Тогда уравнение $\Phi(\varphi)=0$ не имеет действительного корня. Движение происходит все время в одном и том же направлении: маятник совершает вращательное движение.

Здесь, для консервативной системы, с помощью уравнения (4) мы легко получили всю картину движений. В случае неконсервативных систем такой анализ невозможен. Качественное исследование их движений должно исходить непосредственно из дифференциального уравнения. Разнообразие возможных движений оказывается там гораздо больше. При этом ряд теорем о качественном характере движений проще всего излагается на геометрическом языке.

ВОСЬМАЯ ЛЕКЦИЯ

(3/XI 1930 г.)

Иллюстрации к качественной теории Вейерштрасса. Наглядное представление и математическая теория. Представление движения на фазовой плоскости. Особые точки и замкнутые интегральные кривые нелинейного дифференциального уравнения.

Сначала несколько замечаний, относящихся к предыдущей лекции.

Мы поставили вопрос математически и решили его так, как это впервые сделал Вейерштрасс. Мы имели закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+F(x)=W. \tag{1}$$

Это было наше уравнение движения. Для упрощения выкладок мы положили $m=2$ (иначе говоря, ввели соответствующие единицы); тогда для скорости $\dot{x}$ находим:

$$\dot{x}=\sqrt{W-F(x)}.$$

В каждой точке пути материальная точка имеет потенциальную энергию $F(x)$. Мы обозначили разность $W-F(x)$ через $\Phi(x)$. Заметим, что $\Phi(x)$ есть простое обозначение кинетической энергии, выраженной как функция смещения.

В каждой точке частица имеет определенную кинетическую и потенциальную энергию. Мы можем теперь уяснить себе почти без математики, как будет двигаться частица.

Пусть материальная точка движется в поле тяжести по желобку определенной формы. В каждом положении точка имеет определенную потенциальную энергию $U = mgy(x) = F(x)$. Давая желобку подходящую форму, мы получим любую зависимость $F(x)$ потенциальной энергии от положения. Изобразим, например (рис. 24, *а*), желобок, соответствующий постоянной силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной расстоянию. Изобразим далее (рис. 24, *б*)

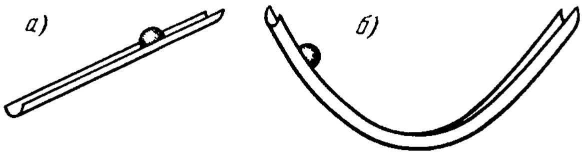

Рис. 24.

желобок, соответствующий квазиупругой силе, т. е. потенциальной энергии, пропорциональной квадрату расстояния.

Без всякой математики легко видеть, как точка будет двигаться по желобку: она будет подниматься до тех пор, пока кинетическая энергия не обратится в нуль; тогда точка остановится.

Кинетическая энергия обращается в нуль тогда, когда потенциальная энергия равна полной энергии. Это происходит при x таком, что $F(x) = W$ (это „условие остановки" мы уже получили аналитически). Затем точка повернет обратно. Что будет, если функция $W - F(x)$ не имеет корня, т. е. если во всех положениях частицы $F(x)$ меньше, чем W? Если кинетическая энергия настолько велика (рис. 25), что W больше максимума $F(x)$, то материальная точка перескочит через барьер и будет двигаться дальше. Если кинетическая энергия как раз такая, что в максимуме $F(x)$ имеем $F(x) = W$, то точка дойдет до максимума потенциальной энергии и там остановится. В максимуме первая производная $F'(x)$ равняется нулю. Следовательно, в этой точке и сила равняется нулю, так как

$$F'(x) = -f(x).$$

В такой простой картине все следует из наглядности. Зачем же мы проделали в прошлый раз ряд математических выводов? Дело в том, что „житейские" разговоры, в сущности, грешат в одном месте. Пусть кинетическая энергия точки меньше максимальной потенциальной. Мы знаем, что в таком случае точка должна остановиться. Но уверены ли мы, что она дойдет до точки остановки за конечное время? Ведь только при этом условии можно говорить о периодическом движении с конечным периодом. А что будет в случае лимитационного движения? Может быть, и в этом случае частица доходит до крайнего положения за конечное время? Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинающему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что „и так все ясно". Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру.

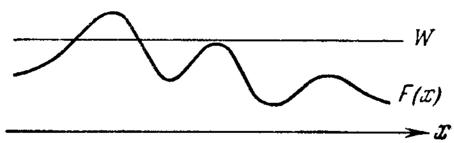

Рис. 25.

