даже при больших декрементах разница между ω и ω_0 еще ничтожна. В этой связи следует упомянуть о пьезокварцевых пластинках. Если заряжать обкладки такой пластинки, то она сжимается или расширяется; если ее сжимать, обкладки заряжаются. С пьезокварцем можно делать чудеса. Он позволяет осуществлять системы с чрезвычайно малым логарифмическим декрементом, например $d = 1/50\,000$. Если логарифмический декремент кварца порядка 10^{-4}, то приблизительно через 10 тысяч колебаний амплитуда уменьшится до $^1/_3$. При частоте 10^6 колебаний в секунду это произойдет через $^1/_{100}$ секунды.

Вернемся к вопросу о том, возможны ли системы с отрицательным затуханием. Посмотрим, что это физически значит, к каким следствиям это приводит. Начнем с простой механической системы — маятника Фроуда. Это, как мы увидим, аналог самого простого типа генератора с катодными лампами, применяемого в беспроволочной телеграфии.

Маятник жестко скреплен со втулкой, насаженной на равномерно вращающийся вал. Втулка захватывается трением, и маятник отклоняется. Напишем дифференциальное уравнение движения маятника:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\mu\frac{d\varphi}{dt} - D\varphi + D_1.$$

Оно отличается от (6) членом D_1, выражающим момент силы трения, действующий на втулку со стороны вала. Этот момент зависит от их относительной угловой скорости $u - \dot{\varphi}$, т. е. при заданной угловой скорости вала u — от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$:

$$D_1 = f(u - \dot{\varphi}).$$

Вид функции f должен быть задан опытом.

ТРИНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/XII 1930 г.)

Затухающие и нарастающие колебания в линейной системе. Маятник Фроуда (продолжение). Ламповый генератор. Невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Нелинейная задача о системе с постоянным трением. Разрывная идеализация характеристики электронной лампы.

В теории колебаний терминология еще плохо установилась даже в самых основных вещах. Величину $d = \delta\tau$ называют обычно логарифмическим декрементом, величину δ — коэффициентом затухания. Гаусс называл логарифмическим декрементом величину $\delta\tau/2$.

Если δ отрицательно, формулы, полученные в прошлой лекции, остаются справедливыми, но весь процесс — существенно другой. Вместо затухания получается нарастание колебаний, идущее беспредельно. Вопрос заключается в том, существуют ли физические системы, у которых δ отрицательно, или это математическая фикция?

На предыдущей лекции мы получили для маятника со втулкой, насаженной на вращающуюся ось, нелинейное, дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + D\varphi = f(u - \dot{\varphi}). \qquad (1)$$

Из опыта мы знаем, что с ростом скорости трение в некотором интервале убывает:

$$f'(u) < 0.$$

Посмотрим сначала, что будет, если колебания очень малы. Тогда приближенно

$$f(u - \dot{\varphi}) = f(u) - f'(u)\dot{\varphi},$$

и уравнение (1) принимает вид

$$I\ddot{\varphi} + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi} + D\varphi = f(u).$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами, но оно имеет постоянную правую часть. Если $f(u) = 0$, то уравнение однородно. При этом существует решение $\varphi = 0$ — состояние равновесия. Если правая часть отлична от нуля, то существует равновесное решение

$$\varphi = \frac{f(u)}{D},$$

причем $\dot{\varphi} = 0$ (когда вал вращается, положение равновесия смещено).

Мы хотим исследовать колебания вокруг нового положения равновесия. Положим для этого

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{f(u)}{D}.$$

Для φ_1 мы получаем однородное уравнение:

$$I\ddot{\varphi}_1 + [\mu + f'(u)]\dot{\varphi}_1 + D\varphi_1 = 0. \qquad (2)$$

Вместо колебания вокруг нулевого положения, которое было при $u=0$, теперь происходит колебание вокруг смещенного положения равновесия (рис. 40). Общее решение уравнения (2) таково:

$$\varphi = \frac{f(u)}{D} + Ae^{-\frac{1}{2}[\mu + f'(u)]t} \cos(\omega t + \psi).$$

Если $f'(u) > 0$ или если $f'(u) < 0$, но по абсолютной величине меньше, чем μ, то ничего нового нет, колебания затухают. Но возможно

$$\delta' = \frac{1}{2}[\mu + f'(u)] < 0.$$

Тогда происходит *нарастание* колебаний. Этот случай несет в себе очень большие, существенные изменения по сравнению со случаем затухания колебаний. Физически нет возможности (принципиально!) ограничиться при наличии нарастания линейным уравнением. В случае же затухающих колебаний это возможно для большого круга задач.

