

ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/XII 1930 г.)

Идеализированный ламповый генератор. Периодическое движение. Его устойчивость. Процесс установления колебаний. Предел применимости идеализации. Изменение мощности генератора при параллельном включении нескольких ламп. Коэффициент полезного действия генератора. Линейная система с одной степенью свободы; случай, когда движения аperiodичны. Действие внешней периодической силы на линейную систему с одной степенью свободы; предварительное понятие о резонансе.

В маятнике Фруда и в ламповом генераторе происходит возрастание колебаний, положение равновесия неустойчиво. Линейное уравнение не может дать ответа, каков будет установившийся режим. Мы вступили, таким образом, в область нелинейных колебаний и нелинейных уравнений.

Процесс, происходящий в ламповом генераторе, нельзя охватить одним линейным дифференциальным уравнением, но, как уже было сказано, его можно описать в некоторых случаях с помощью двух различных линейных уравнений. При этом приходится работать с разрывными функциями. Этот прием идеализации приводит в некоторых случаях к хорошим, проверенным на опыте результатам.

Остановимся на практически исключительно важной задаче о том, каковы установившиеся колебания в ламповом генераторе. Для того, чтобы решить эту задачу, характеристику лампы мы принимаем разрывной. Мы идеализуем задачу так: когда сеточное напряжение отрицательно, анодный ток равен нулю; когда сеточное напряжение положительно, анодный ток равен току насыщения. Такая идеализация возможна в том случае, когда размахи сеточного напряжения очень велики по сравнению с интервалом сеточного напряжения, в котором происходит заметное нарастание анодного тока. Когда этот интервал пробегается очень быстро, такая идеализация качественно правильна и позволяет уяснить себе механизм явлений, хотя количественно она недостаточна.

В рассматриваемом ламповом генераторе (рис. 43)

$$e_g - e_{g0} = -M \frac{dI}{dt}.$$

Мы уже видели, что равновесие может быть неустойчиво при $M < 0$, т. е. если напряжение на сетке положительно тогда, когда

ток I в колебательном контуре нарастает. При сделанной идеализации характеристики (рис. 49) анодный ток:

$$i_a = i_s > 0 \quad \text{при} \quad \frac{dI}{dt} > 0;$$

$$i_a = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dI}{dt} < 0.$$

Мы получаем следующие два дифференциальные уравнения:

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = \omega_0^2 i_s, \quad \text{при} \quad \dot{I} > 0; \quad (1)$$

$$\ddot{I} + 2\delta\dot{I} + \omega_0^2 I = 0 \quad \text{при} \quad \dot{I} < 0. \quad (2)$$

Как связать их решения? Начнем с такого состояния, при котором $\dot{I} > 0$. При этом нужно пользоваться уравнением (1). В какой-то момент \dot{I} обращается в нуль и меняет знак и нужно перейти к уравнению (2). Ни ток, ни напряжение не могут иметь скачков. Поэтому в момент, когда мы переходим к уравнению (2), мы должны взять за начальные такие значения I и \dot{I} , которые получаются в этот момент из уравнения (1). При максимальном (по абсолютной величине) отрицательном значении \dot{I} производная \dot{I} опять проходит через нуль и становится положительной. Нужно опять прибегнуть к уравнению (1), соблюдая условие непрерывности I и \dot{I} , и т. д.

Оба уравнения дают затухающие колебания „периода“

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

но возле различных положений равновесия: уравнение (2) — около нуля, уравнение (1) — около $I = i_s$ (рис. 50). Если в начальный момент $I = I_0 > 0$, $\dot{I} = 0$ (максимум тока), то через полколебания (через время $\tau/2$) мы будем иметь ток

$$I' = -I_0 e^{-\delta\tau/2},$$

а после полного колебания (еще через время $\tau/2$) ток будет равен

$$I_1 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s (1 + e^{-\delta\tau/2}). \quad (3)$$

