есть общее решение неоднородного уравнения. Но $x_1 + \frac{x_0}{2}$ также является частным решением (14), а значит, и

$$x = x_1 + \frac{x_0}{2} + x_0$$

также есть общее решение неоднородного уравнения. Из этого видно, что разделение общего решения неоднородного уравнения на общее решение однородного и частное решение неоднородного неоднозначно. Почему приходится останавливаться на этом? Принято говорить: колебание, определяемое уравнением (14), есть сумма вынужденного и собственного колебаний. Это предполагает, что существует однозначное разбиение на вынужденное и собственное колебание. Но, как было только что сказано, разделение решения неоднозначно. Как вяжется одно с другим? Тут недостает одного уточнения. Когда мы имеем вынужденное колебание, мы ищем *периодическое* частное решение неоднородного уравнения. Такое решение — единственное, и, следовательно, разбиение общего решения неоднородного уравнения на *периодическое* решение и общее решение однородного уравнения однозначно.

ПЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/XII 1930 г.)

Действие внешней синусоидальной силы на линейную систему с одной степенью свободы. Установившиеся колебания. Энергетические соотношения. Резонанс для заряда (смещения) и для тока (скорости). Резонансные кривые. Измерение декремента. Фазовые соотношения. Измерение декремента с помощью электродинамометра.

Вынужденные колебания гармонического осциллатора описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменной правой частью. Нас интересует случай, когда правая часть синусоидальна, т. е. дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = E\cos pt, \tag{1}$$

где в механическом случае x — смещение и

$$E = \frac{E'}{m} \tag{1a}$$

(E' — амплитуда внешней силы, m — масса), а в электрическом случае x — заряд конденсатора и

$$E=\frac{E'}{L} \tag{1б}$$

(E' — амплитуда внешней э. д. с., L — индуктивность). Внешняя э. д. с. может быть непосредственно включена в контур, а может создаваться посредством индукции (рис. 56, *а* и *б*).

Часто для решения уравнения (1) пользуются комплексными выражениями. Правую часть заменяют выражением Ee^{ipt}, и получается *новое* уравнение

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=Ee^{ipt}. \tag{2}$$

Действительная часть решения уравнения (2) является решением уравнения (1).

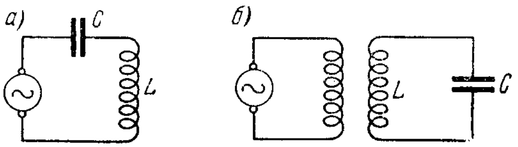

Рис. 56.

Уравнение (2) решается подстановкой

$$x=Ce^{ipt}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем:

$$(-p^2+2\delta ip+\omega_0^2)\,Ce^{ipt}=Ee^{ipt},$$

откуда

$$C=\frac{E}{\omega_0^2-p^2+2\delta ip}\,. \tag{4}$$

Нас интересует действительная часть (3). Пользуясь методом, изложенным в начале курса[1], мы находим, что эта действительная часть имеет вид

$$x=X\cos(pt-\varphi), \tag{5}$$

причем

$$X^2=CC^*,\quad \operatorname{tg}\varphi=-\frac{\operatorname{Im}C}{\operatorname{Re}C}\,. \tag{6}$$

---

[1] [См. 3-ю лекцию.]

Подставляя в (6) выражение (4), получаем:

$$X = \frac{E}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}; \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2}. \tag{8}$$

Если $\omega_0^2 - p^2 > 0$, то наименьшее положительное значение φ, определяемое уравнением (8), находится в первом квадранте. Если $\omega_0^2 - p^2 < 0$, оно находится во втором квадранте.

Мы нашли одно из частных решений неоднородного уравнения. Общее решение мы получим, прибавив к нему общее решение однородного уравнения:

$$x = X\cos(pt - \varphi) + Ae^{-\delta t}\cos(\omega t - \psi), \tag{9}$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Здесь A и ψ — произвольные постоянные. Для того, чтобы удовлетворить любым начальным условиям $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, при $t = 0$, нужны как раз две произвольные постоянные.

Как уже было сказано в прошлой лекции, деление общего решения неоднородного уравнения на две части — решение неоднородного уравнения и общее решение однородного — неоднозначно. Но в данном случае можно однозначно разделить общее решение неоднородного уравнения на такие две части: *периодическое* решение неоднородного уравнения + общее решение однородного.

Если ждать достаточно долгое время, то собственные колебания делаются как угодно близки к нулю. Через достаточно долгое время, каковы бы ни были начальные условия, остается чисто периодическое колебание. Поэтому оно представляет самостоятельный физический интерес.

