Если найдены особые точки и замкнутые интегральные кривые дифференциального уравнения, то найдены положения равновесия и периодические движения системы.

Интересно реальное осуществление фазовых диаграмм. Представьте себе катодный осциллограф. Пусть отклонение пучка в одном направлении будет пропорционально току (x), а в другом, перпендикулярном — напряжению ($y = \dot{x}$). Движение пятнышка представит тогда движение изображающей точки на фазовой плоскости. Можно, таким образом, на опыте начертить интегральные кривые.

ДЕВЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XI 1930 г.)

Изображение движения на фазовой плоскости (продолжение). Особые точки и замкнутые кривые. Фазовая картина некоторых консервативных систем. Теорема вириала и ее применение к кинетической теории газов.

Мы рассматривали в прошлый раз систему, описываемую уравнением вида

$$m\ddot{x} = f_1(x). \tag{1}$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + F(x) = W, \tag{2}$$

причем

$$f_1(x) = -F'(x).$$

Удобно рассматривать, вместо скорости $\dot{x}$, величину

$$m\dot{x} = y, \tag{3}$$

называемую импульсом или иногда — моментом. При этом уравнение (1) принимает вид

$$\dot{y} = f_1(x). \tag{4}$$

Для случая поступательного движения точки или вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси скорость и импульс очень просто связаны между собой. В общем случае связь более сложная, но она всегда определяется условием

$$y = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}},$$

где T — кинетическая энергия. Разделив уравнение (4) на (3), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}, \tag{5}$$

где $f(x) = mf_1(x)$.

Мы исследовали движение, исходя из этого дифференциального уравнения. Можно было бы поступить иначе — интегрировать соотношение (2). В простейших случаях можно при исследовании движения исходить из получающихся таким образом квадратур. Но для неконсервативных систем единственный путь — исследование интегральных кривых на фазовой плоскости.

Вообще говоря, через любую точку плоскости x, y проходит только одна интегральная кривая уравнения (5), но есть точки — они называются особыми, через которые проходит либо несколько интегральных кривых, либо ни одной. Для особых точек, в которых $f(x) = 0$ и $y = 0$, теорема Коши несправедлива.

Уравнение (5), относящееся к консервативной системе, может иметь два типа особых точек:

1) через которые не проходит *ни одна* интегральная кривая;

2) через которые проходят *две* интегральные кривые.

Точки первого типа называются центрами (centre), точки второго типа — седлами (col). Особые точки физически соответствуют состояниям равновесия. Таким образом, здесь может быть два рода состояний равновесия. Центры являются устойчивыми, седла — неустойчивыми состояниями равновесия, и, следовательно, характер особых точек служит критерием устойчивости.

Выясним, в каком направлении движется изображающая точка на фазовой плоскости. Если скорость, а следовательно, и y положительны, то x увеличивается, т. е. в верхней части фазовой плоскости изображающая точка движется так, что абсцисса увеличивается; если же скорость и y отрицательны (нижняя часть плоскости), то x уменьшается. Таким образом, движение происходит по часовой стрелке.

Как уже было сказано, особые точки соответствуют положениям равновесия. Замкнутые кривые на фазовой плоскости — это периодические движения. Мы имеем на фазовой плоскости полную картину движения систем.

Я не буду останавливаться на общей качественной теории уравнений типа (5), а укажу лишь некоторые результаты.

Внутри замкнутой кривой всегда есть по крайней мере одна особая точка. Таким образом, колебания возникают только вокруг положения равновесия. Если внутри замкнутой кривой имеется одна особая точка, то это может быть только центр. Внутри замкнутой траектории могут находиться также одно седло и два центра или два седла и три центра. Вообще внутри замкнутой траектории возможно нечетное число особых точек и всегда число центров на единицу больше числа седел. Таким образом, возможны колебания вокруг нескольких положений равновесия, среди которых должны быть и неустойчивые. Все это справедливо для сколь угодно сложных консервативных систем.

Что получится, если особая точка расположена на замкнутой интегральной кривой? Около этой точки движение становится бесконечно медленным, и, следовательно, в этом случае нет периодического движения. Подходя к такой особой точке, изображающая точка останавливается, „застревает“, так как в особой точке сила и скорость равны нулю, а движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка.

Разберем несколько простых примеров.

Начнем с гармонического движения. В этом случае уравнение (2) принимает вид

$$\frac{y^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=W.$$

Начало координат — особая точка; других особых точек нет. Существуют только периодические движения (рис. 26).

