathrm{const} + \lambda t, \tag{2}$$

причем константа λ положительна и как угодно мала. Добавление члена λt *качественно* изменяет характер решений: уравнение (2) не допускает колебательного решения. Действительно, в силу (2)

$$(m\ddot{x} + kx)\,\dot{x} = \lambda,$$

что исключает (так как $\lambda > 0$) возможность равенства $\dot{x} = 0$. Поэтому x не может иметь максимума или минимума, решение не может быть осцилляторным. Если бы мы получили уравнение (2) и откинули бы член с λ ввиду его малости, то, даже интересуясь только изменением x на протяжении конечного времени, мы получили бы в корне неправильный ответ.

К счастью, в тех случаях, с которыми мы оперируем, дело обстоит, повидимому, благополучно. Однако вы видите, насколько нужно быть осторожным: приходится предполагать, что мы такого рода отбрасывания делаем удачно.

Вернемся к физике. Обычно говорят: в случае груза, висящего на пружине, можно считать, что система имеет одну степень свободы, если масса пружины мала по сравнению с массой груза. По существу это в конечном счете верно. Смысл того, что я скажу — не в том, что обычное утверждение ошибочно, а в том, что оно не разъясняет сущности дела. Ведь при выводе уравнения движения рассматриваемой системы предположение о малости массы пружины нигде не входит. При выводе уравнения движения пользуются вторым законом Ньютона:

$$m\ddot{x} = f, \tag{3}$$

справедливым независимо от величины массы m. Предполагается далее, что

$$f = -kx.$$

При этом ни слова не говорится о том, что масса пружины мала. Но известно, что если пружина имеет очень большую массу, то уравнение (3) неверно. В чем же дело?

Мы сделали предположение, что если нижний конец пружины сдвинется на x, то разовьется сила $-kx$. Это, вообще говоря, *неверно*. Эта гипотеза верна только в статическом случае, если пружина растягивается достаточно медленно. В общем случае пружина в разных своих частях сжата или растянута по-разному; при этом ее удлинение не пропорционально силе.

Итак, существенно предположение, что пружина деформируется *статически* или, точнее, квазистатически. Как это связано с величиной ее массы? Строгий анализ показывает, что пружина сама может колебаться, как распределенная система. При этом пружина уже не ведет себя квазистатически. Но если масса пружины мала, то мы имеем право не считаться с этими колебаниями, потому что они тогда очень быстрые и весьма быстро затухают. Они изменяют картину только в „первый момент", пока они еще не затухли. Но иногда уже „первый момент" чрезвычайно существенен. Я приведу два примера.

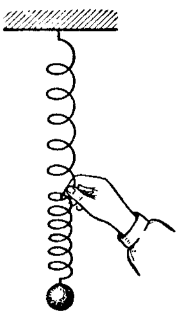

Рис. 22.

Допустим, что мы оттягиваем пружину за середину (рис. 22) и отпускаем (аналогично можно поступить с зарядом на конденсаторе). Если начальные условия — „естественные" для одной степени свободы (т. е. в начальный момент пружина деформирована однородно), то быстрые колебания не возникают. Но в данном случае в первый момент пружина начнет быстро колебаться, и эти быстрые колебания могут поглотить очень много энергии. Потенциальная энергия равняется в начальный момент

$$\frac{k'x^2}{2},$$

где k' — сила, нужная для того, чтобы оттянуть пружину на 1 см в месте захвата. Если это место — середина пружины, то $k'=2k$, где k — жесткость при растяжении за конец пружины. Таким образом, сила при том же самом удлинении вдвое больше, если точка ее приложения находится в середине пружины. Итак, потенциальная энергия равна в начальный момент

$$\frac{(2k)\,x^2}{2}.$$

Когда натяжение в пружине перераспределяется, смещение груза останется равным x, так как груз не успеет заметно сдвинуться. Поэтому после перераспределения потенциальная энергия будет равна $kx^2/2$. Отсюда видно, что *половина* начальной энергии уходит на быстрые колебания. Дальнейший процесс идет с половинной энергией.

Второй пример — электрический аналог первого. Сперва заряжается одна пара пластин (рис. 23), затем проскакивает искра и возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов (колебания эти быстрые из-за того, что соединительные провода очень коротки). Вследствие этих колебаний происходит перераспределение зарядов между пластинами. После того, как произошло это перераспределение, два конденсатора можно рассматривать как один. Но в первый момент этого делать нельзя, так как имеет место „неестественное" начальное условие. Вместе с перераспределением зарядов происходит перераспределение энергии. Часть энергии идет при этом на теплоту, выделяющуюся при быстрых колебаниях.

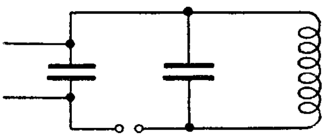

Рис. 23.

Если забыть об особенностях начальных условий, то будет сделана ошибка в энергии. Эта ошибка может быть очень велика (может превратиться в тепло любая доля энергии), в зависимости от точки приложения силы (в случае пружины) или от соотношения емкостей (в случае конденсаторов). Итак, не нужно забывать, что могут быть такие начальные условия, при которых обычная идеализация не является справедливой.