Периодическое повторение, т. е. незатухающее колебание, получится при условии, что

$$I_1 = I_0. \quad (4)$$

Если это возможно, то система уравнений (1) и (2) допускает периодическое решение. Требуя, чтобы наряду с (3) выполнялось условие (4), мы получаем

$$I_0 = I_0 e^{-\delta\tau} + i_s (1 + e^{-\delta\tau/2}),$$

откуда

$$I_0 = i_s \frac{1 + e^{-\delta\tau/2}}{1 - e^{-\delta\tau}}. \quad (5)$$

Такова амплитуда установившегося колебания. Она определяется параметрами системы и не зависит от начальных условий. Такая установившаяся амплитуда — нечто существенно новое по отношению к линейным системам.

Если $\delta\tau$ мало по сравнению с единицей, то приближенно

$$I_0 = \frac{2i_s}{\delta\tau}. \quad (6)$$

При этом I_0 очень велико по отношению к току насыщения i_s . Каждое колебание состоит из двух половин „затухающих синусоид“. Чтобы количественно охарактеризовать отличие колебания от синусоидального,

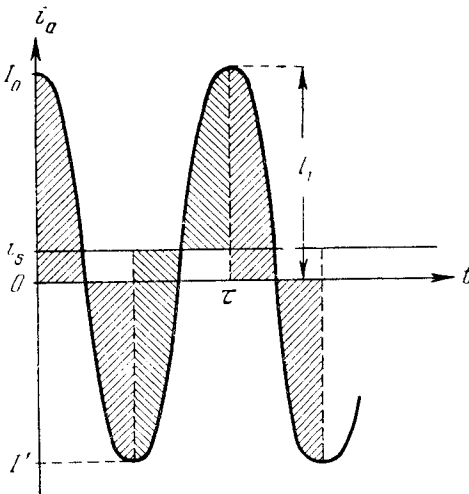


Рис. 50.

нужно разложить процесс в ряд Фурье. При $\delta\tau \ll 1$ колебания очень близки к синусоидальным.

С помощью уравнений (1) и (2) легко разрешить следующие вопросы:

1. Устойчиво ли найденное периодическое решение? Может случиться, что существует периодическое решение, но оно не соответствует реальному периодическому процессу. Нужно ввести новое понятие — понятие *устойчивого* периодического движения. Вопрос заключается в следующем: если слегка изменить начальные условия, то останется ли движение вблизи периодического или уйдет от него? Реальным периодическим процессам соответствуют только устойчивые периодические движения.

2. Устанавливается ли найденное периодическое колебание? (Мы доказали *возможность* периодического режима, но мы не доказали, что этот режим действительно устанавливается при любых начальных условиях).

Построим график I_1 как функции I_0 , т. е. график уравнения (3). Это будет прямая линия AB (рис. 51). Ее точка пересечения с прямой $I_1 = I_0$ соответствует найденному периодическому решению. Если мы начнем с произвольного начального значения I'_0 , меньшего, чем амплитуда периодического решения, то мы найдем значения амплитуды через период, через два периода и т. д. построением, показанным на рис. 51. Если в начале амплитуда больше значения, соответствующего периодическому решению (например, I''_0 на рис. 51), происходит аналогичный процесс с обратной стороны. Мы видим, что при любой начальной амплитуде точка, изображающая колебание генератора стремится к точке пересечения, показанной на рис. 51. Таким образом, мы приходим к выводу, что периодическое решение не только существует, но является *устойчивым* периодическим решением.

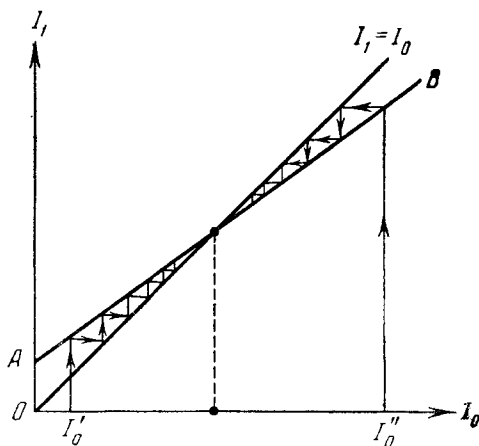


Рис. 51.