Все свойства, о которых мы будем говорить, относятся к этому *установившемуся* процессу. Они полностью сказываются лишь через достаточно долгое время. Поэтому, например, говорить о резонансе в первые мгновения после включения внешней силы бессмысленно.

Вынужденное периодическое колебание имеет частоту p, равную частоте действующей силы и, вообще говоря, отличную от ω. Частота, с которой колеблется осциллатор в установившемся режиме при вынужденных колебаниях, совершенно не зависит от его собственной частоты.

Заметим теперь, что если смещение или заряд меняется по закону (5), то скорость (или ток) будет

$$\dot{x} = -pX\sin(pt-\varphi). \tag{10}$$

При собственных (незатухающих) колебаниях сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Остается ли эта сумма постоянной также и при синусоидальных вынужденных колебаниях? Подставим в выражение полной энергии

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

выражения (5) и (10), полученные для x и $\dot{x}$. Это дает

$$W = \frac{k}{2}X^2\cos^2(pt-\varphi) + \frac{m}{2}p^2X^2\sin^2(pt-\varphi).$$

Отсюда видно, что полная энергия непостоянна. Все время идет переход энергии из источника в рассматриваемую систему и обратно. Полная энергия постоянна только при

$$k = mp^2.$$

Мы приходим обратным путем к уже известному результату: без внешней силы осциллятор колеблется с частотой, равной $\sqrt{k/m}$. Мы видим далее, что, несмотря на синусоидальность колебания, не имеет места равенство средней кинетической и средней потенциальной энергии. Если $p^2 > \omega_0^2$, то $\overline{T} > \overline{U}$; если $p^2 < \omega_0^2$, то $\overline{T} < \overline{U}$. Равенство средних потенциальной и кинетической энергий играет важную роль для собственных колебаний. Но то, к чему мы привыкли для собственных колебаний, нельзя переносить на вынужденные.

При прочих равных условиях амплитуда вынужденных колебаний X пропорциональна амплитуде действующей силы E. Амплитуда и фаза сильно зависят от того, в каком отношении находится период внешней силы к периоду собственных колебаний.

Будем исследовать, при каком соотношении частоты внешней силы и собственной частоты наступает резонанс (понимая под резонансом максимум амплитуды вынужденных колебаний). Здесь возникают различные задачи, ведущие к различным резонансам.

1. Пусть $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p. Продифференцировав X по p, легко найти, что максимум амплитуды смещения или заряда X будет при

$$p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}.$$

Таким образом, „резонансная" частота внешней силы не равна собственной частоте ω_0 и не равна „частоте" затухающего осцилляторного процесса $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Резонанс наступает не при изохронизме, а при p, несколько меньшем, чем ω_0.

2. Пусть попрежнему $\omega_0 = \text{const}$, изменяется p; но теперь мы будем интересоваться максимумом амплитуды тока или скорости $\dot{X}$. Нужно, следовательно, искать максимум выражения

$$\dot{X} = pX = \frac{pE}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}} = \frac{E}{\sqrt{4\delta^2 + \left(\frac{\omega_0^2 - p^2}{p}\right)^2}}. \tag{11}$$

Ясно, что максимум будет при

$$\omega_0^2 - p^2 = 0,$$

т. е. здесь резонанс наступает тогда, когда период внешней силы *равен* периоду незатухающего колебания.

Для максимальных значений амплитуды заряда и тока имеем:

$$X_{\max} = \frac{E}{2\delta\omega_0}, \quad \dot{X}_{\max} = \frac{E}{2\delta}. \tag{12}$$

Итак, резонанс в смысле максимума амплитуды тока и резонанс в смысле максимума амплитуды заряда возникают при *различных* значениях p. Насколько велика разница между ними? X максимально при

$$p^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2,$$

а $\dot{X}$ максимально при

$$p^2 = \omega_0^2.$$

Напишем для первого случая:

$$p^2 = \omega_0^2\left(1 - 2\frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right),$$

или, поскольку

$$\frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi},$$

где d — логарифмический декремент,

$$p^2=\omega_0^2\left(1-2\frac{d^2}{4\pi^2}\right).$$

Пусть $d=1/100$. Тогда $d/2\pi=1/600$, а $(1/600)^2$ — очень малая величина. При очень тонких опытах можно констатировать отличие между обоими значениями p. Но почти всегда им можно пренебречь и считать, что оба резонанса наступают, когда $p=\omega$ (здесь можно не различать ω_0 и $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$).