Рассмотрим теперь системы с одной степенью свободы в более общем случае, когда емкость и индуктивность зависят от величин электрического и магнитного поля. Так будет в случае катушки с железом и конденсатора с сегнетовой солью. Поведение таких систем при больших амплитудах описывается *нелинейными* дифференциальными уравнениями. Написать эти уравнения легко, но они мало изучены. Здесь можно пойти в таком направлении: можно стараться представить себе на основании самого дифференциального уравнения, не решая его, всю качественную картину движений. Особенно важен и плодотворен этот подход в теории так называемых автоколебательных систем. Этими вопросами мы будем в свое время заниматься[1].

[1] [См. 13-ую и 14-ую лекции.]

Постараемся, применяя эти методы, выяснить картину движения, не ограничиваясь специальным случаем линейности. Пусть уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x}=f(x),$$

где $f(x)$ — однозначная функция x. Умножив уравнение на dx/dt и проинтегрировав, мы получим, обозначив

$$F'(x)=-f(x),$$

первый интеграл:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+F(x)=W$$

(W — постоянная). $F(x)$ называется потенциальной энергией. Это уравнение выражает закон сохранения энергии (мы имеем дело с консервативной системой).

Пусть для простоты $m=2$. Тогда, обозначив

$$W-F(x)=\Phi(x),$$

имеем:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\Phi(x)}. \tag{4}$$

Двузначность квадратного корня имеет огромное значение для поведения системы. С ней связана возможность периодических (и вообще колебательных) решений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\psi(x),$$

где $\psi(x)$ — однозначная функция от x. Такое уравнение не допускает периодического решения (оно соответствует телу без массы, движущемуся в вязкой жидкости). Физически ясно, что здесь не может быть периодического движения: при периодическом движении тело должно поочередно проходить одно и то же положение, двигаясь в одну, затем в другую сторону, т. е. при одном и том же x скорость должна иметь то один, то другой знак. Но здесь, при данном x, скорость dx/dt имеет вполне определенное значение, и, следовательно, это невозможно. В случае же консервативной системы, из-за наличия двух знаков, это не запрещается.

Заметим, что $\Phi(x)\geqslant 0$ (мнимые скорости не рассматриваются).

Рассмотрим ряд случаев.

1. Пусть на всем рассматриваемом интервале значений x функция $\Phi(x)$ не имеет корней, т. е. не обращается в нуль. Так обстоит дело, например, тогда, когда точку отталкивает сила, пропорциональная расстоянию.

Перепишем дифференциальное уравнение (4) в виде

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

откуда

$$t + C = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}.$$

Предположим, что мы пускаем часы ($t=0$) в тот момент, когда $x=x_0$ (мы вводим специальный отсчет времени). Тогда $C=0$.

С увеличением x здесь t монотонно растет. Скорость направлена всегда в одну сторону. Мы еще не нашли x, как функцию от t, т. е. $x=x(t)$. Однако мы уже знаем, что t — монотонная функция от x. Следовательно, ее можно однозначно обернуть. Таким образом, мы решили качественную задачу. Мы знаем, что тело все время движется в одном и том же направлении. Может случиться, что x обращается в бесконечность при конечном значении t, т. е. тело за конечное время уходит в бесконечность. Но нормальный случай — тот, когда точка уходит в бесконечность за бесконечное время.

2. Пусть функция $\Phi(x)$ имеем два корня:

$$\Phi(x_1)=0, \quad \Phi(x_2)=0,$$

и пусть начальное значение $x=x_0$ заключено между этими корнями:

$$x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2.$$

Тогда

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}},$$

причем

$$\Phi(x) = (x_2 - x)(x - x_1)\Psi(x)$$

и $\Psi(x)$ в интервале $x_1 < x < x_2$ не обращается в нуль. Так как $\Phi(x) \geqslant 0$, то в интервале $x_1 < x < x_2$ имеем $\Psi(x) > 0$; значения $\Psi(x_1)$ и $\Psi(x_2)$ могут равняться нулю. Если $\Psi(x_1)$ равно нулю, то x_1 — кратный корень функции $\Phi(x)$. Аналогично обстоит дело с $\Psi(x_2)$. В общем случае можно написать:

$$\Phi(x) = (x_2 - x)^m (x - x_1)^n \Psi(x),$$

где m и n — целые числа, указывающие кратность корней x_2 и x_1, а $\Psi(x) \neq 0$ на сегменте $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Заметим еще, что если корень — двойной, то в нем не только $\Phi(x)$, но и $\Phi'(x)$ обращается в нуль.

Рассмотрим случай простых корней.

Пусть сначала dx/dt — положительная величина. Точка движется в сторону возрастающих x. При $x = x_2$ она имеет скорость нуль. Достигает ли она положения $x = x_2$ за конечное или за бесконечное время? Оказывается, что если корень $x = x_2$ — простой, то она достигает положения $x = x_2$ за конечное время.

