Рассмотренные явления важны при взаимодействии между резонаторами. Этим вопросам значительное внимание уделил П. Н. Лебедев [1].

Другой случай, где основную роль играют фазовые соотношения между внешней силой и возбуждаемым колебанием, встречается в оптике, в теории дисперсии и поглощения [2].

ШЕСТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(25/XII 1930 г.)

Резонанс в технике. Резонанс в оптике; фазовые соотношения. Неустановившийся режим; нарастание колебаний в затухающем осцилляторе. Резонанс в незатухающем осцилляторе. Мнимое опровержение теории относительности. Сила, состоящая из ряда синусоидальных составляющих. Физическое значение разложения Фурье. Противоречие между требованиями селективности и правильного воспроизведения модуляции. Ошибочная точка зрения Флеминга в вопросе о реальности боковых полос.

Повторим кратко свойства резонанса, в случае когда действует синусоидальная сила. При установившемся режиме происходит незатухающее синусоидальное колебание с периодом действующей силы. Амплитуда смещения максимальна, когда период действующей силы приблизительно совпадает с собственным периодом. Максимум выражен тем резче (резонансная кривая тем острее), чем меньше логарифмический декремент. Если частота внешней силы p гораздо меньше собственной частоты ω_0, то смещение и сила почти синфазны. При резонансе (при $p = \omega_0$) сдвиг фаз между смещением и внешней силой равен 90°, т. е. сила максимальна при прохождении через положение равновесия. Если $p \gg \omega_0$, то смещение и сила имеют противоположные фазы.

Здесь самое главное — это резкий максимум амплитуды при синхронизме. Бывали случаи, когда цепные мосты разрушались, когда по ним шла в ногу колонна солдат. (Отчасти из-за подоб-

---

[1] [П. Н. Лебедев. Экспериментальное исследование пондеромоторного действия волн на резонаторы. Избр. соч. под ред. А. К. Тимирязева, М., 1949.]

[2] [См. 16-ую лекцию.]

ных явлений отошли от построения нежестких мостов.) Возможен также резонанс пароходного корпуса, резонанс фундамента, на котором установлена машина. Главный способ устранения этих явлений — изменение периода. Но есть и другие способы, о которых будет идти речь впоследствии[1].

Явление резонанса имеет место и в случае действия пондеромоторных сил между двумя осцилляторами. Таковы, например, притяжение и отталкивание (в зависимости от разности фаз) пульсирующих шаров, находящихся в жидкости.

Перейдем к оптике. Основные явления при прохождении света через тела, в сущности, связаны с резонансом.

Лет двадцать тому назад дело представляли себе очень просто. Вещество отличается от вакуума тем, что в нем содержатся резонаторы определенного собственного периода. Когда на среду падает световая волна определенной частоты, она возбуждает резонаторы с этой частотой. Действие прозрачной среды состоит в следующем: на падающую волну налагаются вторичные волны, излучаемые резонаторами, возбужденными падающей волной. Это приводит к изменению поля.

Все оптические свойства среды выводятся из этой картины. Если рассчитать измененное поле, то получается как раз то, что мы знаем из феноменологической оптики. Например, преломление тождественно сдвигу фазы измененной волны по отношению к падающей. Эта модель объясняет также действие на свет пластинок различной толщины.

При резонансе резонаторы сильно раскачиваются. Этим объясняется поглощение (абсорбция). С помощью простых представлений удалось дать достаточно полную картину дисперсии и абсорбции. Натриевый пар поглощает только определенную длину волны, а именно ту, которую он сам испускает. Для более длинных волн показатель преломления больше единицы, для более коротких — меньше единицы (это были в свое время замечательные открытия). Последнее объясняется тем, что если частота света ниже резонансной, измененная волна отстает по фазе от падающей; если же частота света выше резонансной, то получается наоборот — опережение по фазе.

Теперь физика отошла от этой модели: все факты говорят о том, что такая простая модель неверна. Однако полученные

---

1 [Применение успокоителей, см. 26-ую и 27-ую лекции.]