Откуда бы ни начался процесс в рассматриваемой схеме; при сделанной идеализации он обязательно придет к периодическому решению (5). На практике бывают случаи, когда периодические колебания существуют, но они устойчивы только „в малом“, только по отношению к достаточно малым изменениям начальных условий. С этим связаны известные явления „срыва“ в ламповом генераторе. Устойчивость „в малом“ и „в большом“ (т. е. по отношению к любому изменению начальных условий) — разные вещи. Положение равновесия может быть устойчиво „в большом“ (рис. 52, а) или только „в малом“ (рис. 52, б). Такие же случаи возможны и для периодических решений.

При сделанной идеализации лампового генератора получилась чрезвычайно простая математическая теория. Те же, в сущности,

рассуждения можно провести на фазовой плоскости (I, \dot{I}) и получить на ней замкнутую кривую — предельный цикл, — изображающую периодическое решение. На нее навиваются другие интегральные кривые. Это соответствует тому подходу, о котором уже говорилось¹. Такой подход здесь не сложнее и, быть может, нагляднее. Если усложнить идеализацию, исследование на фазовой плоскости становится, по видимому, необходимым.

Сравним рассмотренный идеальный случай с реальной схемой; сравним наши выводы с результатами опытов.

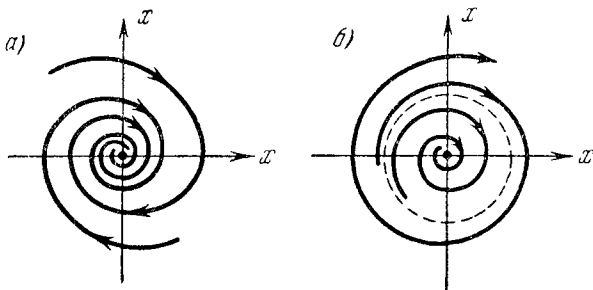


Рис. 52.

Поставим несколько вопросов, относящихся к зависимости установившихся колебаний от параметров. Вопросы эти сами напрашиваются.

Формулу (6) можно переписать в таком виде:

$$I_0 = \frac{2i_s}{d}, \quad (7)$$

где d — логарифмический декремент контура:

$$d = \delta\tau = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (8)$$

Будем уменьшать беспредельно сопротивление контура R . Тогда согласно (7) и (8) нет предела увеличению амплитуды колебаний I_0 . Но в действительности такой предел существует (это видно хотя бы из того, что при беспредельном росте I_0 беспредельно растет мощность $RI_0^2/2$, поглощаемая в контуре).

Никакую идеализацию нельзя продолжать „до бесчувствия“. Нужно идеализировать со смыслом, помнить об ограничениях.

¹ [См. 9-ую лекцию.]

Очень распространена склонность верить в формулу „до конца“, в то время как всегда нужно уяснить себе, до каких пределов та или иная формула справедлива.

Мы молчаливо предположили, что напряжение на аноде

$$e_a = e_{a0} - LI\dot{}$$

все время положительно.

Здесь $LI\dot{}$ — напряжение на индуктивности. Если колебания почти синусообразны, оно имеет амплитуду, равную ωLI_0 . Если $\delta \rightarrow 0$, эта амплитуда возрастает, и напряжение на аноде перестает быть все время положительным. Оно остается все время положительным в лучшем случае при

$$e_{a0} - \omega LI_0 = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим этот оптимальный случай. Из (7), (8) и (9) получаем:

$$R = \frac{2Li_s}{\pi C e_{a0}}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что R нельзя делать бесконечно малым. Если взять R меньше значения (10), то в некоторые моменты анодного тока не будет, если даже напряжение на сетке положительно, и тогда наша теория не годится.