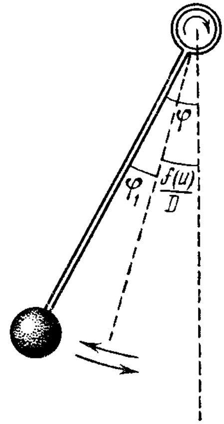

Рис. 40.

Обратимся к другому примеру. Постараемся построить упрощенное дифференциальное уравнение катодного генератора. Но сначала повторим в двух словах некоторые общие сведения.

Изобретение катодной трубки[1] внесло переворот в радиотехнику. Действие катодной трубки основано на одном известном физическом явлении — эффекте Ричардсона. Металлический (вольфрамовый) катод нагрет примерно до 2500°. При этом с поверхности металла выходят электроны. Внутри металла всегда имеются свободные электроны, но выскочить при низкой температуре они не могут, так как есть препятствующее этому силовое поле. При нагревании металла скорости электронов увеличиваются, и некоторые из них могут выскочить. Электроны заряжены отрицательно, и при положительном напряжении на аноде все электроны, выделяемые металлом, летят на анод. Если напряжение на аноде отрицательно, то ток равен нулю (рис. 41). Но это слишком упрощенная картина. На самом деле ток меняется непрерывно (пунктирная

[1] [По современной терминологии — электронной лампы. Генератор также называется теперь не катодным, а ламповым.]

кривая на рис. 41). Это объясняется не принятым нами сначала во внимание взаимодействием электронов между собой. Явление это называется эффектом пространственного заряда.

Можно ввести третий электрод — сетку (рис. 42). Введение сетки — громадное достижение. На движение электронов сильнее всего влияет поле около катода (нити). Анод заряжен положительно. Сетка близка к катоду. Достаточно подать на сетку малый потенциал, чтобы около катода получилось сильное поле. Изменяя напряжение на сетке, мы сильно изменяем анодный ток.

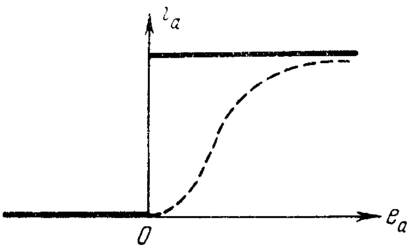

Рис. 41.

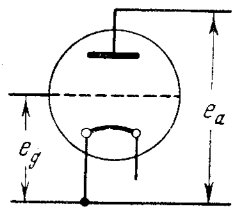

Рис. 42.

Сила тока зависит от напряжения на сетке и от напряжения на аноде. Эта зависимость имеет такой вид:

$$i_a = f(e_g + De_a),$$

где

$$D \ll 1.$$

Это значит, что действие анода на много слабее, чем действие сетки: анодом „перехватывается“ лишь часть силовых линий, исходящих от катода. Величину D иногда называют „прохват“ (по-немецки Durchgriff)[1].

Вот как, в общих чертах, действует катодная лампа. С ней можно сделать бесконечно много разных вещей. Нас сейчас интересует схема, показанная на рис. 43. Это одна из основных схем, которыми пользуется теперь беспроволочная телеграфия. Ее впервые построили с другой целью, но оказалось, что в ней самопроизвольно возникают незатухающие колебания. Подбирая L и C, можно получить колебания с различным собственным периодом.

---

[1] [В настоящее время для величины D общепринятым является термин „проницаемость“].

Нам нужно написать дифференциальное уравнение этой схемы. Опыт показывает, что в ней могут происходить колебания, и теория должна позволить нам овладеть этим явлением (вначале им владели плохо). Уравнение мы составим с помощью метода, подобного тому, который используется для цепей постоянного тока, — метода Кирхгофа.

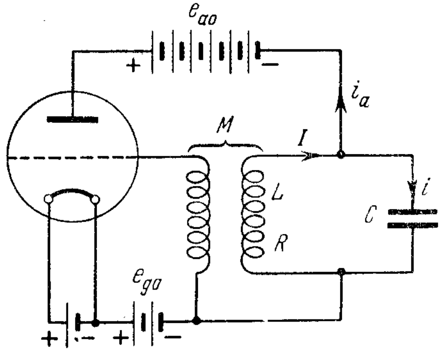

Рис. 43.