Это следует из известной теоремы, согласно которой при $f(b) = \infty$ интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

конечен, если в окрестности точки b

$$|(b - x)^p f(x)| < C,$$

причем $p < 1$; в нашем случае простого корня это неравенство выполняется при $p = 1/2$. Оказывается далее, что если корень $x = x_2$ — кратный, то положение $x = x_2$ достигается за бесконечное время. Мы имеем дело в последнем случае с *асимптотическим* движением: точка асимптотически приближается к положению $x = x_2$.

Различный характер движения в случае простого и кратного корня поясняет следующий простой пример.

Пусть

$$\Phi(x) = (a - x)^2$$

($x = a$ — двукратный корень). Здесь интеграл

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \int_0^a \frac{dx}{a - x}$$

логарифмически обращается в бесконечность. Пусть теперь

$$\Phi(x) = a - x$$

($x=a$ — простой корень). Тогда интеграл

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}} = \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}}$$

конечен.

Если $dx/dt<0$ и происходит движение в обратную сторону, то можно высказать аналогичные утверждения.

Пусть корни $x=x_1$ и $x=x_2$—простые. Точка достигает положения $x=x_2$ за конечное время. Что произойдет в точке $x=x_2$? Скорость здесь равна нулю. Найдем ускорение:

$$f(x)=-F'(x)=\Phi'(x).$$

Но в случае простого корня

$$\Phi(x)=(x_2-x)\Psi(x),$$

где $\Psi(x_2)>0$ и, следовательно,

$$f(x_2)=\Phi'(x_2)=-\Psi(x_2)<0.$$

Таким образом, ускорение в положении $x=x_2$ отрицательно, а значит, по достижении положения $x=x_2$ возникает движение в обратном направлении. Материальная точка пробегает затем все положения со скоростью, совпадающей с прежней по абсолютной величине, но с обратным знаком. Легко видеть, что движение при этом *периодическое.*

Итак, мы получили следующий замечательный результат. Если $\Phi(x)$ не имеет корня, то движение непременно присходит в одном направлении. Если имеется два корня и оба—простые, то получается периодическое (либрационное) движение. Если хотя бы один из корней двойной, то получится асимптотическое (лимитационное) движение.

В случае либрационного движения для периода τ имеем, очевидно, выражение

$$\tau=2\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\Phi(x)}}\,.$$

Мы приобрели большие знания путем простого исследования уравнения (4).

Применим теперь полученные общие результаты к линейному осциллатору и к маятнику.

В случае линейного осциллатора

$$F(x)=\frac{kx^2}{2}$$

и $\Phi(x)$ имеет при всяком $W>0$ два простых корня:

$$x_1=-\sqrt{\frac{2W}{k}},\quad x_2=+\sqrt{\frac{2W}{k}}.$$

Движение — периодическое, между $x=x_1$ и $x=x_2$.

Совершенно другая картина получается для маятника. Возьмем математический маятник. Для него

$$F(\varphi)=mgl(1-\cos\varphi)=2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad \Phi(\varphi)=W-2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Будем различать три случая.

1. Пусть

$$W<2mgl.$$

Тогда $\Phi(\varphi)$ имеет корни $\pm\varphi_1$, где $0<\varphi_1<\pi$. Оба корня — простые, так как $\Phi'(\varphi_1)\neq 0$. Следовательно, имеет место периодическое движение, причем период его зависит от амплитуды. Если φ_1 не очень велико, имеем приближенно, обозначив через φ_0, максимальное отклонение

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right).$$

Период колебаний консервативной системы, вообще говоря, зависит от амплитуды.

2. Пусть

$$W=2mgl.$$

Функция $\Phi(\varphi)$ имеет теперь корни

$$\varphi_{1,2}=\pm\pi.$$

Эти корни — кратные, и, следовательно, будет лимитационное движение: маятник подходит к верхнему положению асимптотически, никогда его не достигая.

3. Пусть, наконец,

$$W>2mgl.$$

Тогда уравнение $\Phi(\varphi)=0$ не имеет действительного корня. Движение происходит все время в одном и том же направлении: маятник совершает вращательное движение.

Здесь, для консервативной системы, с помощью уравнения (4) мы легко получили всю картину движений. В случае неконсервативных систем такой анализ невозможен. Качественное исследование их движений должно исходить непосредственно из дифференциального уравнения. Разнообразие возможных движений оказывается там гораздо больше. При этом ряд теорем о качественном характере движений проще всего излагается на геометрическом языке.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XI 1930 г.)

Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения.

Сначала несколько замечаний, относящихся к предыдущей лекции.

Мы поставили вопрос математически и решили его так, как это впервые сделал Вейерштрасс. Мы имели закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+F(x)=W. \tag{1}$$

Это было наше уравнение движения. Для упрощения выкладок мы положили $m=2$ (иначе говоря, ввели соответствующие единицы); тогда для скорости $\dot{x}$ находим:

$$\dot{x}=\sqrt{W-F(x)}.$$

В каждой точке пути материальная точка имеет потенциальную энергию $F(x)$. Мы обозначили разность $W-F(x)$ через $\Phi(x)$. Заметим, что $\Phi(x)$ есть простое обозначение кинетической энергии, выраженной как функция смещения.