Очень легко изменить схему так, чтобы при R , меньшем, чем (10), опять войти в нужную область:

$$e_{a0} - \omega LI_0 > 0.$$

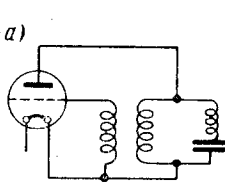
Это можно сделать путем перераспределения индуктивности контура (рис. 53, а) или добавления индуктивности в анодную цепь (рис. 53, б).

Поставим теперь вопрос: как „вытянуть“ из схемы возможно больше энергии? Сюда же относится такой вопрос. Представьте себе, что вы не меняете схему, но включаете в нее две тождественные лампы параллельно (рис. 54). Ясно, что при прочих равных условиях анодный ток i_a удваивается. Тогда колебательный ток тоже удваивается, а энергия увеличивается в 4 раза. Возьмите три лампы, — энергия увеличится в 9 раз и т. д. Но ведь мощность, отдаваемая батареей, растет пропорционально анодному току, т. е. числу ламп. Получается парадокс.

Его разрешение состоит в следующем. Если вначале лампа использована полностью, т. е. так что выполняется условие (9),

то для двух ламп теория уже не годится, так как $e_{a0} - \omega L \cdot 2I_0$ будет отрицательно. Для того, чтобы она оставалась справедливой, нужно увеличить R вдвое. Но если при включении второй лампы вы увеличите R вдвое, то энергия увеличится только вдвое. Итак, если лампа была использована полностью, то при добавлении второй лампы нужно изменить схему. Удвоением числа ламп действительно можно учетверить энергию, но только в том случае, если до этого лампы не были полностью использованы.

Интересен коэффициент полезного действия лампового генератора. В среднем за период батарея отдает мощность



$$W = \frac{e_{a0} i_s}{2},$$

а контур потребляет мощность

$$W_0 = \frac{I_0^2 R}{2}$$

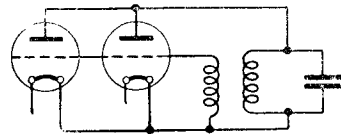
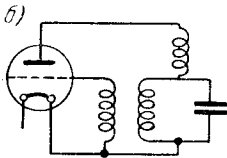


Рис. 53.

Рис. 54.

(полезная мощность). Под коэффициентом полезного действия здесь надо понимать

$$\eta = \frac{W_0}{W}.$$

При наибольшем токе, совместимом с условием применимости нашей теории, т. е. при выполнении условия (9), имеем:

$$\eta = \frac{2}{\pi} \approx 64\%.$$

Это — совершенно недостаточный коэффициент полезного действия. Для того, чтобы его увеличить, нужно изменить режим работы лампы. В этом направлении нет предела, нет принципиальных трудностей. Можно достигнуть без затруднений коэффициента полезного действия 97—98%.

Почему у нас амплитуда I_0 не зависит от M ? Из-за взятой нами исключительной характеристики. Мы приняли, что значение

анодного тока определяется исключительно *знаком* напряжения на сетке. Конечно, в случае реальной характеристики амплитуда тока зависит от величины коэффициента взаимной индукции.

На этом мы закончим рассмотрение систем, совершающих незатухающие колебания.

Вернемся к линейному уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решая его подстановкой

$$x = e^{mt},$$

мы получаем для t характеристическое уравнение

$$m^2 + 2\delta m + \omega_0^2 = 0$$

с корнями

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Может случиться, что $\omega_0 < \delta$. Тогда оба корня действительны. Они оба положительны, если $\delta < 0$, и оба отрицательны, если $\delta > 0$. Пусть имеет место последний случай. Обозначим:

$$m_1 = -\lambda_1, \quad m_2 = -\lambda_2.$$

Тогда

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}, \quad (11)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Движение является *аперiodическим* (неколебательным).