Рассмотрим, как ведет себя маятник с *не малой* амплитудой? В этом случае $F(\varphi)=2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}$ и

$$\frac{y^2}{2m}+2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2}=W.$$

Интегральные кривые (рис. 28) показывают сразу всю картину движений маятника. Точки, через которые проходят две интегральные кривые, — это седла. Кривые нарисованы для ряда значений W. При $W=0$ получается центр. Потом идут замкнутые кривые, — при малой общей энергии получаются периодические решения. При очень малой энергии — это почти эллипсы. Зададим такую энергию, при которой интегральная кривая проходит через точку неустойчивого равновесия — седло. Маятник стремится в это состояние в течение бесконечного времени. Он к нему приближается, но не доходит до него. Из нашей картины сразу видно, что, если мы сообщим маятнику еще бо́льшую энергию, периодичности уже не будет, маятник будет вращаться. Ход волнистой кривой показывает при этом, что возле центра маятник движется с наибольшей скоростью.

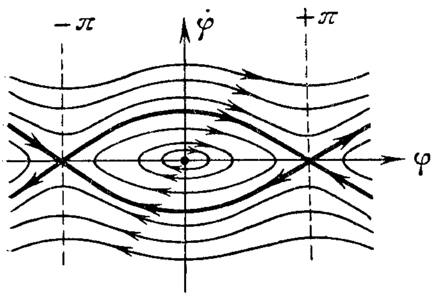

Рис. 28.

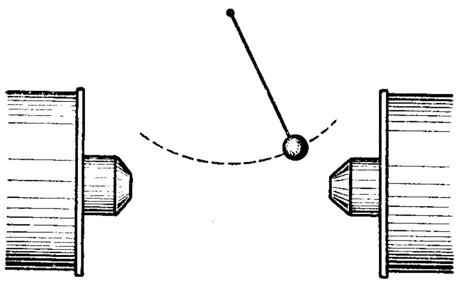

Рис. 29

Третий пример — железный маятник, помещенный между полюсами электромагнита (рис. 29). Устойчивое положение равновесия расщепляется на два таких положения, разделенных седлом. Внутри больших замкнутых кривых — два центра и одно неустойчивое положение равновесия. Картина на фазовой плоскости (рис. 30) сразу дает представление о всех возможных движениях.

Во всех случаях, когда существуют замкнутые кривые, изображающие периодические движения, они симметричны по отношению к оси абсцисс, так как скорость всегда имеет двойной знак:

$$y = \pm\sqrt{W - F(x)}.$$

Рассмотрим площадь эллипса (рис. 31), изображающего периодическое движение:

$$S = 2\int_{x_1}^{x_2} y\,dx.$$

Вместо x и dx введем время:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{m}, \quad dx = \frac{y}{m}\,dt,$$

так что

$$S=2\int_{t_1}^{t_2}\frac{y^2}{m}\,dt.$$

Промежуток времени от t_1 до t_2 составляет половину периода τ. Под знаком интеграла стоит удвоенная кинетическая энергия T.

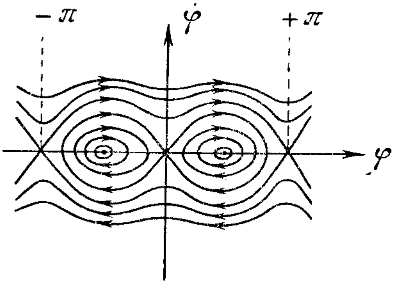

Рис. 30.

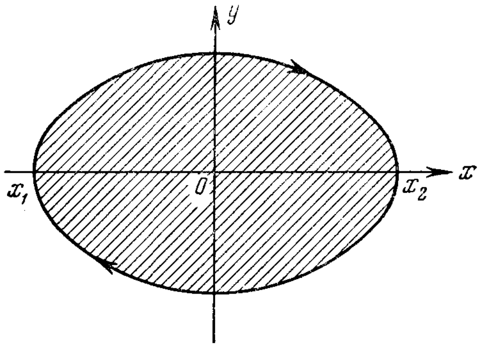

Рис. 31.

Таким образом,

$$S=2\int_{t_1}^{t_1+\frac{\tau}{2}}2T\,dt=\tau\cdot\frac{1}{\tau/2}\int_{t_1}^{t_1+\frac{\tau}{2}}2T\,dt,$$

или

$$S=\tau\cdot 2\overline{T}.$$

Замкнутая кривая ограничивает площадь, равную удвоенной средней кинетической энергии, умноженной на период. Вводя частоту $\nu=1/\tau$, мы можем написать:

$$S=2\overline{T}/\nu. \qquad (6)$$

В квантовой теории это соотношение играет важную роль.