Обход по колебательному контуру дает уравнение

$$IR = -L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}$$

При этом $i = \frac{dQ}{dt}$ (i — ток в ветви с конденсатором), но $i \neq I$, так как есть разветвление. Здесь

$$i = I - i_a,$$

и, следовательно,

$$\frac{dQ}{dt} = I - i_a. \qquad (4)$$

Продифференцируем (3) и подставим в (4). Мы получаем:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{i_a}{C},$$

или

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\delta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_a, \qquad (5)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\delta = \frac{R}{L}.$$

Из уравнения (5) еще ничего получить нельзя. Все дело в правой части. Что такое i_a? Существует определенная характеристика лампы (зависимость анодного тока от управляющего напряжения), которая должна быть задана на основе экспериментальных данных. Пусть батареи анода и сетки имеют электродвижущие силы e_{a0} и e_{g0}. Анодное напряжение складывается из электродвижущей силы батареи и электродвижущей силы $-L\frac{dI}{dt}$ в катушке колебательного контура. Магнитное поле тока в контуре пронизывает сеточную катушку, и в ней наводится электродвижущая сила $-M\frac{dI}{dt}$. Таким образом,

$$i_a = f\left[e_{g0} - M\frac{dI}{dt} + D\left(e_{a0} - L\frac{dI}{dt}\right)\right]. \tag{6}$$

Коэффициент M может быть как положительным, так и отрицательным. Его знак очень существенен. Если обе катушки навиты одинаково (рис. 44, *а*), то M положительно; если одна навита налево, другая — направо (рис. 44, *б*), то M отрицательно.

Из (5) и (6) получаем:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f[e_{g0} - M\dot{I} + D(e_{a0} - L\dot{I})]. \tag{7}$$

Мы решили первую задачу — установили дифференциальное уравнение.

Рис. 44.

Схема, которая была только что изложена, чрезвычайно упрощена.

1. Если рабочая точка лампы попадает в область $e_g > 0$, то электроны частью попадают на сетку. Мы не принимаем во внимание этот ток сетки. В настоящее время работают так, что сеточный ток очень мал. Но в технике иногда приходится с ним считаться.

2. Когда мы писали напряжение на аноде в виде $e_{a0} - L\dot{I}$, мы не приняли во внимание составляющую RI напряжения на контуре. Легко видеть, что чем меньше логарифмический декремент контура, тем меньше эта составляющая по сравнению с $-L\dot{I}$. Если предположить, что колебания близки к синусоидальной форме $A\cos\omega t$, то

$$RI \sim RA, \quad L\dot{I} \sim A\omega L,$$

и отношение этих величин будет порядка

$$\frac{R}{\omega L} = \frac{d}{\pi}.$$

Таким образом, когда R/L мало по сравнению с ω, т. е. логарифмический декремент контура мал, составляющей RI можно пренебречь. Если бы мы приняли ее во внимание, то это очень усложнило бы задачу. Но для линейного случая можно провести и такое, более полное, рассмотрение.

Уравнение (7) — опять нелинейное уравнение, но вблизи равновесия можно свести задачу к линейному уравнению с постоянными коэффициентами так же, как в задаче о маятнике Фроуда. Можно написать приближенно, для малых $\dot{I}$, разлагая функцию f в ряд и отбрасывая члены порядка выше первого:

$$\ddot{I} + 2\delta \dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 f(e_{g0} + De_{a0}) - \omega_0^2 f'(e_{g0} + De_{a0})(M + DL)\dot{I}.$$

Это линейное уравнение с постоянными коэффициентами и с постоянной правой частью.

Какие здесь возможны случаи? Если коэффициенты положительны, то нет ничего нового по сравнению с обычным затухающим контуром. Если коэффициент при первой производной от тока отрицателен, то будет нарастание колебаний. Где граница между обоими случаями?

Производная $f'(e_{g0} + De_{a0})$ от анодного тока — это крутизна характеристики S в данной рабочей точке (трубки в основном характеризуются двумя постоянными: S и D). При

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) > 0$$

имеет место затухание, но при

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) < 0 \tag{8}$$

будет нарастание колебаний. Таким образом, равенство

$$2\delta + \omega_0^2 S(M + DL) = 0$$

дает границу самовозбуждения генератора.