A и B — произвольные постоянные. Значения $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0$ можно задать как угодно. При этом

$$x_0 = A + B,$$

$$\dot{x}_0 = -\lambda_1 A - \lambda_2 B.$$

Пусть начальные условия таковы, что A и B имеют один и тот же знак. Тогда x не обращается в нуль ни при каком конечном t . В самом деле, $x = 0$ только если

$$-\frac{A}{B} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t};$$

но это равенство не может выполняться, так как левая часть отрицательна, а правая — положительна. Таким образом, x асимптотически стремится к нулю, монотонно убывая.

Если A и B имеют различные знаки, x может один раз обратиться в нуль при конечном t .

Рассмотрим последний случай, когда

$$\delta = \omega_0, \quad \lambda_1 = \lambda_2.$$

При этом решение (11) принимает вид

$$x = Ae^{-\lambda t}. \quad (12)$$

Если мы захотим приспособить такое решение к начальным условиям, то нам нехватит одной постоянной интегрирования. Не трудно, однако, показать, что в этом специальном случае, наряду с решением вида (12), имеется решение вида $te^{-\lambda t}$ и общее решение таково:

$$x = Ae^{-\lambda t} + Bte^{-\lambda t}.$$

В нем опять имеются две независимые константы, и его можно приспособить к любым начальным условиям.

Случай, когда λ_1 и λ_2 почти равны друг другу, и случай, когда они в точности равны, физически близки друг другу. Замечу, что этот случай важен в теории измерительных приборов. Часто требуется, чтобы измерительный прибор как можно быстрее приходил в положение равновесия. Оказывается, это требование выполняется как раз тогда, когда характеристическое уравнение имеет равные корни.

При $\delta < 0$ имеем:

$$x = Ae^{m_1 t} + Be^{m_2 t},$$

т. е. x представляет собой аperiodически возрастающую величину. Если система выведена из положения равновесия, то со временем x растет беспредельно. Здесь — опять неустойчивое положение равновесия (а значит, опять линейное дифференциальное уравнение не может полностью описать процесс). Соответствующая ему особая точка называется *неустойчивым узлом* (рис. 55, а). Может быть и устойчивый узел ($m_{1,2} < 0$, рис. 55, б).

Перейдем к поведению колебательных систем под действием внешних сил. Этот вопрос — один из основных в теории колебаний. Мы ограничимся линейными системами.

Мы рассматривали маятник, груз на пружине, балку, контур с емкостью и индуктивностью. Как ведут себя такие системы под действием сил, заданных как функция времени? Основное, заме-

чательное явление, которое при этом наблюдается, — это явление *резонанса*.

Мост можно рассматривать в первом приближении, как систему с одной степенью свободы. Ритмическая (периодическая) сила возникает, например, тогда, когда по нему в ногу идут войска.

Всякий кабель в первом приближении — цепь с емкостью и индуктивностью. Периодическая сила возникает тогда, когда кабель питается от машины переменного тока.

Во всех этих случаях, пока частота внешней силы p значительно меньше собственной частоты системы ω_0 , колебания слабые. Пусть амплитуда внешней силы остается постоянной, но меняется ее частота. Когда p становится близка к ω_0 , начинается сильная раскочка. Мы называем это явление резонансом. Если p значительно превышает ω_0 , опять все успокаивается.

Пусть некоторая периодическая сила дает амплитуду смещения, скажем, 1 мм. При неизменности амплитуды внешней силы изменение ее частоты на 30% может увеличить амплитуду смещения, скажем, до 1 м. Генератор электродвижущей силы в 1000 вольт может создать в кабеле напряжение в 10 000—20 000 вольт. При резонансе колебания могут иметь другой *порядок* величины, чем в отсутствие резонанса.

Резонанс может быть весьма опасным. Случалось, что вследствие резонанса разрывались валы пароходов. В радиотехнике резонанс играет положительную роль. Он применяется для того, чтобы приемник сильно реагировал на определенную частоту, и дает колоссальное увеличение чувствительности для данной частоты.