с ее помощью соотношения в большой мере сохраняются и в новой теории. Поэтому практически оптика часто продолжает работать с этой моделью. Многие заключения сохраняются в полной силе.

Нам остается рассмотреть в связи с резонансом некоторые принципиальные вопросы и некоторые задачи и вопросы, возникающие при практических *положительных* применениях (в начале лекции говорилось об *отрицательных* сторонах резонанса). В радиотелеграфии, в радиотелефонии резонанс — инструмент, которым пользуются.

Мы рассматривали до сих пор установившийся режим. Рассмотрим теперь такую задачу. Пусть на резонатор в момент $t=0$ *начинает* действовать сила. Тогда нужно решить уравнение с правой частью

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=E\sin pt \tag{1}$$

при определенных начальных условиях (мы писали раньше в правой части $E\cos pt$, а теперь пишем $E\sin pt$, но этим мы просто переставляем начало отсчета времени). Нужно найти такое решение x, для которого

$$x=0,\quad \dot{x}=0 \quad \text{при } t=0.$$

Это решение определенно однозначно.

Математика указывает, как найти такое решение. Нужно взять *общее* решение уравнения (1)

$$x=X\sin(pt-\varphi)+Ae^{-\delta t}\cos\omega t+Be^{-\delta t}\sin\omega t \tag{2}$$

и подогнать в нем произвольные постоянные под начальные условия. Положим в (2) $t=0$, $x=0$. Это дает уравнение

$$-X\sin\varphi+A=0. \tag{3}$$

Далее, продифференцируем (2) и положим $t=0$, $\dot{x}=0$. Это дает еще одно уравнение. Из двух полученных таким образом линейных алгебраических уравнений мы определим A и B.

Проделаем это для частного случая.

С самого начала предположим, что декремент мал и имеет место резонанс, т. е. $p=\omega_0\approx\omega$ (с точностью до δ^2). Тогда φ равно $90°$ и

$$X=\frac{E}{2\delta\omega_0}.$$

Уравнение (3) дает при этом $A=X$, а из условия $\dot{x}(0)=0$ мы получаем в этом случае, что B — малая величина порядка δ/p. В первом приближении, если пренебречь δ/p по сравнению с единицей, т. е. положить $B=0$, находим:

$$x=-\frac{E}{2\delta\omega_0}(1-e^{-\delta t})\cos\omega_0 t. \tag{4}$$

В начале, несмотря на совпадение частот p и ω_0, колебание x очень мало. Оно увеличивается — происходит нарастание амплитуды — по мере уменьшения $e^{-\delta t}$.

Получается такая картина. При очень малых декрементах амплитуда колоссальна, но ее установление длится очень долго. Явление резонанса характерно для *установившегося* режима. Чем более резко выражен резонанс, тем медленнее происходит установление. Можно это выразить так: резко выраженный резонанс долго не наступает.

Если силу выключить, колебания затухают. Затухание колебаний тем медленнее, чем меньше δ. При малом δ сила медленно раскачивает систему и колебания долго длятся после того, как прекратилось действие силы. Во избежание ошибок, нужно это постоянно иметь в виду. Укажем одну из распространенных ошибок.

Для целей беспроволочной телеграфии требуется изменять нечто в колебаниях передатчика, с тем чтобы амплитуда в приемнике изменялась как можно сильнее. Обычно изменяют амплитуду колебаний в передатчике. Было сделано предложение — изменять *частоту* передатчика. При малом затухании резонансная кривая очень крута, и поэтому, говорили, достаточно ничтожного изменения частоты, чтобы сильно изменить амплитуду.

Критика этого предложения заключается в следующем. Если изменение частоты происходит очень медленно, то утверждение справедливо. Но если оно не происходит очень медленно, то утверждение совсем несправедливо. Приемник не попадает в точку A (рис. 61) сразу. Он придет в нее тем медленнее, чем острее резонансная кривая. Условия передачи таковы, что быстрота изменения задается — ею нельзя распоряжаться. При быстрых же изменениях острота эффекта иллюзорна и цель не достигается.