Вся ценность формулы (6) в том, что она справедлива в самом общем случае движения консервативной системы.

Возьмем частный случай гармонического осциллятора. Здесь соотношение (6) можно вывести еще иначе. Интегральная кривая — эллипс. Длины a и b его полуосей определяются соотношениями:

$$2mW=a^2,\quad \frac{2W}{k}=b^2.$$

Площадь эллипса есть

$$S = \pi ab = 2\pi W \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Но

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \tau,$$

откуда

$$S = W/\nu. \tag{7}$$

Таким образом, в случае гармонического колебания площадь, охватываемая интегральной кривой, равна отношению *полной* энергии к частоте.

Но для гармонического колебания имеем:

$$\overline{T} = \overline{U},$$

а так как

$$\overline{T} + \overline{U} = \overline{W} = W,$$

получаем

$$\overline{T} = \overline{U} = \frac{W}{2}, \tag{8}$$

— полная энергия равна удвоенной средней кинетической энергии. Подставляя (8) в (7), мы приходим к соотношению (6). Запомним это общее соотношение и то, что в частном случае гармонических колебаний $\overline{T} = W/2$.

Существует ли какое-нибудь соотношение между средней кинетической и средней потенциальной энергией в общем случае? В механике для решения таких вопросов очень важную роль играет так называемая теорема вириала, которую мы сейчас докажем.

Будем исходить из самой простой, ньютоновой формы уравнений движения. Трем координатам i-той точки соответствуют три дифференциальных уравнения движения:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i, \quad m_i\ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i\ddot{z}_i = Z_i.$$

Хотя в механике это не принято, мы будем писать все уравнения в таком виде:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i, \tag{9}$$

т. е. будем нумеровать подряд все координаты: x_1; y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $x_3, \ldots$ и обозначать их одной буквой x. При этом

$$m_1 = m_2 = m_3, \quad m_4 = m_5 = m_6, \ldots$$

(каждая тройка относится к одной и той же материальной точке).

Умножив уравнение (9) на x_i, получаем:

$$m_i \ddot{x}_i x_i = X_i x_i,$$

или

$$\frac{d}{dt}(m_i x_i \dot{x}_i) - m_i \dot{x}_i^2 = X_i x_i.$$

Умножим теперь обе части равенства на dt, просуммируем по всем i, проинтегрируем между двумя какими угодно пределами t, $t+\tau$ и разделим на τ:

$$\frac{1}{\tau}\sum m_i x_i \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} - \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \sum m_i \dot{x}_i^2\, dt = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \sum X_i x_i\, dt. \tag{10}$$

Рассмотрим случай периодического движения. Пусть τ — период. Тогда

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i x_i \dot{x}_i \Big|_t^{t+\tau} = 0$$

и соотношение (10) принимает вид

$$2\overline{T} + V = 0, \tag{11}$$

где

$$\overline{T} = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \sum \frac{m \dot{x}_i^2}{2}\, dt$$

есть среднее значение за период полной кинетической энергии системы $T = \sum\limits_{i=1}^{3n} \frac{m \dot{x}_i^2}{2}$, а

$$V = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} \sum X_i x_i\, dt \tag{12}$$

есть среднее значение за период от суммы

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i x_i.$$

Выражение (12) Клаузиус назвал *вириалом* данной системы сил.

Пусть теперь движение не периодическое, но такое, что ни скорость, ни координаты не обращаются в бесконечность (*финитное* движение). При этом

$$\sum_{i=1}^{3n} |m_i x_i \dot{x}_i| < M, \tag{13}$$

где M — некоторое положительное число.

Возьмем τ очень большим. При достаточно большом τ в силу (13) левая часть (10) с каким угодно приближением равна нулю. При этом и для непериодического движения с любым приближением справедливо соотношение (11). Оно выражает теорему Клаузиуса о вириале.

Теорема вириала получила большое применение в кинетической теории газов. Частный пример позволит нам сделать несколько существенных дополнительных замечаний.

Рассмотрим достаточно разреженный газ. Он подчиняется уравнению состояния

$$pV = R\Theta, \tag{14}$$

причем R пропорционально массе газа. Удобно брать 1 моль газа (число граммов, равное молекулярному весу). Тогда R — одно и то же для любого газа.

Построим самую грубую механическую картину. Будем считать, что молекулы — просто шары (это соответствует одноатомному газу). Их удары о стенки обусловливают давление. Каково соотношение между давлением и средней кинетической энергией молекул? (Для механической модели понятие температуры — совершенно чуждая вещь; мы же решаем механический вопрос.)

