ДВЕНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/XII 1930 г.)

Адиабатические инварианты (окончание): квантование осциллятора по Планку и теория адиабатических инвариантов; гипотеза Эренфеста. Квантование осциллятора в волновой механике. Колебательные системы с одной степенью свободы с учетом трения (сопротивления). Отрицательное сопротивление и второй закон термодинамики. Коэффициент полезного действия процесса зарядки конденсатора аккумуляторной батареей. Затухающие колебания: коэффициент затухания; логарифмический декремент. Маятник Фроуда.

Вернемся к адиабатическим инвариантам и при этом кое-что дополним и подчеркнем.

Речь шла о применении классической механики к объяснению некоторых молекулярных явлений.

Механика не содержит в себе всех элементов, необходимых для объяснения этих явлений. Она не отвечает на вопрос: как движется тело? Механика отвечает только на вопрос: как движется тело, *если заданы начальная скорость и начальное положение*? Начальные положения и начальные скорости мы знаем — или можем узнать — в случае макроскопических тел. В микрокосмосе должен быть введен некоторый новый постулат. Естественно указать *вероятности* различных состояний микросистем (молекул, атомов). Здесь натолкнулись на следующую трудность. Если принять, что все начальные состояния возможны, и в согласии с этим предположением построить теорию черного излучения и теорию твердого тела, то получается грубое противоречие с опытом. Чтобы построить удовлетворительную теорию, нужно что-то в корне изменить, сделать какой-то решающий шаг. Планк сделал его — не в механике, а в статистике. Планк считал, что осциллятор движется по классическим законам, но начальные состояния не произвольны, а таковы, что энергия отдельного осциллятора

$$W = nh\nu \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

На основе этого предположения была создана новая статистика, и это дало блестящие результаты.

Однако нужно было отнестись к ним критически. Нужно было выяснить, как новые результаты уживаются с другими, твердо установленными. Как бы хорошо ни оправдывалась на опыте новая теория, все же оставалась известная неудовлетворенность, какое-то неприятное состояние. Тут и возник тот вопрос, который мы теперь разбираем.

Будем считать, что осциллатор движется по законам классической механики. Следуя Планку, будем считать, что

$$\frac{W}{\nu}=nh. \tag{1}$$

Возьмем другой осциллатор, с другой энергией W' и с другой частотой ν'. Мы снова пишем:

$$\frac{W'}{\nu'}=nh.$$

Все это не противоречит механике (повторяю: механика о начальных состояниях ничего не говорит). Но мы можем себе представить другую постановку задачи. Сначала мы задали определенные начальные условия. Затем мы начали медленно менять параметры осциллатора. Наконец, параметры мы опять зафиксировали. Все это — *одна* механическая задача. Здесь все однозначно определено начальными условиями. Посмотрим, какова энергия осциллатора в конце процесса изменения параметров. Теперь мы не вольны отвечать на этот вопрос независимо от механики. Лоренц говорит[1]: вследствие изменения параметра произошло изменение частоты; поэтому условие (1) теперь нарушено. Представим себе маятник. Начальные условия таковы, что он квантован. Затем мы начали его медленно укорачивать. В результате перед нами короткий маятник. Может случиться, говорит Лоренц, что этот короткий маятник не квантован. Конечно, это рассуждение предполагает, что классическая механика остается справедливой. В нем заключена такая мысль: два независимых осциллатора с частотами ν и ν' мы имеем право квантовать, но если мы переводим один в другой, хотя бы сколь угодно медленно, то нет этой свободы, — мы связаны классической механикой. Все направление мысли здесь таково, что для медленных изменений параметра сохраняется классическая механика.

На это можно ответить так: откуда известно, что при медленном изменении параметра нарушается условие (1)? Изменяя пара-

---

[1] [H. A. Lorentz. La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la Réunion tenue à Bruxelles. 1911. Стр. 450. Париж, Готье-Виллар, 1912.]

метр, мы совершаем некоторую работу и, следовательно, изменяем энергию системы. В начале частота осциллатора была ν. Мы задали начальную энергию W, равную $nh\nu$. Откуда мы знаем то, что новая энергия W' не окажется равной $nh\nu'$? Может быть, работа совершена как раз такая, какая нужна, чтобы новое значение энергии было равно $nh\nu'$?