Когда имеет место (8), генератор сам раскачивается. Это неравенство можно написать немного иначе:

$$R + \frac{(M + DL)S}{C} < 0. \tag{9}$$

Отсюда следует одно интересное замечание. Так как

$$L > 0, \quad C > 0, \quad D > 0, \quad S > 0,$$

то для нарастания колебаний необходимо, чтобы было

$$M < 0,$$

т. е. нужно связать катушки вполне определенным образом (если одну катушку перевернуть, колебания пропадут). Чтобы величина $2\delta + \omega_0^2 S(M + DL)$ была отрицательна, нужно, кроме того, связать катушки достаточно сильно. Формула (9) — одна из основных формул радиотелеграфии.

Сделаем общее замечание. При $\delta < 0$ имеем:

$$x = \mathrm{const} + Ae^{+|\delta| t} \cos(\omega t + \varphi). \tag{10}$$

Нарастающие колебания получаются, если $A \neq 0$. Имеется положение равновесия $x = \mathrm{const}$, но равновесие — неустойчивое. Пусть вначале x равно const + сколь угодно малая величина. Это и значит, что A отлично от нуля. Дальнейший процесс описывается уравнением (10). Система все дальше и дальше отходит от положения равновесия. Смотря потому, будет ли $\delta < 0$ или $\delta > 0$, мы имеем дело с неустойчивым или с устойчивым положением равновесия.

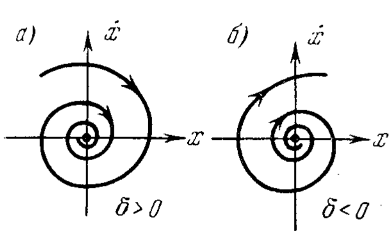

Рис. 45.

Уже при рассмотрении консервативной системы мы встречали устойчивые и неустойчивые состояния равновесия[1]. Они были связаны с определенными типами особых точек на фазовой плоскости. В случае центра равновесие устойчиво, в случае седла — неустойчиво. Применим здесь тот же подход — рассмотрим фазовую плоскость. Она будет теперь иметь совсем другой вид, чем в случае консервативной системы. Здесь нет континуума замкнутых интегральных кривых, а есть семейство спиралей. В консервативных системах в окрестности устойчивого равновесия колебания периодические. Здесь же колебания около устойчивого равновесия обязательно затухают, и система стремится возвратиться в равновесное состояние (рис. 45, *а*). Если имеет место неустойчивость, то система совершает нарастающие колебания и беспредельно удаляется от состояния равновесия (рис. 45, *б*). Оба эти случая, как вы видели, могут осуществиться на практике. Особые точки типа, изображенного на рис. 45, *а* и *б*, называются *фокусами* (устойчивым и неустойчивым). Движение по интегральным кривым происходит по часовой стрелке.

---

[1] [См. 9-ую лекцию.]

Всякое исследование предполагает идеализацию. Написав линейное уравнение, мы ограничились малыми колебаниями. При $\delta > 0$ уравнение, которое мы писали, полностью могло охватить проблему. Здесь в течение всего процесса от $t=0$ и до $t=\infty$ у нас нет увеличения амплитуды. Если предпосылки малости выполнены вначале, то они еще лучше выполняются в дальнейшем. Линейное уравнение давало, таким образом, ответ на вопрос о том, каков *весь* процесс. В случае, когда $\delta < 0$, дело обстоит совсем иначе. Если даже задать такие начальные условия, при которых отклонение мало, то тем не менее наверняка наступит момент, когда наши предпосылки сделаются неправильными. Таким образом, в случае $\delta < 0$ линейное уравнение *принципиально* не может описывать процесс в его целостности, на неограниченном отрезке времени. При $\delta < 0$ процесс автоматически переходит в такую область, где необходимо исследование с помощью *нелинейного* уравнения. Абсурдно пользоваться линейным уравнением тогда, когда нарушена лежащая в его основе предпосылка; между тем процесс автоматически ведет к ее нарушению.

Речь шла о линейном однородном уравнении с *постоянными* коэффициентами. Как обстоит дело с другими линейными уравнениями, например с переменной правой частью? Могут ли они дать ответ на вопрос о том, что происходит в ламповом генераторе? Я утверждаю, что не могут.

Такие уравнения соответствуют системам, на которые действуют внешние силы, зависящие заданным образом от времени. Нас же здесь интересуют такие системы, которые *сами* определяют все элементы происходящего в них процесса. Дифференциальные уравнения таких систем не содержат времени явно. Такие системы называют *автономными*.