Пусть $\overline{u^2}$ — средний квадрат скорости одной молекулы. Тогда, по теореме вириала

$$2\overline{T} = Nm\overline{u^2} = -V.$$

Представим X_i как сумму внешних и внутренних сил:

$$X_i = X_i^{(e)} + X_i^{(i)}.$$

Общий вириал равен сумме соответствующих внешнего и внутреннего вириалов:

$$V = V^{(e)} + V^{(i)}.$$

Легко вычислить вириал внешних сил. Пусть сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c. Внешние силы действуют только со стороны стенок сосуда. На трех стенках $x=0$, $y=0$, $z=0$ вириал равен нулю. Строго говоря, это не очевидно, а нуждается в обосновании, так как если удары молекул о стенки — мгновенные, то сила обращается в бесконечность. В действительности, когда молекулы ударяют о стенки, они их слегка продавливают: „для того, чтобы оттолкнуть молекулу," стенка немного сдвигается (иначе силы не будет). На очень малом протяжении Δx в течение очень малого промежутка времени Δt сила $X_i^{(e)}$ очень велика. Но можно строго обосновать, что когда жесткость стенок неограниченно растет и $X_i^{(e)} \to \infty$, то Δx и Δt стремятся к нулю и притом так, что вириал тоже стремится к нулю.

На стенке $x=a$ вириал равен

$$a \sum \overline{X_i^{(e)}} = a(-pbc) = -pabc,$$

где p — давление. Действительно, $-\sum \overline{X_i^{(e)}}$ — это давление, умноженное на площадь стенки, ибо давление газа есть по определению средняя сила на единицу площади ее поверхности (давление на газ положительно, когда оно направлено внутрь).

Очевидно, по трем стенкам $x=a$, $y=b$, $z=c$

$$V^{(e)} = -3pabc = -3pV,$$

где $V=abc$ — объем газа. Следовательно,

$$Nm\overline{u^2} = -V^{(i)} + 3pV.$$

Это — основная формула кинетической теории газов.

Если газ очень разрежен, можно считать, что молекулы взаимодействуют только при соприкосновениях. Будем считать, что молекулы чрезвычайно малы. Тогда координаты двух молекул по какой-нибудь оси (назовем их здесь x_1 и x_2) в момент удара можно считать равными. По третьему закону Ньютона, силы взаимодействия $X_1^{(i)}$ и $X_2^{(i)}$, соответствующие координатам x_1 и x_2, равны по величине и противоположны по направлению:

$$X_1^{(i)} = -X_2^{(i)}.$$

Таким образом, все слагаемые вида $X_1^{(i)}x_1 + X_2^{(i)}x_2$, из которых состоит сумма $\Sigma X_i^{(i)} x_i$ в выражении внутреннего вириала, равны нулю, а значит, и сам внутренний вириал равен нулю. Сделанные предположения о взаимодействии молекул означают, что мы ограничиваемся моделью *идеального* газа, но именно для этого случая и справедлив закон Бойля-Мариотта, на основании которого мы написали (14). В результате

$$N m \overline{u^2} = 3pV. \tag{15}$$

Сопоставляя (14) с (15), мы можем найти кинетическое толкование температуры: средняя кинетическая энергия молекулы есть

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{3R}{2N}\Theta.$$

Она пропорциональна температуре. Мы можем написать:

$$\frac{m\overline{u^2}}{2} = \frac{3}{2}k\Theta, \tag{16}$$

где

$$k = \frac{R}{N}$$

есть постоянная Больцмана. Соотношение (16) выражает основное положение классической статистической механики: температура есть мера кинетической энергии молекул.

Так как R известно, а N можно определить из опыта, то из опыта можно определить k, а следовательно, и среднюю кинетическую энергию молекулы газа. Мы получаем возможность оценить скорости молекул.

Запомним формулу (16). С ней связаны очень важные вопросы, относящиеся к возникновению квантовой теории. Мы их коснемся потом[1]. Но вот на что я хочу указать теперь же. Может показаться, что мы вывели основную формулу (16) кинетической теории газов из законов Ньютона. Но в действительности она из них не следует. Мы молча сделали одно предположение,— предположение о том, что существует определенное, одинаковое давление на все стенки сосуда. Если бы, скажем, скорости всех молекул были параллельны оси x, то не было бы давления на боковые стенки. Понадобилось, таким образом, кроме законов Ньютона, добавочное предположение. Такого рода постулат всегда необходим в кинетической теории газов.