Здесь возникает чисто механическая задача: дана система с одной степенью свободы; мы изменяем ее параметры, и при этом изменяются период и энергия; какие функции этих величин остаются постоянными?

Эту механическую задачу решил Больцман. Он показал, что есть величина, которая при медленном изменении параметров остается постоянной, и указал эту величину. В общем случае это не W/ν, а

$$\frac{2\overline{T}}{\nu}, \tag{2}$$

где $\overline{T}$ — среднее значение кинетической энергии. Эта чисто механическая теорема сразу устраняет неприятности в квантовой теории, связанные с изменением параметра.

Величины, которые остаются неизменными при медленном изменении параметра, называются адиабатическими инвариантами. О них подробно говорилось в связи с рядом примеров в прошлой лекции.

Планк квантовал не величину (2), а величину (1), — полную энергию, деленную на частоту. Он не думал о том противоречии, возможность которого мы обсуждаем. Планк рассматривал частный случай — гармонический осциллатор. Для него „случайно" Планк правильно угадал, как надо квантовать: отношение W/ν равняется для гармонического осциллатора $2\overline{T}/\nu$. Во многих случаях (а именно: если потенциальная энергия — однородная функция) существует постоянное отношение между полной энергией и средней кинетической энергией[1]. Но возможны случаи — и это самые распространенные случаи, — когда не существует такого постоянного отношения. Например, для маятника с большой амплитудой W и $2\overline{T}$ не находятся в постоянном отношении. Там W/ν не является адиабатическим инвариантом.

После того, как все это выяснилось, начали поступать наоборот. Стали разыскивать величины, являющиеся адиабатическими

[1] [См. 10-ю лекцию.]

инвариантами и их квантовать. Так, например, маятник — нелинейная система, и здесь нужно квантовать $2\overline{T}/\nu$. Теория адиабатических инвариантов показала, таким образом, что у Планка нет противоречий с механикой. С другой стороны, она помогла дальнейшему развитию квантовой теории. Конечно, указание на то, что квантовать нужно величины, являющиеся адиабатическими инвариантами, было только гипотезой. Эта гипотеза была высказана Эренфестом.

Следует ясно себе представлять, что существование адиабатических инвариантов ничего общего с квантами не имеет. О нем знал уже Больцман, и интересовался он адиабатическими инвариантами в связи с чисто механическими вопросами. Он исходил из желания — это было давно, до квантов — свести тепловые явления на механические.

Итак, теорема об адиабатических инвариантах есть чисто механическая теорема. Она имеет прямое отношение к теории колебаний. Это — теорема теории колебаний, относящаяся к медленным изменениям параметров консервативных систем. В дальнейшем пришлось отказаться от планковской установки на удержание классической механики и на дополнение ее правилами квантования. Современная волновая механика создана путем отказа и от самой классической механики, но теория адиабатических инвариантов имеет большое значение и там.

Я не буду здесь говорить о всей концепции волновой механики и ограничусь лишь тем, что она изменила в вопросе о гармоническом осцилляторе. Она утверждает, как и Планк, что энергия гармонического осциллятора принимает лишь ряд дискретных значений. Но, по Планку, эта энергия может иметь значения

$$0,\ h\nu,\ 2h\nu,\ \ldots$$

(существенно, что осциллятор может иметь энергию, равную нулю). Согласно же современной волновой механике, состояния с энергией, равной нулю, не существует. Энергия гармонического осциллятора равна

$$W=\left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu \qquad (n\text{ — целое}),$$

т. е. равна

$$\frac{h\nu}{2},\ \frac{3h\nu}{2},\ \frac{5h\nu}{2},\ \ldots$$

При абсолютном нуле температуры все осцилляторы имеют наинизшую энергию $h\nu/2$. Наличие этой „энергии абсолютного нуля“ чрезвычайно типично для волновой механики. Оно приводит к далеко идущим следствиям.

Перейдем теперь снова к более прозаическим вещам.