Поставим теперь задачу о колебаниях *незатухающего* контура под действием внешней силы. Этот случай проще. Рассмотрение незатухающего контура для ряда вопросов имеет смысл.

Пусть $\delta \to 0$. Тогда в пределе формула (7) предыдущей лекции дает:

$$X = \frac{E}{\omega_0^2 - p^2}. \tag{5}$$

Если $|\omega_0^2 - p^2|$ велико по отношению к δ^2, т. е. далеко от резонанса, формула (5) приводит к удовлетворительным результатам. Пусть теперь $\omega_0 = p$. Тогда по формуле (5) $X = \infty$: если при приближении к резонансу не учитывать затухания, амплитуда растет неограниченно. Отсюда видно, что достаточно близко от резонанса мы обязаны при рассмотрении установившегося колебания принимать во внимание затухание, как бы оно ни было мало. Но как мы видели, чем меньше δ, тем медленнее устанавливается колебание. Когда δ стремится к нулю, $X \to \infty$, но стационарный режим устанавливается через бесконечное время, т. е. не устанавливается никогда. Поэтому формула (5) не приводит к физическому противоречию.

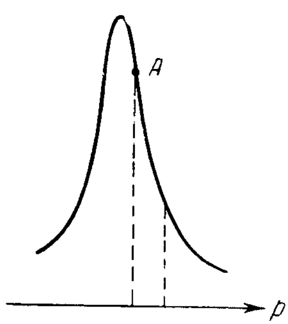

Рис. 61.

Из формулы (2) мы не получим при $\omega_0 = p$ установившегося (периодического) решения. Его нельзя получить и из периодического решения, полагая в нем $p = \omega_0$. Но *какое-то* решение должно существовать и в этом случае. Его можно найти другим путем.

Общее решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = E \sin \omega_0 t$$

есть

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - \frac{E}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t. \tag{6}$$

Последний член (он является частным решением неоднородного уравнения) неограниченно растет со временем. Происходит неограниченное накопление энергии. Решение

$$x = -\frac{t}{2\omega_0} \cos \omega_0 t \tag{7}$$

можно получить и из формулы (4) путем перехода к пределу $\delta = 0$. Как уже подчеркивалось, нельзя думать, что резонанс наступает сразу. Если сила действует очень короткое время, то она не может вызвать большого нарастания колебаний, даже если нет трения.

Рассмотрим один относящийся сюда оптический парадокс. Исследование установившегося режима приводит к выводу, что показатель преломления n больше или меньше единицы, смотря по тому, что больше — частота падающего света или собственная частота молекулярных резонаторов. Показатель преломления равен отношению скорости света в вакууме к скорости света в теле. Пусть показатель преломления меньше единицы. Тогда скорость света в теле больше, чем скорость света в вакууме c. Опыт показывает, что действительно в некоторых случаях $n < 1$. Кое-кто думал вывести отсюда возражение против теории относительности, так как одно из ее основных утверждений состоит в том, что ни один сигнал не может распространяться скорее, чем свет в пустоте.

В действительности никакого противоречия нет. Теория относительности запрещает распространение *сигнала* со скоростью, большей c. Показатель преломления относится к *установившимся* колебаниям. Когда распространяется начало сигнала, электроны не успели еще придти в колебание. Сигнал вначале распространяется так, как будто бы молекул нет. Сигнал равносилен неустановившемуся режиму, и из того, что $n < 1$, еще нельзя ничего заключить о скорости распространения сигнала.

Поставим теперь несколько более общую задачу. Нас часто интересуют периодические или почти-периодические силы $f(t)$. Их можно представить в виде суммы синусоид с различными периодами (математика нас учит, как это следует делать). Если мы это сделаем, то получим уравнение вида

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \sum_i E_i \cos(p_i t + \psi_i). \qquad (8)$$

Мы знаем, что, найдя решение для случая, когда в правой части стоит один член суммы, мы сможем написать решение (8) как сумму отдельных таких решений.