---

[1] [См. 10-ю лекцию, а также 29-ю и 30-ю.]

Мы применили теорему вириала к идеальному газу. Но она очень хороша и для более сложных систем. Из нее следуют очень разнообразные и интересные вещи.

Рассмотрим общий случай консервативной системы, т. е. системы, в которой существует потенциальная энергия — функция U от координат, такая, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Тогда

$$V = -\overline{\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i}.$$

Пусть потенциальная энергия есть однородная функция n-ой степени. По теореме Эйлера

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x_i} x_i = nU,$$

так что

$$V = -n\overline{U}.$$

На основании (11) получается замечательное соотношение

$$2\overline{T} = n\overline{U}. \tag{17}$$

Если потенциальная энергия есть однородная квадратичная функция координат, то $n=2$ и

$$\overline{T} = \overline{U}.$$

Возьмем случай взаимодействия по закону тяготения Ньютона или по закону Кулона. Здесь существует потенциальная энергия

$$U = \text{const} - \lambda \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{m_i m_k}{r_{ik}},$$

где λ — гравитационная постоянная, m_i и m_k — массы материальных точек, r_{ik} — расстояния между ними; или же

$$U = \text{const} + \sum_{i \neq k} \frac{1}{2} \frac{e_i e_k}{r_{ik}},$$

где e_i и e_k — электрические заряды. Положим:

$$\text{const} = 0,$$

т. е. будем считать потенциальную энергию равной нулю тогда, когда взаимодействующие точки находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. Тогда U есть однородная функция (—1)-ой степени, и согласно (17)

$$2\overline{T}=-\overline{U}. \tag{18}$$

Если все заряды одноименны (имеет место только отталкивание), то

$$U=\sum_{i\neq k}\frac{1}{2}\frac{e_ie_k}{r_{ik}}$$

— положительная величина. Но кинетическая энергия всегда положительна: мы приходим к противоречию с равенством (18). В чем же дело?

Применяя ту или иную теорему, нельзя забывать, при каких предположениях она выведена. При существовании только отталкивания движение заведомо таково, что координаты и скорости не остаются ограниченными. При выводе же теоремы вириала было сделано существенное предположение о финитности движения.

Если есть и положительно и отрицательно заряженные частицы, то для того, чтобы движения были финитными, нужно, грубо говоря, чтобы общий потенциал разноименных зарядов превышал общий потенциал одноименных.

Полная энергия системы

$$W=T+U=\overline{T}+\overline{U}.$$

Если, кроме того, выполняется равенство (18), то

$$W=-\overline{T}. \tag{19}$$

Таким образом, при кеплеровском движении полная энергия всегда отрицательна.

При распылении системы, в которой потенциал разноименных зарядов преобладает над потенциалом одноименных, потенциальная энергия растет. Следовательно, согласно (18) и (19) кинетическая энергия уменьшается, а общая энергия растет. Таким образом, на распыление системы требуется затрата работы извне.

Согласно теории относительности запас энергии системы связан с ее массой M соотношением:

$$M=\frac{W}{c^2}.$$

Если мы распыляем систему с преобладанием потенциала разноименных зарядов, мы всегда увеличиваем ее массу. В распыленном состоянии масса частиц, составляющих атом, обязательно больше, чем масса атома.

ДЕСЯТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XI 1930 г.)

Применения теоремы вириала (продолжение). Пример Богуславского. Идеальный газ. Твердое тело. Статистический постулат Больцмана. Вычисление средней энергии осциллятора. Классическая теория теплоемкости твердого тела; ее неудовлетворительность. Равновесное излучение. Вопрос о распределении энергии в его спектре. Классическая теория; ее неудовлетворительность. Статистический постулат Планка; квантование энергии осциллятора.

Мы вывели теорему вириала

$$2\overline{T}=-V, \tag{1}$$

где V — вириал; T — кинетическая энергия системы. В тех случаях, когда потенциальная энергия U есть однородная функция координат, теорема вириала дает интересную зависимость между средней кинетической и средней потенциальной энергией:

$$2\overline{T}=n\overline{U}, \tag{2}$$

где n — степень однородной функции U. С другой стороны, всегда

$$\overline{T}+\overline{U}=W, \tag{3}$$

где W — полная энергия. Следовательно, если потенциальная энергия — однородная функция n-ой степени, то

$$\overline{T}=\frac{n}{n+2}W,\quad \overline{U}=\frac{2}{n+2}W.$$