Вернемся к резонатору с одной степенью свободы, но отбросим часть сделанных ранее идеализаций. До сих пор мы считали, что маятник имеет кинетическую и потенциальную энергию (контур — магнитную и электрическую), причем от их превращения в теплоту мы отвлекались (рассматривая контур, мы вводили параметры L и C, но не вводили сопротивления). Отсюда следовало, что процесс колебаний повторяется периодически. Но в действительности при колебаниях всегда развивается теплота. Маятник всегда имеет трение, контур — сопротивление. Учет трения или сопротивления приводит к теории затухающих колебаний.

Будем исходить из закона сохранения энергии. В случае колебательного контура

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}+\frac{Li^2}{2}\right)+Ri^2=0 \tag{3}$$

(за единицу времени в электрическом контуре рассеивается энергия Ri^2).

Проводя в (3) дифференцирование и принимая во внимание, что

$$\frac{dQ}{dt}=i,$$

мы получаем дифференциальное уравнение

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0. \tag{4}$$

Аналогичное уравнение для механической системы имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=0. \tag{5}$$

Оно получается в предположении, что энергия, превращаемая в теплоту в единицу времени, пропорциональна квадрату скорости, т. е. в предположении, что сила трения пропорциональна скорости. При малых скоростях закон трения (например, сопротивления воздуха) очень близок к этому. Но при больших скоростях, например для снаряда, уже ничего подобного не получается.

В случае вращательного движения мы найдем при аналогичных предположениях уравнение

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mu\frac{d\varphi}{dt}+D\varphi=0, \tag{6}$$

где I — момент инерции, D — момент упругой силы при отклонении на угол $\varphi=1$, а μ — момент силы трения при угловой скорости $\dot{\varphi}=1$.

Уравнения (4), (5) и (6) мы запишем в общем виде:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0. \tag{7}$$

Здесь ω_0 — циклическая частота того процесса, который происходил бы в системе в отсутствие трения.

Мы считаем, что $\delta>0$, т. е. что сила трения всегда действует *против* движения. При этом во время колебаний электрическая и магнитная энергия (или кинетическая и потенциальная) превращаются в теплоту. Может ли δ быть отрицательным? При отрицательном трении энергия входила бы в систему, происходило бы превращение теплоты в электрическую и магнитную (кинетическую и потенциальную) энергию. Это не противоречит первому закону термодинамики, но противоречит *второму*.

Если бы было $\delta<0$, мы могли бы заставить контур колебаться за счет энергии окружающего „теплового резервуара“, мы могли бы с помощью периодического процесса черпать энергию у одного резервуара и превращать ее в работу: осуществилось бы perpetuum mobile второго рода. К сожалению, этого сделать нельзя. Поэтому мы должны считать *постулативно*, что *если нет другого источника энергии*, то $\delta>0$. Этим вовсе не сказано, что ни при каких условиях не может быть $\delta<0$. Системы с $\delta<0$ существуют, и они, может быть, даже важнее тех, где $\delta>0$. В дальнейшем мы рассмотрим и системы с $\delta<0$.

Обратим теперь внимание на такой вопрос. Прежде чем разрядить конденсатор, надо его зарядить, например с помощью аккумуляторной батареи (рис. 35). Как написать дифференциальное уравнение для процесса зарядки? Рассмотрим более общий случай разветвленной цепи (например, рис. 36).

Для составления уравнений разветвленной цепи закон сохранения энергии недостаточен. Здесь нужно воспользоваться первым и вторым законами Кирхгофа, учтя, что падения напряжения на индуктивностях и емкостях имеют вид $L\frac{di}{dt}$ и $\frac{Q}{C}$. Я не буду обосновывать этот общий рецепт составления уравнений электрических цепей. Его обосновать не так просто, ибо, строго говоря, здесь неправильно пользоваться понятием потенциала или напряжения, так как электрическое поле не является здесь статическим.

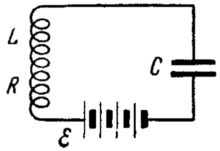

Рис. 35.