Изучая поведение консервативной системы с одной степенью свободы, мы исходили из общих законов движения. Закон сохранения энергии дает:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+F(x)=W.$$

Продифференцировав это уравнение, имеем:

$$\dot{x}[m\ddot{x}-f(x)]=0,$$

так как $f(x)=-F'(x)$ или $F(x)=-\int f(x)\,dx$. Из уравнения, полученного в результате дифференцирования, следует, что

$$m\ddot{x}=f(x).$$

Это — выражение закона Ньютона. Если f зависит только от x, то, зная $f(x)$, можно найти $F(x)$. Это равнозначащие выражения. Существенно, что здесь сила зависит только от положения (бывают случаи, когда сила зависит не только от положения).

Если тело падает под действием земного притяжения, его потенциальная энергия есть

$$U=mgx.$$

Отсюда для силы получаем:

$$f = -\frac{dU}{dx} = -mg.$$

Пусть это же тело падает в вязкой жидкости. Здесь возникает трение и закон падения будет другим. Если остановить тело, то силы трения нет. Сила трения не определена тем, в каком месте находится тело. Мы получим хорошее приближенное выражение для силы трения, предполагая, что она прямо пропорциональна скорости и действует навстречу скорости. Тогда

$$f = -mg - k\dot{x},$$

и дифференциальное уравнение движения таково:

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{x}. \tag{2}$$

Теперь сила f — функция не только от x, но и от $\dot{x}$. Уравнение (2) следует из второго закона Ньютона, но перейти от него к такому уравнению, которое было бы аналогично закону сохранения энергии в форме (1), простым образом невозможно (невозможно потому, что в выражение силы вошла производная $\dot{x}$). Здесь нет закона сохранения энергии в механическом смысле. Здесь развивается теплота и постоянной остается сумма внутренней энергии системы и развиваемой теплоты, которая в механические уравнения никак не входит.

Анализ, который был нами проведен, годится для случая, когда сила не зависит от скорости, но он ничего не может дать для общего случая. В этом общем случае можно, однако, пользоваться другим методом исследования, к которому мы теперь и перейдем. Он применим как к консервативным, так и к неконсервативным системам. Этот метод носит геометрический характер. Он связан с тем языком, на котором говорят все те, кто занимается квантами. Вся их терминология основана на этом методе. В более сложных случаях этот метод — единственный, и с ним нужно хорошо освоиться. Для нелинейных колебательных проблем беспроволочной телеграфии этот метод, в сущности, был введен А. А. Андроновым.

Математическая постановка задачи такова. Дано нелинейное уравнение вида

$$m\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \tag{3}$$

Вообще говоря, такое уравнение нельзя проинтегрировать. Как же подойти к исследованию движения? Как „выудить“ из уравнения, какими свойствами обладают движения описываемой им системы?

Нас интересуют смещение x и скорость $\dot{x}$. Нельзя ли изучить зависимость между x и $\dot{x}$? Мы можем написать:

$$y = \dot{x}.$$

Каждому значению x соответствует определенное значение $y = y(x)$, т. е. скорость есть функция координаты. Поставим вопрос так: какую скорость имеет точка в данном положении? Ответить на него вовсе не легко даже в случае консервативной системы.

Итак, мы хотим найти вид функции $y(x)$.

Принято, вместо скорости $y = \dot{x}$, вводить в рассмотрение количество движения или импульс $y = m\dot{x}$. Последующее изложение при этом значительно упростится. Так делается в аналитической механике и в теории квантов. В сложных случаях это существенно; но пока речь идет об одной степени свободы, это не имеет большого значения.

Напишем:

$$y = y(x) = m\dot{x},$$

откуда

$$m\ddot{x} = y'(x)\dot{x} = \frac{yy'}{m}\,. \tag{4}$$

Подставляя (3) в (4), находим:

$$yy' = mf\left(x, \frac{y}{m}\right).$$

Мы получили, таким образом, дифференциальное уравнение для y как функции от x. Первоначальное уравнение движения было второго порядка (в него входила вторая производная от x по t), но y, выраженное как функция от x, удовлетворяет уравнению *первого* порядка. Это существенно: между первым и вторым порядком в случае нелинейного уравнения имеется громадная разница. Всегда ли можно понизить порядок? Если бы в выражение для силы входили не только x и y, но еще явным образом время t, то этого нельзя было бы сделать: в правой части осталось бы t. Употребленный нами прием помогает только тогда, когда t в выражение для силы не входит.