3. Когда наступает максимум X, если меняется ω_0? Это случай, который имеет место в практике беспроволочной телеграфии, когда настраивают приемник, меняя емкость конденсатора. Как легко видеть, здесь максимум опять наступает при $\omega_0=p$.

Можно сказать, что если затухание мало, резонанс наступает при изохронизме. Этого приближения часто достаточно.

Мы выяснили, *когда* наступает максимум. Но насколько он резкий? Насколько остра кривая резонанса? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся другим написанием формул (7) и (11), — тем написанием, которым пользовался Релей. Из формулы (8) легко получить для $\sin\varphi$ выражение

$$\sin\varphi=\frac{2\delta p}{\sqrt{(\omega_0^2-p^2)^2+4\delta^2p^2}}. \tag{13}$$

На основании (13) можно написать для X и $\dot{X}$ очень простые выражения:

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{E\sin\varphi}{2\delta p};\\ \dot{X}&=\frac{E\sin\varphi}{2\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Допустим, что нас интересует зависимость от расстройки максимального значения кинетической энергии, т. е. величины

$$T=\frac{m}{2}\dot{X}^2. \tag{15}$$

Мы знаем, что $T=T_{\max}$ при $\omega_0=p$, т. е. при $\sin\varphi=1$. Поэтому на основании (14), (15) и (8) получаем:

$$\frac{T_{\max}-T}{T}=\operatorname{ctg}^2\varphi=\left(\frac{\omega_0^2-p^2}{2\delta p}\right)^2, \tag{16}$$

откуда

$$\frac{T}{T_{\max}}=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_0^2-p^2}{2\delta p}\right)^2}.$$

Разделим числитель и знаменатель в скобке на $\omega_0 p$ и введем „степень изохронизма"

$$\frac{p}{\omega_0}=q. \tag{17}$$

Мы получим:

$$\frac{T}{T_{\max}}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{q}-q\right)^2\Big/\left(\frac{d}{\pi}\right)^2}. \tag{18}$$

Это — очень удобное и сравнительно простое выражение. Из него видно, что отношение $T/T_{\max}$ зависит не от трех отдельных переменных p, ω_0 и δ, а от двух их комбинаций (q и d). В этом заключается одна из причин того, почему так существенен логарифмический декремент.

Возьмем, например, $d/\pi=0{,}01$, $q=0{,}8$. Тогда

$$\frac{T}{T_{\max}}=\frac{1}{1+2\cdot 10^3}.$$

Из этого примера ясно, почему резонанс имеет такое огромное значение. Здесь достаточно расстройки на 20%, чтобы энергия упала в 2000 раз.

Энергия при резонансе может быть и в миллионы раз больше, чем вдали от резонанса. Этого удалось достигнуть сравнительно недавно с помощью пьезокварца. Амплитуды колебаний кварцевой пластинки в „нормальных" условиях порядка всего лишь 10^{-6} мм, но при резонансе кварцевые пластинки иной раз разлетаются.

Резонансная кривая, изображающая формулу (18), дает возможность экспериментально определить логарифмический декремент.

Вернемся к формуле (16). При малых расстройках, т. е. когда ω_0 мало отличается от p, приближенно

$$(\omega_0+p)(\omega_0-p)=2p(\omega_0-p),$$

и формула (16) дает:

$$\frac{T_{\max}-T}{T}=\frac{(\omega_0-p)^2}{\delta^2}=\frac{\left(\frac{\omega_0-p}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}.$$

Энергия падает вдвое по сравнению с резонансом при

$$\frac{\omega_0 - p}{\omega_0} = \frac{d}{2\pi}. \tag{19}$$

Определив расстройку, при которой ордината резонансной кривой равна половине ординаты в максимуме, можно вычислить по формуле (19) логарифмический декремент.

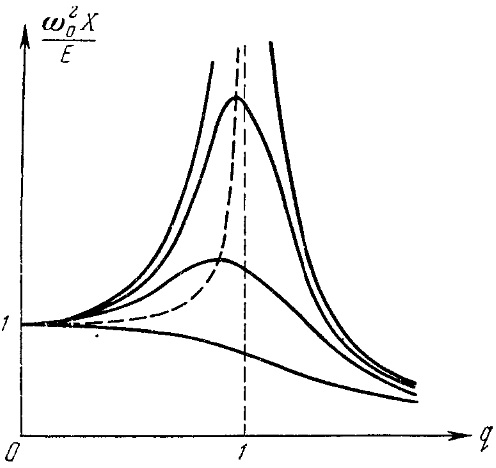

Рис. 57.

