книга „Волны в воде, воздухе и эфире“ — в общем неплохая, там есть много интересных сведений. Но по поводу резонанса там имеется явный вздор. Говорится, например, что мальчик, стреляя из рогатки, может разрушить железнодорожный мост через Темзу. Это невозможно из-за затухания.

ВОСЕМНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(5/I 1931 г.)

Уравнение колебаний маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса. Контур с периодически меняющейся емкостью. Теория линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого совершает заданное гармоническое колебание относительно инерциальной системы отсчета x_1, z_1.

Предположим сначала, что точка подвеса колеблется горизонтально (рис. 65). Пусть

$$x_0 = a\cos pt$$

есть координата точки подвеса в системе отсчета x_1, z_1. Напишем уравнение движения в неинерциальной системе отсчета x, z, в которой точка подвеса маятника покоится. Здесь нужно ввести силу инерции $(-m\ddot{x}_0)$, направленную по оси x, и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - m\ddot{x}_0\cos\varphi, \qquad (1)$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения, m — масса, l — длина, причем

$$I = ml^2.$$

При достаточно малых колебаниях можно считать приближенно, что

$$\sin\varphi = \varphi, \quad \cos\varphi = 1,$$

и уравнение (1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = -\frac{\ddot{x}_0}{l} = -\frac{ap^2}{l}\cos pt. \qquad (2)$$

Это — уравнение вынужденных колебаний; маятник движется так же, как под действием заданной синусоидальной внешней силы.

Пусть теперь точка подвеса колеблется вертикально (рис. 66):

$$z_0 = a\cos pt.$$

Напишем и для этого случая уравнение движения в неинерциальной системе отсчета, относительно которой точка подвеса покоится.

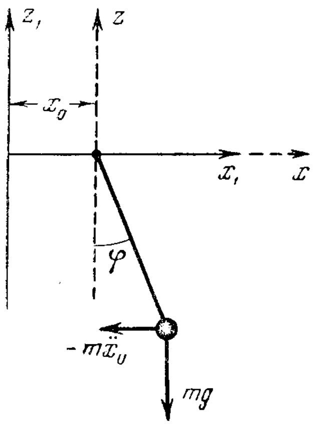

Рис. 65.

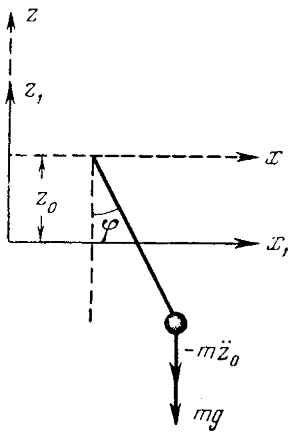

Рис. 66.

Теперь сила инерции $(-mz_0)$ направлена по оси z, и уравнение движения таково:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - m\ddot{z}_0 \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\varphi,$$

или приближенно, при малых φ,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g+\ddot{z}_0}{l}\varphi = 0.$$

Подставляя сюда z_0, получаем:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{l}(g - ap^2\cos pt)\varphi = 0. \qquad (3)$$

Это — уравнение совсем другого типа, чем (2). Система здесь также неавтономна, но нет периодической внешней силы: от времени зависит коэффициент при φ.

Рассмотрим еще один пример: колебательный контур, в котором емкость конденсатора периодически меняется со временем.

Будем считать, что конденсатор плоский и что расстояние d между пластинами меняется синусоидально:

$$d = d_0 (1 + k \cos pt).$$

Емкость равна

$$C = \frac{S}{4\pi d},$$

где S — площадь пластин. Заряд на конденсаторе q удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{4\pi}{S}(1 + k \cos pt)\, q = 0.$$

Получилось уравнение того же типа, что и (3).

В последнее время физики заинтересовались задачами, приводящими к линейным уравнениям с периодическими коэффициентами. Такие задачи встречаются в небесной механике, в машиностроении (электровозы)[1], в теории твердого тела (вследствие периодичности кристаллической решетки потенциальная энергия электрона есть периодическая функция координат).

В этой лекции мы познакомимся с математической теорией линейных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\ddot{x} + p_1(t)\,\dot{x} + p_2(t)\,x = 0, \tag{4}$$

причем $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции периода τ:

$$p_1(t + \tau) = p_1(t);$$
$$p_2(t + \tau) = p_2(t).$$

Уравнение (3) является частным случаем уравнения вида (4).

Будем считать, что уравнение (4) удовлетворяет условию Коши—Липшица и что, следовательно, существует решение, и притом единственное, удовлетворяющее произвольным заданным начальным условиям:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — линейно независимые частные решения уравнения (4). Общее решение может быть представлено в виде их линейной комбинации:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

[1] [См. 19-ую лекцию.]

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Необходимым и достаточным условием линейной независимости функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ является неравенство нулю детерминанта Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}.$$

Любые два линейно независимые решения уравнения (4) образуют так называемую фундаментальную систему решений.