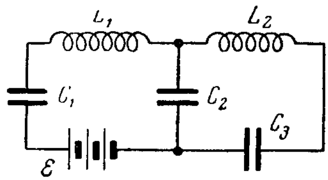

Рис. 36.

Для простого контура (рис. 19) мы придем, пользуясь законами Кирхгофа, к прежнему уравнению:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=0.$$

В случае же зарядки прибавляется еще постоянная электродвижущая сила батареи $\mathcal{E}$:

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=\mathcal{E}. \qquad (8)$$

Из уравнения (8) вытекает очень интересное и практически чрезвычайно важное следствие. Его можно очень просто вывести из самого уравнения, не прибегая к решению (часто решить уравнение бывает трудно, но можно получить некоторые важные результаты из самого уравнения[1]).

Умножим уравнение (8) на $i=\frac{dQ}{dt}$:

$$Li\frac{di}{dt}+Ri^2+\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=\mathcal{E}i,$$

и проинтегрируем от 0 до t:

$$\frac{Li_t^2}{2}-\frac{Li_0^2}{2}+R\int_0^t i^2dt+\frac{Q_t^2}{2C}-\frac{Q_0^2}{2C}=\mathcal{E}\int_0^t i\,dt. \qquad (9)$$

---

[1] [Ср. 27-ю лекцию.]

В случае зарядки начальные условия при $t=0$ таковы:

$$i_0=0, \quad Q_0=0. \tag{10}$$

При $t=\infty$ имеем:

$$i_t=i_\infty=0, \quad Q_t=Q_\infty=C\mathcal{E}, \tag{11}$$

причем

$$\int_0^\infty i\,dt=Q_\infty. \tag{12}$$

Подставляя (10), (11) и (12) в (9), получаем:

$$R\int_0^\infty i^2 dt+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=C\mathcal{E}^2,$$

или

$$R\int_0^\infty i^2 dt=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}. \tag{13}$$

Половина энергии, отдаваемой батареей, уходит на зарядку конденсатора, а другая половина превращается в теплоту. Можно как угодно менять сопротивление и индуктивность контура, коэффициент полезного действия при рассматриваемом способе зарядки всегда будет равен $^1/_2$. Это — самый невыгодный способ зарядки, какой только существует.

Результат (13) относится к случаю, когда мы в один прием заряжаем конденсатор до конца, до разности потенциалов $\mathcal{E}$. Но можно осуществить зарядку постепенно, порциями. К. п. д. оказывается тогда выше. Убедимся в этом.

Если конденсатор уже имеет начальный заряд $Q_0=C\mathcal{E}_0$ [в отличие от (10)], то при включении электродвижущей силы $\mathcal{E}>\mathcal{E}_0$ на него перетечет заряд $(t\to\infty)$

$$\int_0^t i\,dt=C(\mathcal{E}-\mathcal{E}_0).$$

Пользуясь этими выражениями вместо (10) и (12), нетрудно получить из (9), что

$$R\int_0^\infty i^2 dt=\frac{C(\mathcal{E}-\mathcal{E}_0)^2}{2}.$$

Будем производить зарядку n ступенями, повышая каждый раз электродвижущую силу на величину $\mathcal{E}/n$ и выжидая, когда ток (практически) прекратится. Тогда теплота, развиваемая за один шаг, будет

$$q_1 = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{n}\right)^2,$$

а полная теплота за все n шагов

$$q = nq_1 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2n}.$$

Мы видим, что с ростом n (и соответственно с замедлением процесса зарядки, до окончательного потенциала $\mathcal{E}$) потери уменьшаются и к. п. д. стремится к единице. Физически это понятно: сила тока при каждом шаге, грубо говоря, в n раз меньше, чем при единовременной зарядке, а теплота квадратична относительно тока. Отсюда и получается выигрыш в n раз, но вместе с тем и замедление процесса примерно в n раз.

Из уравнения (7) можно получить полную картину колебательного процесса. Характер решения зависит от того, каков дискриминант характеристического уравнения. Если

$$\omega_0^2 > \delta^2,$$

то общее решение имеет вид

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \tag{14}$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{15}$$

— действительная величина, а A и φ — произвольные постоянные.