Остротой настройки называется обратная величина относительной расстройки $|\omega_0/\Delta\omega|$, которая нужна для того, чтобы ордината резонансной кривой уменьшилась вдвое. Из формулы для $(T_{max} - T)/T$ следует, что

$$\left|\frac{\omega_0}{\Delta\omega}\right| = \frac{2\pi}{d},$$

т. е. острота настройки обратно пропорциональна логарифмическому декременту контура.

При резонансе на основании (12) и (16) амплитуда тока

$$I = \dot{X} = \frac{E}{2\delta} = \frac{E'}{R}.$$

Индуктивность и емкость друг друга компенсируют, и получается такое же соотношение между током и электродвижущей силой, как в случае постоянного тока. Фаза тока совпадает при этом с фазой электродвижущей силы так же, как если бы мы имели чисто омическое сопротивление.

Приведем несколько резонансных кривых для амплитуды смещения $(\omega_0^2 X/E)$ в зависимости от q, соответствующих различным значениям декремента (рис. 57). Из них видно, как максимум смещается в зависимости от декремента.

Как изменяется сдвиг фаз между внешней силой, с одной стороны, и током или зарядом в контуре — с другой, в зависимости от расстройки?

Формулу (8) также не трудно записать через параметры $d = 2\pi\delta/\omega_0$ и $q = p/\omega_0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{qd}{\pi(1-q^2)}.$$

Если частота внешней силы очень мала, то практически $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. смещение изменяется в фазе с внешней силой. Если $p \to \infty$, то $\operatorname{tg}\varphi$ тоже стремится к нулю, но будучи отрицательным. Следовательно, сдвиг фаз стремится к π: в тот момент, когда внешняя сила действует вправо, смещение направлено влево. При резонансе ($q = 1$) сдвиг фаз равен $\pi/2$. Чем меньше d, тем меньше нужно удалиться от резонанса, чтобы сдвиг фаз стал практически равен 0 или π (рис. 58).

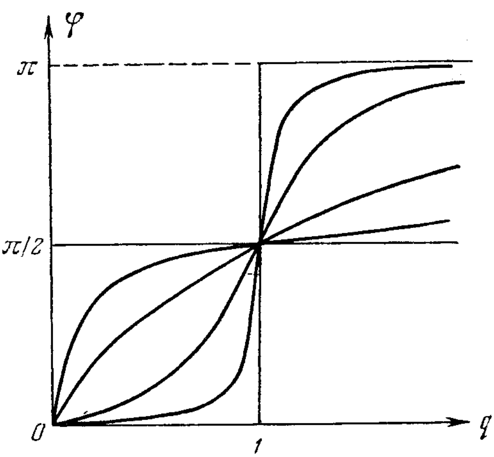

Рис. 58.

То обстоятельство, что между внешней силой и смещением должен существовать сдвиг фаз, а также какой именно он должен быть, можно вывести из простых энергетических соображений. Рассмотрим установившийся режим. Умножим уравнение

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = E' \cos pt$$

на i и усредним за полный период. Это дает:

$$R\overline{i^2} = E'\overline{\cos pt \cdot i}. \tag{20}$$

Справа стоит средняя мощность, отдаваемая внешним источником, слева — средняя потребляемая мощность. Будем приближаться к резонансу (оставляя E' постоянным); i растет по амплитуде, но $\overline{i^2}$ растет гораздо быстрее. Отсюда ясно, что соотношение (20) не могло бы оставаться правильным, если бы между внешней э. д. с. и током (а следовательно, и зарядом) не было меняющейся с настройкой разности фаз.

Можно простым образом вывести из энергетического соотношения (20) зависимость амплитуды тока от φ. Подставим в (20)

$$i=\dot{x}=-\dot{X}\sin(pt-\varphi).$$

Получаем:

$$R\dot{X}^2\,\overline{\sin^2(pt-\varphi)}=-E'\dot{X}\,\overline{\cos pt\cdot\sin(pt-\varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin^2(pt-\varphi)}=\frac{1}{2},\quad \overline{\cos pt\cdot\sin(pt-\varphi)}=-\frac{\sin\varphi}{2}.$$

Следовательно,

$$R\dot{X}^2=\dot{X}E'\sin\varphi,$$

откуда мы снова приходим к формуле (14):

$$\dot{X}=\frac{E'}{R}\sin\varphi.$$

Как мы теперь видим, это релеевское написание формулы для амплитуды имеет довольно глубокий физический смысл. Связь между амплитудой тока и фазой диктуется энергетическими требованиями. Раздельное рассмотрение амплитуды и фазы не выявляет той связи между их изменениями, которая обусловлена энергетическими соотношениями. Есть ряд физических явлений, где эта связь существенна.