Резонанс играет большую роль и в оптике, в явлениях дисперсии и абсорбции. Тот факт, что ртутный пар для некоторых (немногих) частот непрозрачен, а для всех остальных прозрачен, объясняется резонансом.

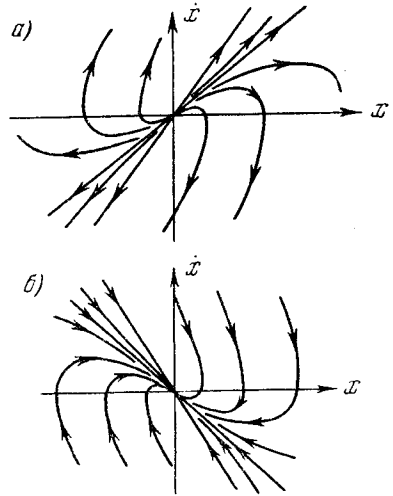


Рис. 55.

Известно большое значение резонанса в акустике. Благодаря резонансу опытное ухо различает, что аккорд состоит из таких-то нот.

Явление резонанса связано со *всей формой воздействия*, оно охватывает длительный промежуток времени. Нельзя говорить: резонанс наступил в такой-то момент. Здесь существенное значение имеет понятие *процесса*, а не понятие состояния в данный момент.

Уравнение

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0 \quad (13)$$

имеет такой смысл: масса, умноженная на ускорение, равна сумме упругой силы и силы трения. Теперь к ним прибавляется внешняя сила — заданная функция времени:

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = f(t). \quad (14)$$

Укажем некоторые свойства этого неоднородного уравнения (уравнения с правой частью).

В случае однородного уравнения (13), если x_1 и x_2 являются решениями, то

$$x = Ax_1 + Bx_2$$

тоже есть решение. Для уравнения с правой частью это уже несправедливо. Но пусть далее

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (15)$$

и пусть x_1, x_2, \dots, x_n — решения уравнения (14), соответствующие каждому из слагаемых в правой части (15). Тогда уравнение (14) имеет решение

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Так как очень широкий класс функций можно представить в виде суммы гармонических колебаний, мы приходим к выводу, что для многих задач достаточно уметь решить уравнение (14) для случая, когда справа стоит один синусоидальный член. Мы ограничимся этим случаем. Фазу правой части возьмем равной нулю (так как начало отсчета времени можно выбрать произвольно).

Пусть x_0 — общее решение однородного уравнения (13). Если x_1 — какое-то частное решение неоднородного уравнения (14), то

$$x = x_0 + x_1$$

есть общее решение неоднородного уравнения. Но $x_1 + \frac{x_0}{2}$ также является частным решением (14), а значит, и

$$x = x_1 + \frac{x_0}{2} + x_0$$

также есть общее решение неоднородного уравнения. Из этого видно, что разделение общего решения неоднородного уравнения на общее решение однородного и частное решение неоднородного неоднозначно. Почему приходится останавливаться на этом? Принято говорить: колебание, определяемое уравнением (14), есть сумма вынужденного и собственного колебаний. Это предполагает, что существует однозначное разбиение на вынужденное и собственное колебание. Но, как было только что сказано, разделение решения неоднозначно. Как выжется одно с другим? Тут недостает одного уточнения. Когда мы имеем вынужденное колебание, мы ищем *периодическое* частное решение неоднородного уравнения. Такое решение — единственное, и, следовательно, разбиение общего решения неоднородного уравнения на *периодическое* решение и общее решение однородного уравнения однозначно.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/XII 1930 г.)

Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра.

Вынужденные колебания гармонического осциллятора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т. е. дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E \cos pt, \quad (1)$$

где в механическом случае x — смещение и

$$E = \frac{E'}{m} \quad (1a)$$