Если

$$\omega_0^2 < \delta^2,$$

то общее решение таково:

$$x = Ae^{-m_1 t} + Be^{-m_2 t},$$

где m_1 и m_2 — действительные величины, а A и B — произвольные постоянные. Этот случай мы пока рассматривать не будем[1].

---

[1] [См. 14-ю лекцию.]

Решение (14) — осцилляторное (рис. 37). Оно имеет бесконечное множество максимумов и минимумов. Но оно не периодическое: не существует такого τ, чтобы при любом t было

$$x(t+\tau)=x(t).$$

Однако нули функции $x(t)$ повторяются через равные промежутки времени.

Обозначим:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega}, \quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Величину τ принято называть периодом, хотя это и неправильно; повторяю: периода здесь нет.

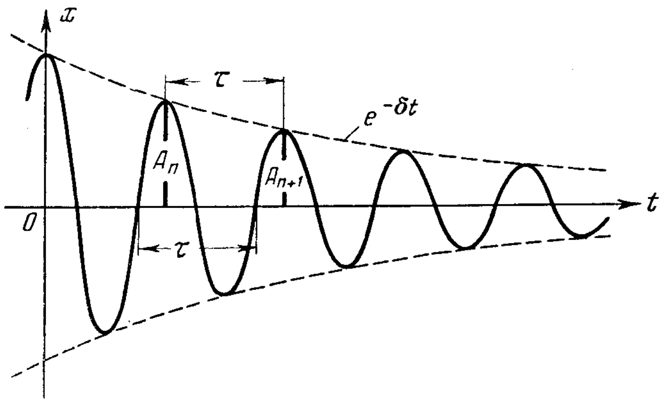

Рис. 37.

Промежуток времени между последовательными максимумами $x(t)$ тоже постоянен и равен τ; поэтому „период" здесь имеет двойной смысл. Максимумы находятся не посредине между нулями, а сдвинуты влево; но если $\delta \ll \omega_0$, то сдвиг очень мал. Если δ очень мало, то в течение некоторого времени система ведет себя приблизительно так, как если бы затухания не было. В ее внешних действиях часто проявляются черты, характерные для незатухающих колебаний. Но в других случаях имеется существенное отличие между слабо затухающими и незатухающими колебаниями. Для некоторых задач можно считать, что (14) есть „синусоидальное колебание с переменной амплитудой".

Величина δ имеет размерность, обратную времени. Ее называют *коэффициентом затухания*. Если он мал, то убывание амплитуды происходит медленно.

Каково отношение двух последовательных амплитуд (т. е. максимумов)? Обозначив их через A_n и A_{n+1} (рис. 37), имеем:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\delta\tau}.$$

Разность логарифмов этих величин есть

$$d = \ln A_n - \ln A_{n+1} = \delta\tau. \tag{16}$$

Эту безразмерную величину называют *логарифмическим декрементом* (иногда называют логарифмическим декрементом половину этой величины, но я предпочитаю называть логарифмическим декрементом $\delta\tau$).

Фаза φ и начальная амплитуда A колебания (14) задаются начальными условиями, система же задает „период“ τ и логарифмический декремент d.

Чтобы хорошо понять физический смысл логарифмического декремента, нужно „вработаться“ в это понятие.

Пусть начальная амплитуда равна A. Через n периодов амплитуда будет Ae^{-nd}. Подождем пока будет $e^{-nd} = e^{-1}$, т. е. амплитуда уменьшится в e раз (грубо — в 3 раза). Это будет тогда, когда $nd = 1$, т. е. число „периодов“, протекшее от начала процесса, станет равно

$$n = \frac{1}{d}.$$

Таким образом, обратная величина логарифмического декремента есть число периодов, по истечении которого амплитуда уменьшается в e раз.

Можно дать логарифмическому декременту другое физическое толкование. Пусть система колеблется. Вследствие затухания, ее энергия постепенно уменьшается. Пусть в некоторый момент система имеет энергию W_0, а через „период“ τ — энергию W_1. Как показывает простой расчет,

$$\frac{W_0 - W_1}{W} = 2d, \quad \text{где} \quad W = \frac{W_0 + W_1}{2}.$$

Удвоенный логарифмический декремент равен отношению убыли энергии за „период“ к среднему значению энергии за „период“.