Если автономная система подчиняется *линейному* дифференциальному уравнению, то в общем случае оно имеет вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = c,$$

причем все a_i, а также c — постоянные (вообще говоря, коэффициенты a_i, линейного уравнения могут зависеть от t). Движения линейных автономных систем либо затухают, либо нарастают. Ни одно не ведет к установившемуся периодическому процессу. Говоря точнее, незатухающие колебания могут получиться в линейной системе только тогда, когда система консервативна. Но этот случай для нас сейчас мало интересен. В консервативной системе нет обмена энергии, характерного для генератора: генератор излучает, энергия колебаний пополняется за счет энергии батареи.

Все линейные системы имеют следующие свойства. Если y_1 — решение, то Cy_1 (C — постоянная) тоже решение. Если y_1 и y_2 — решения, то y_1+y_2 — тоже решение. В линейной системе периодические решения могут быть только в отсутствие обмена энергии того типа, о котором только что говорилось (система консервативна). При этом амплитуда зависит всецело от начальных условий. Она не определяется самой системой. В генераторе получаются незатухающие колебания, амплитуда которых, как мы увидим[1], не зависит от начальных условий.

Таким образом ясно, что овладеть процессами в генераторе с помощью линейных уравнений невозможно.

Очень долго хотели подойти к незатухающим колебаниям „линейно". Пришлось кардинально пересмотреть весь подход, отказаться от линейности. Правда, некоторые вопросы, относящиеся к генераторам, можно решить с помощью линейных уравнений. Я имею в виду вопросы устойчивости или неустойчивости равновесия. Но на чем остановится нарастание колебаний, какая установится амплитуда, — об этом на основе линейного уравнения сказать ничего нельзя. Для этого нужно перейти к нелинейным уравнениям, и здесь возникает необъятный круг вопросов. Я не могу говорить о них подробно, но я хотел бы все же их затронуть.

Чего можно ожидать в случае, если положение равновесия неустойчиво? Возможен уход изображающей точки в бесконечность. Возможен уход в другое устойчивое состояние равновесия. Наконец, — и это для нас физически самое интересное — возможно стремление к замкнутой кривой на фазовой плоскости, т. е. стремление к периодическому режиму. Каждому незатухающему колебательному процессу соответствует изолированная замкнутая кривая (рис. 46), к которой стремятся соседние кривые. Такая кривая чужда линейным уравнениям. Она называется *предельным циклом* Пуанкаре. На связь предельных циклов с незатухающими колебаниями указал А. А. Андронов. Начав с исследования нескольких простых случаев, он пришел к общему выводу о том, что математическим (геометрическим) образом незатухающих колебаний является предельный цикл.

---

[1] [См. 14-ую лекцию.]

Вопрос о фактическом нахождении предельных циклов оставим в стороне. Это — трудный вопрос. Но важно знать, что искать незатухающие колебания в неконсервативных системах — это на математическом языке значит искать предельные циклы.

Фундаментальное отличие от консервативных систем заключается здесь в том, что энергия системы сохраняется, несмотря на то, что система непрерывно затрачивает энергию. Откуда же берется энергия для восполнения потерь?

В маятнике Фроуда энергия поступает в систему вследствие вращения вала. В случае генератора источником энергии является анодная батарея. Излучаемая энергия в конечном итоге поставляется батареей.

Займемся задачей об установлении колебаний в ламповом генераторе. Задача нелинейная, и для того, чтобы можно было решить

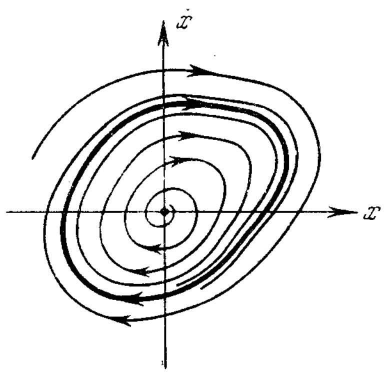

Рис. 46.

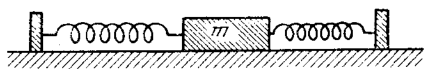

Рис. 47.

ее до конца, мы очень сильно ее упростим, допустим сильную идеализацию.

Для иллюстрации метода начнем с нелинейной задачи о затухающих колебаниях. Возьмем случай постоянного трения (это хорошо известный пример).

Пусть на горизонтальном столе лежит масса, привязанная к двум пружинам (рис. 47). Здесь очень неплоха следующая идеализация: сила трения по абсолютной величине постоянна и равна λmg. Сила трения положительна или отрицательна, смотря по тому, движется ли масса влево или вправо (так называемое *сухое* трение).