Можно ли *физически* выделить системы, у которых сила не зависит явно от времени? Явная зависимость силы от времени означает, что есть постороннее влияние на систему. Если система замкнута, то такой зависимости не будет. Системы, где сила явно не зависит от времени, мы называем *автономными*. Вся область генерации колебаний в радиотехнике (кроме вопросов модуляции) приводит к рассмотрению именно автономных систем.

Мы свели задачу на исследование уравнения первого порядка. Зная y как функцию от x, уже нетрудно получить зависимость смещения x от t.

Итак, перед нами математическая задача — исследовать уравнение

$$yy' = f(x, y) \tag{5}$$

(для простоты мы положили $m = 1$). Вообще говоря, решить такое уравнение мы не умеем. Мы можем провести только качественное исследование. В общем случае — это единственный путь. Для консервативной нелинейной системы этот путь неизменно приводит к цели. Вообще говоря, это вещи очень сложные, они требуют большого математического аппарата.

Вы знаете, что́ называется решением дифференциального уравнения. Функция

$$y = \varphi(x)$$

есть решение дифференциального уравнения (или удовлетворяет дифференциальному уравнению), если ее подстановка в дифференциальное уравнение превращает его в тождество. Возьмем плоскость x, y. Если $y = \varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, то кривая, изображающая эту функцию, есть *интегральная кривая*.

Мы имеем одно уравнение первого порядка. Его общее решение зависит от одной произвольной постоянной, а значит, имеются различные интегральные кривые, соответствующие различным значениям этой произвольной постоянной, т. е. целое *семейство* интегральных кривых. Мы можем поэтому потребовать от функции $\varphi(x)$, чтобы она удовлетворяла не только дифференциальному уравнению, но еще и некоторому дополнительному условию. Потребуем, чтобы при $x = x_0$ было $y = y_0$. Здесь x_0 и y_0 — любые заданные величины. Нельзя заранее утверждать, что всегда существует такая функция, но можно указать достаточное условие того, что существует одна и только одна функция, удовлетворяющая поставленному требованию. На нашем геометрическом языке это требование означает, что интегральная кривая должна проходить через точку (x_0, y_0). Упомянутое выше достаточное условие таково: если в данной точке

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{f(x, y)}{y}\right]\right|_{x_0, y_0} < M, \tag{6}$$

где M — некоторое положительное число, то через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Таким образом, если в точке (x_0, y_0) производная $\partial[f/y]/\partial y$ конечна, то через точку (x_0, y_0) проходит интегральная кривая, и притом только одна. Если же мы случайно попали в точку, где условие (6) не удовлетворяется, то мы имеем дело с сомнительным случаем — сомнительным потому, что высказанное условие — достаточное, но не необходимое. Точки, для которых несправедливо утверждение, что через них проходит одна и только одна интегральная кривая, называются *особыми точками* дифференциального уравнения. Оказывается, что они имеют огромное значение в теории дифференциальных уравнений. Теория колебаний ими очень интересуется.

Возьмем немного более общий случай, чем (5), а именно уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{7}$$

[в случае (5) $Q(x, y) = y$]. Производная dy/dx всюду конечна, кроме точки $Q = 0$. Если в точке $x = x_0$, $y = y_0$ имеем $P(x, y) = 0$, $Q(x,y) = 0$, то точка является особой. Через всякую простую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Через особые точки проходит несколько интегральных кривых или же не проходит ни одной.

Рассмотрим несколько примеров.

Первый пример.

$$\frac{dy}{dx} = -a^2\frac{x}{y}\cdot$$

Это уравнение легко интегрируется:

$$y^2 + a^2x^2 = \text{const}.$$

Мы получаем семейство кривых, потому что константа может быть любая. Это — семейство эллипсов, причем через каждую точку проходит один эллипс (рис. 26). Подставляя в левую часть координаты точки, мы находим значение константы. Но зададим начальное условие $x=0$, $y=0$. Тогда константа равна нулю, и мы имеем

$$y^2+a^2x^2=0.$$

Это не есть уравнение действительной кривой. Точка $x=0$, $y=0$ есть особая точка: через нее не проходит ни одна интегральная кривая.

Второй пример.

$$\frac{dy}{dx}=a^2\frac{x}{y}\cdot$$

Здесь, интегрируя, мы получаем:

$$y^2-a^2x^2=\text{const}.$$

Это — семейство гипербол с общими асимптотами (рис. 27). Через особую точку $x=0$, $y=0$ проходят две интегральные кривые, а именно асимптоты.