Рассмотрим частные решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ уравнения (4), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{matrix} \varphi(0) = 1, & \psi(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) = 0, & \dot{\psi}(0) = 1. \end{matrix}\right\} \tag{5}$$

Согласно известной теореме теории линейных дифференциальных уравнений

$$W(t) = W(0)\, e^{-\int_0^t p_1(\xi)\, d\xi}. \tag{6}$$

В данном случае

$$W(0) = \begin{vmatrix} \varphi(0) & \psi(0) \\ \dot{\varphi}(0) & \dot{\psi}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{7}$$

и, следовательно,

$$W(t) = e^{-\int_0^t p_1(\xi)\, d\xi} \neq 0.$$

Таким образом, решения φ и ψ образуют фундаментальную систему.

Докажем теперь, что существует такое решение $x_1(t)$ уравнения (4), которое через период воспроизводит себя с точностью до постоянного множителя, т. е. такое, что

$$x_1(t + \tau) = s x_1(t), \tag{8}$$

где s — постоянная. Из (8) следует, что

$$x_1(t + n\tau) = s^n x_1(t).$$

Заметим, что если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — решения уравнения (4), то в силу периодичности коэффициентов этого уравнения $\varphi(t + \tau)$ и $\psi(t + \tau)$

тоже являются решениями. Как и всякое решение, они могут быть выражены линейно через фундаментальную систему $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(t+\tau)&=a\varphi(t)+b\psi(t),\\ \psi(t+\tau)&=c\varphi(t)+d\psi(t)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(a, b, c, d — постоянные), откуда

$$\left.\begin{aligned}\dot\varphi(t+\tau)&=a\dot\varphi(t)+b\dot\psi(t),\\ \dot\psi(t+\tau)&=c\dot\varphi(t)+d\dot\psi(t).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Положив в (9) и (10) $t=0$ и приняв во внимание (5), получаем:

$$\left.\begin{aligned}a&=\varphi(\tau),\quad b=\dot\varphi(\tau),\\ c&=\psi(\tau),\quad d=\dot\psi(\tau).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Возьмем теперь решение

$$x(t)=A\varphi(t)+B\psi(t), \tag{12}$$

где A, B — постоянные. Можно ли их подобрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение (8)?

Подставляя (12) в (8), получаем:

$$A\varphi(t+\tau)+B\psi(t+\tau)=s[A\varphi(t)+B\psi(t)],$$

откуда, принимая во внимание (9),

$$[A(a-s)+Bc]\varphi+[Ab+B(d-s)]\psi=0.$$

Это равенство должно выполняться тождественно (при любом t). Так как $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ линейно независимы, отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned}A(a-s)+Bc&=0,\\ Ab+B(d-s)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Это — система линейных и однородных относительно A и B уравнений. Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix}a-s & c\\ b & d-s\end{vmatrix}=s^2-(a+d)s+\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}=0. \tag{14}$$

Пусть s_1 и s_2 — корни уравнения (14). Подставляя их значения в (13), мы находим из этих уравнений соответствующие значения отношения A/B:

$$\frac{A}{B}=-\frac{c}{a-s_1},\quad \frac{A}{B}=-\frac{c}{a-s_2}.$$

При таких значениях отношения A/B решение (12) удовлетворяет условию (8), т. е. воспроизводит себя через период с точностью до множителя s_1 или s_2. Если s_1 и s_2 не равны между собой, существует два линейно независимые решения, обладающие свойством (8). Обозначим их через $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x_1(t+\tau)=s_1x_1(t),$$
$$x_2(t+\tau)=s_2x_2(t).$$

Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ также образуют фундаментальную систему.

Введем посредством соотношений

$$s_1=e^{\lambda_1\tau},\quad s_2=e^{\lambda_2\tau}$$

новые постоянные λ_1 и λ_2. Они называются характеристическими показателями. Так как s_1 и s_2, вообще говоря, комплексны, то x_1, x_2, а также λ_1 и λ_2, вообще говоря, тоже комплексны.

Разложим s, λ и x на действительные и мнимые части:

$$s=a+ib;$$
$$\lambda=\alpha+i\beta;$$
$$x=\xi+i\eta.$$

Имеем:

$$s=e^{\alpha\tau}e^{i\beta\tau},\quad x(t+\tau)=e^{\alpha\tau}e^{i\beta\tau}x(t).$$

Умножение на $e^{\alpha\tau}$ означает увеличение модуля x в $e^{\alpha\tau}$ раз; умножение на $e^{i\beta\tau}$ означает поворот вектора на комплексной плоскости на угол $\beta\tau$ (рис. 67). Вектор $x(t)$ за время τ поворачивается на некоторый угол, и если $\alpha>0$ — *удлиняется*, а если $\alpha<0$ — *укорачивается*. Если $\alpha=0$, вектор за время τ поворачивается, но длина его принимает исходное значение.