Рассмотрим электродинамометр. В нем действует между катушками, в которых текут переменные токи i_1 и i_2, пара сил с моментом

$$M\sim i_1 i_2. \tag{21}$$

Пусть ток i_1 берется прямо от источника переменной э. д. с. (через омическое сопротивление), а ток i_2 течет в резонансном контуре (рис. 59). В этом случае

$$i_1=\alpha E\sin pt,\quad i_2=\dot{X}\sin(pt-\varphi) \tag{22}$$

(α — постоянная). На основании (14), (21) и (22)

$$M=\mathrm{const}\cdot\sin\varphi\cdot\overline{\sin pt\sin(pt-\varphi)}.$$

Но

$$\overline{\sin pt\cdot\sin(pt-\varphi)}=\frac{\cos\varphi}{2},$$

и, следовательно,

$$M = \text{const} \cdot \sin\varphi \cos\varphi = \text{const} \cdot \sin 2\varphi.$$

Соответствующую этой формуле зависимость момента от настройки изображает особая резонансная кривая (рис. 60). При настройке контура в резонанс

$$\sin\varphi = 1, \quad \cos\varphi = 0,$$

т. е. в случае резонанса момент сил отсутствует.

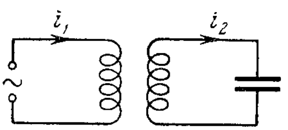

Рис. 59.

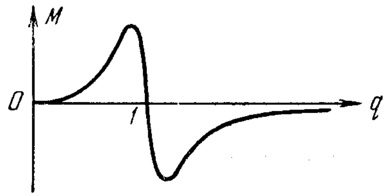

Рис. 60.

Максимум и минимум M соответствуют $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$, или

$$\frac{2\delta p}{\omega_0^2 - p^2} = \pm 1.$$

Это — то самое соотношение (19):

$$\left| \frac{\omega_0 - p}{\omega_0} \right| = \frac{d}{2\pi},$$

которое мы получили раньше для случая, когда энергия в контуре падает вдвое по сравнению с резонансом.

Таким образом, из резонансной кривой для M (найдя максимум и минимум) также можно определить декремент. Кроме того, получается *нулевой* метод нахождения резонанса, позволяющий устанавливать настройку в резонанс с очень большой точностью.

Мы рассмотрели простой электрический пример — электродинамометр, но аналогичные вещи встречаются в гидродинамике: например, взаимодействие двух пульсирующих шаров, исследованное Бьеркнесом и послужившее моделью, с помощью которой старались объяснить многие явления.

На примере электродинамометра хорошо видна роль разности фаз при взаимодействии между колебательными системами.

Рассмотренные явления важны при взаимодействии между резонаторами. Этим вопросам значительное внимание уделил П. Н. Лебедев[1].

Другой случай, где основную роль играют фазовые соотношения между внешней силой и возбуждаемым колебанием, встречается в оптике, в теории дисперсии и поглощения[2].

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XII 1930 г.)

Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустановившийся режим; нарастание колебаний в затухающем осцилляторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос.

Повторим кратко свойства резонанса, в случае когда действует синусоидальная сила. При установившемся режиме происходит незатухающее синусоидальное колебание с периодом действующей силы. Амплитуда смещения максимальна, когда период действующей силы приблизительно совпадает с собственным периодом. Максимум выражен тем резче (резонансная кривая тем острее), чем меньше логарифмический декремент. Если частота внешней силы p гораздо меньше собственной частоты ω_0, то смещение и сила почти синфазны. При резонансе (при $p=\omega_0$) сдвиг фаз между смещением и внешней силой равен 90°, т. е. сила максимальна при прохождении через положение равновесия. Если $p \gg \omega_0$, то смещение и сила имеют противоположные фазы.

Здесь самое главное — это резкий максимум амплитуды при синхронизме. Бывали случаи, когда цепные мосты разрушались, когда по ним шла в ногу колонна солдат. (Отчасти из-за подоб-

---

[1] [П. Н. Лебедев. Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы. Избр. соч. под ред. А. К. Тимирязева, М., 1949.]

[2] [См. 16-ую лекцию.]