Возьмем специальный случай. Пусть самая малая (по абсолютной величине) разность между частотами p_i есть

$$p_1 - p_2 = \Delta p.$$

Пусть логарифмический декремент резонатора чрезвычайно мал по сравнению с $|\Delta p|/p_i$. Настроим резонатор на p_1. Тогда все члены с частотами, отличными от p_1, будут малы по сравнению с членом частоты p_1.

Если резонатор с достаточно малым затуханием настроен на частоту одной из синусообразных слагаемых силы, то остальные слагаемые практически совершенно незаметны. Такой резонатор выделяет определенный синусообразный член внешней силы, а именно тот, на который он настроен. Резонатор, это — реактив на *синусообразные* колебания. Он откликается именно на синусообразные колебания, а *не вообще* на периодические. Если действует периодическая сила периода, равного собственному периоду резонатора, но в которой „случайно" нет синуса (или косинуса) нужной частоты, — резонанса не будет.

Например, как будет вести себя резонатор, настроенный на частоту p, в случае силы

$$f_1(t) = a_2 \sin 2pt + a_3 \sin 3pt$$

$(p = \omega_0)$ и в случае силы

$$f_2(t) = a_1 \sin pt$$

(обе силы имеют одинаковый период)? Во втором случае он откликнется сильно; в первом случае он откликнется очень слабо. Для резонанса важен не период действующей силы, а наличие в разложении правой части на сумму синусов (или косинусов) члена с синусом (или косинусом) определенной частоты.

Вообразите, что вы раскачиваете маятник. Вы даете ему толчок. Он немного отклоняется и возвращается обратно. Если вы будете снова его толкать в „нужные" моменты (через период), то действие толчков будет накопляться, — будет резонанс. Если вы будете толкать маятник через каждые два периода, то тоже будет резонанс, — маятник будет опять сильно раскачиваться.

Этот результат противоречит представлению о том, что для резонанса необходимо совпадение периода внешней силы с собственным периодом. Но он находится в согласии с тем, что было только что сказано.

Если разложить кривую (рис. 62) в ряд синусов, то при периоде толчков, равном удвоенному собственному периоду, этот ряд содержит синус собственного периода. Благодаря этому наступает резонанс.

Неправильно думать, что условием резонанса является совпадение периодов. Единственный критерий резонанса дает разложение на синусоиды. Этим и объясняется та важная роль, которую играет в физике ряд Фурье.

Любую функцию, в частности периодическую, можно представить как сумму других функций и притом самым разнообразным образом. Возможно разложение не только по синусам и косинусам, но и по другим функциям. Какое разложение правильно? С точки зрения математики все грамотные разложения правильны и поставленный нами вопрос не имеет содержания. Он аналогичен вопросу: что правильно, a^2-b^2 или $(a-b)(a+b)$? Оба выражения представляют собой одно и то же.

Вся соль здесь — в *физике*, в том, как исследуется процесс, на что рассматриваемое колебание действует. Если методом исследования является резонанс, то можно выделить каждый отдельный член ряда Фурье. Поэтому единственно правильное или, лучше сказать, целесообразное представление при исследовании процесса с помощью резонанса — это ряд Фурье. Здесь разложение на другие функции не ведет к цели. То или иное разложение правильно, разумно, в зависимости от системы, на которую колебание действует, в частности в зависимости от физического прибора, с которым работают.

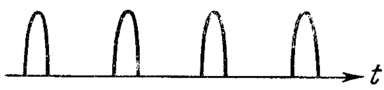

Рис. 62.

В беспроволочной телеграфии и телефонии резонанс — важный инструмент, фундаментально используемый. Необходимо знать, какого рода вопросы при этом возникают.

Мы хотим передавать сигналы. Если передатчик работает синусообразно, то он может дать знать лишь о том, что он работает. Для передачи *сообщения* передатчик должен *изменять* амплитуду своих колебаний определенным образом, — сообразно тому, что должно быть передано. В этом состоит *модуляция*. Синусоиду модулируют, например, тем, что поют перед микрофоном. При этом амплитуда колебаний передатчика уменьшается или увеличивается сообразно колебаниям давления воздуха. Пусть акустическая частота есть ν. Тогда (приближенно) амплитуда колебаний передатчика меняется по закону

$$E=E_0(1+k\cos\nu t)$$

и сигнал имеет вид

$$y=E\cos pt=E_0(1+k\cos\nu t)\cos pt. \tag{9}$$

Это — самый простой случай модуляции передатчика.