Но $\alpha=\ln|s|/\tau$, а следовательно:

$$\text{при } \alpha>0 \quad |s|>1,$$
$$\text{при } \alpha<0 \quad |s|<1,$$
$$\text{при } \alpha=0 \quad |s|=1.$$

На плоскости a, b (рис. 68, a) области внутри окружности $|s|=1$ соответствуют убывающие со временем решения, области вне этой окружности — возрастающие со временем решения, самой окружности — периодические решения. Соответствующие области на плоскости α, β (рис. 68, *б*): полуплоскость левее оси $\alpha=0$, полуплоскость правее этой оси, сама ось $\alpha=0$.

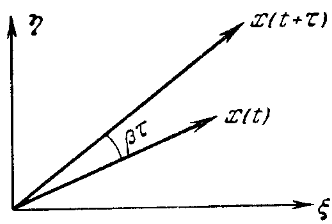

Рис. 67.

Вспомним теперь, что s является корнем квадратного уравнения (14). Обозначим в нем:

$$p=a+d,\quad q=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Решения φ и ψ действительны, так как коэффициенты уравнения (4), а также начальные значения (5) действительны. Поэтому a, b, c, d, а следовательно, и p, q — действительные постоянные. Необходимое и достаточное условие того, чтобы оба корня s_1 и s_2 уравнения (14)

$$s^2-ps+q=0$$

были по модулю меньше единицы ($|s_1|<1$, $|s_2|<1$), таково:

$$q<1,\ 1+p+q>0,\ 1-p+q>0.$$

Корни s_1 и s_2 действительны, если

$$p^2-4q\geqslant 0,$$

и комплексны, если

$$p^2-4q<0.$$

Таким образом, на плоскости p, q (рис. 69) случаю $|s_1|<1$, $|s_2|<1$ соответствует область внутри треугольника (—2,1), (2,1), (—1,0), заключенного между прямыми $q=1$, $1+p+q=0$, $1-p+q=0$.

В этом случае все решения уравнения (4) затухают к состоянию равновесия $x=0$, $\dot{x}=0$. В случае, когда хотя бы один из модулей $|s_1|$ или $|s_2|$ больше единицы, существует нарастающее решение — состояние равновесия неустойчиво. Значениям p и q, лежащим внутри параболы

$$4q=p^2$$

(заштрихованная область), соответствуют комплексные корни, значениям p и q вне заштрихованной области — два действительных корня. Точкам параболы соответствует кратный корень.

Если выполнено условие (8), т. е. если

$$x(t+\tau)=sx(t)=e^{\lambda\tau}x(t),$$

то функция

$$\Phi(t) = x(t)\, e^{-\lambda\tau}$$

есть периодическая функция с периодом τ. Это легко показать:

$$\Phi(t+\tau) = e^{-\lambda(t+\tau)} x(t+\tau) = e^{-\lambda\tau} e^{-\lambda\tau} x(t+\tau) = e^{-\lambda\tau} x(t) = \Phi(t).$$

Следовательно, решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют вид:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1\tau}\Phi_1(t), \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}\Phi_2(t),$$

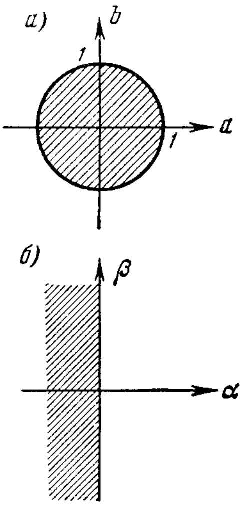

Рис. 68.

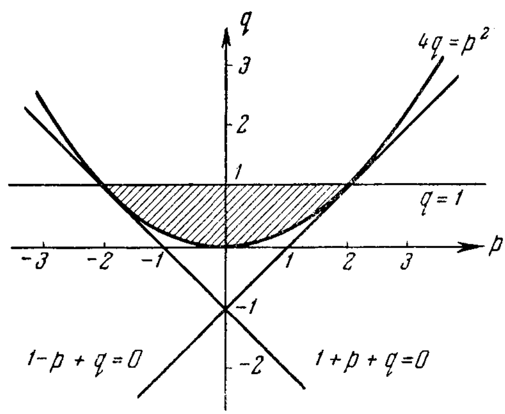

Рис. 69.

где $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции с периодом τ. Если $s_1 \neq s_2$, то общее решение уравнения (4) будет

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t}\Phi_1(t) + C_2 e^{\lambda_2 t}\Phi_2(t). \tag{16}$$

Можно показать, что в случае кратного корня ($s_1 = s_2$) уравнение (4) имеет частное решение вида

$$te^{\lambda t}\Phi(t),$$

и, следовательно, общее решение в этом случае имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda t}\Phi(t) + C_2 t e^{\lambda t}\Phi(t). \tag{17}$$