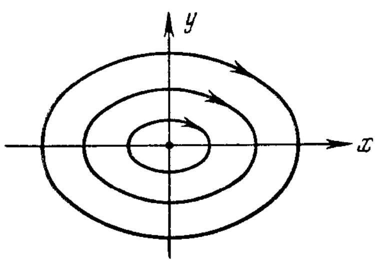

Рис. 26.

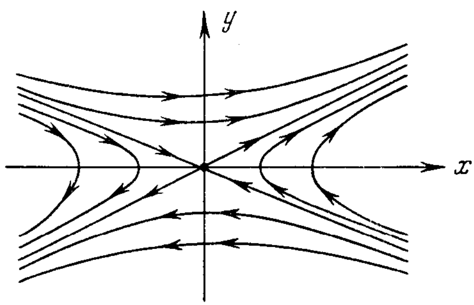

Рис. 27.

Мы получили уже два типа особых точек. В первом примере мы имели дело с *центром*, во втором особая точка называется *седлом* (col — впадина горы).

Вернемся снова к консервативной системе, для которой

$$yy'=f(x).$$

Особая точка

$$f(x)=0,\quad y=0$$

либо седло, либо центр. Для того, чтобы узнать характер особой точки, разложим около нее $f(x)$ в ряд. Пусть в особой точке $f(x)=0$. Тогда

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Если первый коэффициент отрицателен, то особая точка — центр, если положителен — седло.

Каков физический смысл особой точки? В ней $y=0$, т. е. скорость равна нулю, и $f(x)=0$, т. е. сила равна нулю.

Таким образом, особая точка изображает *состояние равновесия*. Потенциальная энергия системы имеет в особой точке экстремальное значение (максимум или минимум). Смотря по тому, будет ли a_1 положительным или отрицательным, будет максимум или минимум потенциальной энергии. Случай $a_1>0$ (седло) соответствует неустойчивому, $a_1<0$ (центр) — устойчивому равновесию. Если система консервативна, то могут быть только эти два типа особых точек. В неконсервативных системах возможны еще и другие.

В самом общем случае (7) особыми точками являются точки пересечения кривых $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$. Каждой особой точке соответствует положение равновесия системы.

Представим себе теперь, что мы начертили интегральные кривые и нашли, что среди них есть замкнутые кривые. Замкнутая кривая есть изображение периодического явления. Доказать это очень просто. Пусть для $t=0$ имеем $x=x_0$, $y=y_0$. Если частица возвращается через некоторое время в положение $x=x_0$ и снова получает скорость $y=y_0$, то дальнейшее течение процесса идентично повторяется.

В этом рассуждении мы считали, что время возвращения τ в исходное состояние конечно. Может ли это время быть бесконечным? Нужно ввести одно новое понятие, и тогда станет очевидным, что этого не может быть. y есть скорость движения материальной точки. Совсем другое — скорость движения *изображающей* точки (x,y) вдоль интегральной кривой на фазовой плоскости — плоскости (x,y). Для этой фазовой (или диаграммной скорости в случае уравнения (3) имеем:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{y^2+f^2(x,y)}.$$

Скорость ds/dt равна нулю, только если одновременно и $f(x,y)=0$ и $y=0$. Длина нашей замкнутой кривой конечна. Поэтому, если на этой кривой нет особой точки, период будет конечным.

Если удалось доказать, что среди интегральных кривых есть замкнутые кривые, то тем самым доказано, что возможны периодические движения. Для отыскания периодических решений дифференциального уравнения надо „ловить“ такие замкнутые кривые.

Если найдены особые точки и замкнутые интегральные кривые дифференциального уравнения, то найдены положения равновесия и периодические движения системы.

Интересно реальное осуществление фазовых диаграмм. Представьте себе катодный осциллограф. Пусть отклонение пучка в одном направлении будет пропорционально току (x), а в другом, перпендикулярном — напряжению ($y = \dot{x}$). Движение пятнышка представит тогда движение изображающей точки на фазовой плоскости. Можно, таким образом, на опыте начертить интегральные кривые.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XI 1930 г.)

Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем. Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов.

Мы рассматривали в прошлый раз систему, описываемую уравнением вида

$$m\ddot{x} = f_1(x). \tag{1}$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W, \tag{2}$$

причем

$$f_1(x) = -F'(x).$$

Удобно рассматривать, вместо скорости $\dot{x}$, величину

$$m\dot{x} = y, \tag{3}$$

называемую импульсом или иногда — моментом. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\dot{y} = f_1(x). \tag{4}$$

Для случая поступательного движения точки или вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость и им-