Передатчик действует на приемник, на линейный осциллятор. Формула (9) показывает, какова при этом внешняя сила, действующая на контур приемника. Какие свойства этого контура существенны при действии такой силы?

Приемная станция настроена на данный передатчик. Вместе с тем имеется большое число других передатчиков. Требуется настроить приемник так, чтобы они ему не мешали, чтобы он мог от них „отстроиться". Желательно, чтобы одновременно могло работать возможно большее число передающих станций.

Итак, к приемнику предъявляются следующие требования:

1. Он должен правильно передавать модуляцию данного передатчика.

2. Он не должен откликаться на другие передатчики (селективность).

3. Кроме того, имеются помехи, форма и сила которых от нас не зависят (атмосферные разряды, грозы). Желательно построить приемник так, чтобы он был нечувствителен к помехам.

К сожалению, первое требование и остальные два противоречивы, так что приходится идти на компромисс.

Наиболее простой модуляции соответствует формула (9). Ее можно записать и в таком виде:

$$y = E_0 \cos pt + \frac{kE_0}{2} \cos (p - \nu) t + \frac{kE_0}{2} \cos (p + \nu) t. \tag{10}$$

Получились три синусообразные колебания. Следовательно, на приемное устройство действуют три колебания с тремя частотами p, $p-\nu$, $p+\nu$. Частота p называется несущей частотой, частоты $p-\nu$ и $p+\nu$ называются боковыми полосами. Амплитуды вынужденных колебаний, соответствующих трем синусоидальным составляющим силы (10), таковы:

$$\frac{E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\delta^2 p^2}}, \qquad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{[\omega_0 - (p \pm \nu)^2]^2 + 4(p \pm \nu)^2 \delta^2}},$$

или, если $p = \omega_0$ (приемник настроен на несущую частоту передатчика),

$$\frac{E_0}{2\delta\omega_0}, \qquad \frac{\frac{kE_0}{2}}{\sqrt{(\nu^2 \mp 2\omega_0\nu)^2 + 4(\omega_0 \pm \nu)^2 \delta^2}} \approx \frac{kE_0}{4\delta\omega_0 \sqrt{1 + \frac{\nu^2 4\pi^2}{\omega_0^2 d^2}}}.$$

Предположим, что затухание контура приемника очень мало:

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \gg \frac{d^2}{4\pi^2}.$$

Тогда боковые полосы практически не попадают в приемник. Он реагирует так, как будто бы модуляции нет, т. е. приемник не чувствует, модулирован сигнал или нет, он не слышит того, что говорит передатчик. Таким образом, нельзя брать декремент очень малым.

Мы получим в приемнике хорошую модуляцию, если резонанс не изменит заметно отношение амплитуд синусоидальных составляющих (несущей и боковых). Для хорошего воспроизведения модуляции должно быть поэтому

$$\frac{\nu^2}{\omega_0^2} \ll \frac{d^2}{4\pi^2}, \tag{11}$$

относительная величина частоты модуляции должна быть гораздо меньше, чем $d/2\pi$. Если требуется, чтобы правильно передавалась модуляция, мы не имеем права брать очень малый декремент.

При $p/2\pi = 10^6$ (длина волны 300 м), $\nu/2\pi = 3000$, т. е. при $\nu/p = 0{,}003$, условие (11) дает:

$$d \gg 0{,}003 \cdot 2\pi,$$

или

$$d \gg 0{,}019.$$

Даже для умеренно хорошего воспроизведения модуляции здесь необходим сравнительно большой логарифмический декремент. Но это противоречит требованию высокой селективности. Кроме того, чем больше логарифмический декремент, тем сильнее сказываются помехи[1].