Задача математически ставится так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}+kx&=-\lambda mg \quad \text{при } \dot{x}>0; \\ m\ddot{x}+kx&=+\lambda mg \quad \text{при } \dot{x}<0. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, нужно решить *два* уравнения, причем одно сменяет другое, когда меняется знак $\dot{x}$. В этом заключается нелинейность задачи.

Найдем решение первого уравнения. В силу этого решения скорость $\dot{x}$ в некоторый момент обращается в нуль. Дальше скорость будет отрицательной. Нужно перейти в этот момент ко второму уравнению и взять для него в качестве начальных условий те условия, которые получились в конце движения, описанного первым уравнением. Таким образом, мы упрощаем задачу: вместо чрезвычайно трудной задачи, задаваемой нелинейным уравнением, решаем две задачи, задаваемые линейными уравнениями. Потом мы припасовываем их, т. е. составляем решение нелинейной задачи из отдельных кусков решений линейных задач.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу о колебании стрелки, опирающейся на иголку; здесь также имеет место сухое трение.

Решения уравнений (11) изображают незатухающие синусоидальные колебания вокруг сменяющихся положений равновесия (рис. 48). При этом предполагается, что начальное отклонение превосходит по абсолютной величине $\lambda mg/k$ (в противном случае упругая сила уравновешивается силой трения покоя и тело остается в равновесии). В результате чередования кусков синусоидальных колебаний около двух положений равновесия движение затухает, причем легко видеть, как уменьшаются последовательные амплитуды. Если в начале амплитуда равна x_0, то последующие амплитуды будут

$$x_0 - 2\lambda\frac{mg}{k}, \quad x_0 - 4\lambda\frac{mg}{k}, \ \ldots$$

Наступит момент, когда масса попадет в полосу

$$|x| < \lambda\frac{mg}{k},$$

и на этом движение прекратится. В противоположность линейному случаю, где покой наступает через бесконечное время, здесь он наступает через конечное время.

Вы видите, как просто и изящно здесь удается справиться с нелинейностью.

Представим себе другой случай. Пусть „трение“ направлено по движению, причем величина трения попрежнему постоянна. Решая задачу таким же способом, мы увидим, что амплитуда будет неограниченно расти. Пусть теперь, наряду с этим „трением", есть вязкое трение, пропорциональное скорости и направленное против движения. Метод остается в силе, и задачу можно решить очень легко.

Случай, о котором идет речь, осуществляется в ламповом генераторе при соответствующей идеализации характеристики.

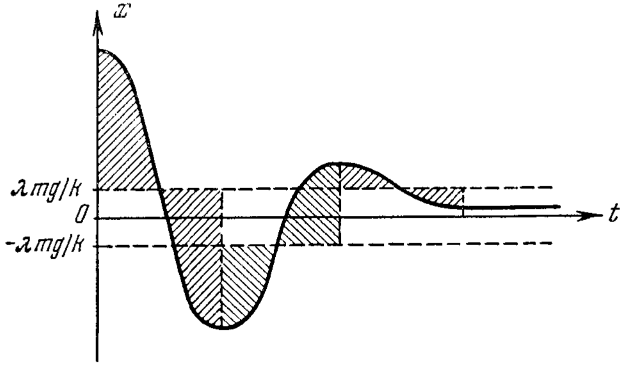

Рис. 48.

Если характеристика (рис. 49) очень крутая и если размах напряжения на сетке достаточно велик, то бо́льшая часть пути изображающей точки приходится на горизонтальные части характеристики. Можно поэтому идеализировать характеристику так, как показано жирными прямыми на рис. 49. Получается задача, аналогичная той, которую мы только что решали: два сменяющиеся линейные уравнения с постоянными правыми частями.

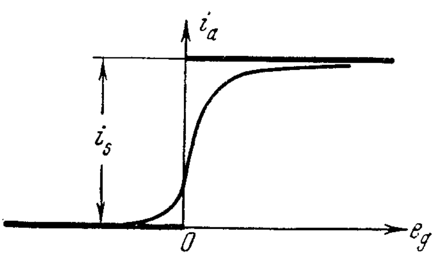

Рис. 49.

Мы рассмотрим в следующей лекции такой упрощенный ламповый генератор. Окажется, что в нем возможен периодический процесс, и мы найдем его амплитуду. Это не та амплитуда, которая действительно устанавливается, но для ответа на ряд принципиальных вопросов этого упрощенного рассмотрения достаточно.