Приведу некоторые числа. Хороший камертон имеет d порядка 1/10000. Это значит, что примерно через 10 тысяч колебаний его амплитуда уменьшится до $^1/_3$. Без специальных приемов[1] нельзя осуществить электрический контур с таким малым декрементом; здесь в лучшем случае добивались $d \approx 0{,}2$.

Конечно, изолированный камертон осуществить нельзя: его колебания передаются другим телам. Равным образом электрический контур всегда излучает волны. Теория показывает, что обусловленные этим потери можно приближенно учесть, как увеличение логарифмического декремента.

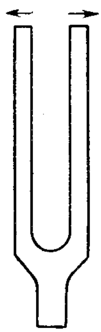

Рис. 38.

Камертон и замкнутый электрический контур излучают очень плохо. Чем это объясняется? Стержни камертона создают последовательность сгущений и разрежений воздуха, но стержни колеблются в противоположных фазах: в тот момент, когда один из стержней камертона движется вправо, другой движется влево (рис. 38). Происходит взаимное погашение излучений стержней (интерференция). Камертон излучает гораздо меньше, чем сумма энергий, которые излучала бы каждая из его ножек в отдельности. Совершенно такая же компенсация излучений отдельных элементов происходит в случае замкнутого электрического контура (рис. 39). Конечно, компенсация происходит не полностью; некоторое излучение остается. Для вопросов резонанса, воздействия внешней силы на контур, интересно знать, как зависит „частота" ω от затухания. Из (15) и (16) получаем:

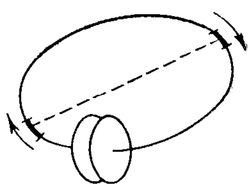

Рис. 39.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{d^2}{4\pi^2}}\,.$$

Таким образом, малое затухание изменяет „частоту" только во втором порядке. Пусть

$$\frac{d^2}{4\pi^2} \ll 1.$$

Тогда приближенно

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{d^2}{8\pi^2}\right).$$

Если, например, $d = 0{,}1$ (это *большой* логарифмический декремент), то частоты ω и ω_0 различаются всего на 1/8000. Таким образом,

[1] [См. 13-ую лекцию.]

даже при больших декрементах разница между ω и ω_0 еще ничтожна. В этой связи следует упомянуть о пьезокварцевых пластинках. Если заряжать обкладки такой пластинки, то она сжимается или расширяется; если ее сжимать, обкладки заряжаются. С пьезокварцем можно делать чудеса. Он позволяет осуществлять системы с чрезвычайно малым логарифмическим декрементом, например $d=1/50000$. Если логарифмический декремент кварца порядка 10^{-4}, то приблизительно через 10 тысяч колебаний амплитуда уменьшится до $^1/_3$. При частоте 10^6 колебаний в секунду это произойдет через $^1/_{100}$ секунды.

Вернемся к вопросу о том, возможны ли системы с отрицательным затуханием. Посмотрим, что это физически значит, к каким следствиям это приводит. Начнем с простой механической системы — маятника Фроуда. Это, как мы увидим, аналог самого простого типа генератора с катодными лампами, применяемого в беспроволочной телеграфии.

Маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал. Втулка захватывается трением, и маятник отклоняется. Напишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\mu\frac{d\varphi}{dt}-D\varphi+D_1.$$

Оно отличается от (6) членом D_1, выражающим момент силы трения, действующий на втулку со стороны вала. Этот момент зависит от их относительной угловой скорости $u-\dot{\varphi}$, т. е. при заданной угловой скорости вала u — от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$:

$$D_1=f(u-\dot{\varphi}).$$

Вид функции f должен быть задан опытом.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/XII 1930 г.)

Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фроуда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы.

В теории колебаний терминология еще плохо установилась даже в самых основных вещах. Величину $d=\delta\tau$ называют обычно логарифмическим декрементом, величину δ — коэффициентом затухания. Гаусс называл логарифмическим декрементом величину $\delta\tau/2$.