Какие есть способы улучшить положение? Что нам задано и что мы можем менять? Частота модуляции ν — это частота речи. Ее менять мы не можем. Значит, если ν задано, то для достижения хорошего воспроизведения модуляции нужно увеличивать ω_0, пока не будет выполнено условие (11). При большом числе станций требование хорошей модуляции заставляет переходить к коротким волнам.

[1] [См. 17-ую лекцию.]

Все, что говорилось, относится и к телеграфной передаче. Здесь требование селективности накладывает ограничение на скорость передачи. Малый логарифмический декремент несовместим с быстротой работы. Но здесь требования — менее жесткие, чем при передаче звука. Для хорошей музыкальной передачи нужно передавать частоты до 5—10 тысяч колебаний в секунду. При радиотелефонных переговорах достаточно, чтобы хорошо передавались более низкие частоты. Хорошая телеграфная работа, довольно быстрая — 120 слов в минуту. Такая быстрота телеграфирования соответствует, грубо говоря, частоте модуляции около 150 колебаний в секунду. Это гораздо более медленная модуляция, чем в радиотелефонии. Кроме того, здесь не очень страшно, если кривая получается немного смазанной (рис. 63). Тем не менее даже в радиотелеграфии нельзя пользоваться теми малыми логарифмическими декрементами, которые нам доступны. Это привело бы к слишком сильному искажению сигналов.

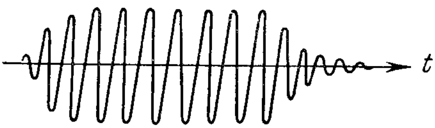

Рис. 63.

Итак, в случае приема с помощью линейной системы мы всегда находимся между Сциллой и Харибдой: требования селективности и хорошего воспроизведения модуляции противоречивы. Приходится каждый раз думать о том, какой выбрать компромисс. Если сообщается о сенсационном открытии, о новом принципе, устраняющем — в пределах линейных систем — противоречие между требованиями селективности и хорошего воспроизведения модуляции, то можно сразу сказать, что это неверно. Недавно сообщалось, что такой принцип найден и даже запатентован Робинсоном, но из этого ничего не вышло.

Мы разлагали простейшее модулированное колебание на три синусоидальных колебания. Флеминг[1] говорит следующее. Эти три волны „не реальны". Законодательство ограничивает частоту модуляции. Оно требует, чтобы при передаче модуляция была не более быстрой, чем 10 тысяч колебаний в секунду. Это мотивируется тем, что в противном случае близкие по частоте станции не смогут работать. Но так как боковые частоты не реаль-

[1] [A. Fleming. Nature, **125**, 92, 1930.]

ны, говорит Флеминг, то такое законодательство не имеет смысла.

Вопрос „реальны" или „не реальны" боковые полосы, не имеет смысла. Так вопрос ставить нельзя. Переход от формулы (9) к (10) — простая тригонометрия. Никакое приемное устройство не различит, имеется ли одна модулированная волна или соответствующие ей три волны от трех немодулированных передатчиков.

Вопрос о реальности боковых полос — это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что $10=2+8$, или то, что $10=5+5$? Правильно ставить вопрос можно только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10. А это зависит от того, что вы хотите сделать.

По вопросу о „реальности" боковых полос возникла целая литература[1].

СЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(28/XII 1930 г.)

Действие помех на линейную колебательную систему с одной степенью свободы. Увеличение отношения сигнал/помеха при уменьшении затухания.

Рассмотрим действие помех на линейный контур. Помехи — явление непериодическое. Они имеют не дискретный, а сплошной спектр.

Вспомним некоторые соотношения, относящиеся к случаю действия синусоидальной внешней силы на линейную систему. Пусть

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2 x=E\cos pt. \tag{1}$$

Тогда при установившихся колебаниях

$$\begin{aligned} x&=X\cos(pt-\varphi),\\ \dot{x}&=-\dot{X}\sin(pt-\varphi), \end{aligned} \tag{2}$$

---

[1] [C. L. Fortescue, H. Bedford, H. W. Baxter и др. Nature, **125**, 198, 271, 1930; Exper. Wir. a. Wir. Eng., **7**, 119, 1930; **8**, 4, 257, 259, 312, 431, 538, 660, 1931.]