ДЕВЯТНАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(8/I 1931 г.)

Примеры систем с периодически меняющимся параметром. Параметрический резонанс; его отличие от „обычного" резонанса. Физическое объяснение простейшего случая параметрического резонанса. Частотная модуляция. Ошибочное мнение о возможности сузить интервал частот, нужный для радиопередачи, посредством перехода к частотной модуляции. Асимптотическое решение для медленного изменения частоты и его разложение на синусоидальные составляющие. Как правильно записать „синусоидальное колебание с переменной частотой". Когда имеет смысл говорить о „синусоидальном колебании с переменной частотой".

Мы будем говорить о вещах, которые приобретают все большее значение. Можно сказать, пожалуй, что их „просмотрели". Отчасти на них навела практика.

Что будет с колеблющейся системой, если ее параметры изменяются со временем и притом периодически? Представим себе, например, маятник с периодически меняющейся длиной или колебательный контур с периодически меняющейся емкостью. Другие параметры (индуктивность, коэффициент трения) также могут меняться периодически. В случае одной степени свободы уравнение имеет вид

$$\ddot{x}+p_1(t)\,\dot{x}+p_2(t)\,x=0, \tag{1}$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ — периодические функции. Вопрос о том, как ведет себя интересующая нас система, сводится к исследованию, к интегрированию уравнения (1). Математическую теорию такого уравнения изложил в прошлой лекции А. А. Андронов. Теперь мы будем говорить главным образом о физике и лишь бегло повторим математику.

Пусть у нас имеется конденсатор, емкость которого периодически меняется. Для простоты мы предположим, что периодическое изменение происходит по закону синуса или косинуса. Уравнение

$$L\ddot{q}+\frac{q}{C}=0 \tag{2}$$

справедливо и при переменной емкости $C(t)$.

Будем менять периодически расстояние между пластинами плоского конденсатора. Тогда

$$\frac{1}{C(t)}=\frac{4\pi d(t)}{S\varepsilon}\,. \tag{3}$$

Пусть расстояние d меняется синусоидально:

$$d = d_0 + \delta \cos pt, \tag{4}$$

где p — частота изменения. Если подставить (3) и (4) в (2), то получится уравнение

$$\ddot{q} + \left(\frac{1}{LC_0} + \frac{4\pi}{LS\varepsilon}\delta \cos pt\right) q = 0, \tag{5}$$

где

$$C_0 = \frac{S\varepsilon}{4\pi d_0}.$$

Возьмем простой механический случай — прототип более сложных вещей. Масса M подвешена к упругому стержню (рис. 70). Она может колебаться в вертикальном направлении. Здесь уравнение движения будет

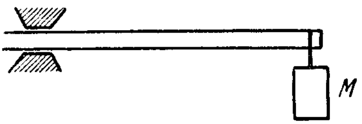

Рис. 70.

$$M\ddot{x} + kx = 0, \tag{6}$$

где k зависит от длины и материала стержня и от его сечения.

Если стержень (пусть это будет вал какой-нибудь машины) имеет эллиптическое сечение, то

$$k = k_0(1 + \delta \cos 2\theta), \tag{7}$$

где θ — угол поворота вала; δ — постоянная. При подстановке (7) уравнение (6) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos 2\theta)\, x = 0. \tag{8}$$

Пусть вал вращается с постоянной угловой скоростью $p/2$. Тогда

$$\theta = \frac{pt}{2},$$

и (8) принимает вид

$$\ddot{x} + \frac{k_0}{M}(1 + \delta \cos pt)\, x = 0. \tag{9}$$

Получается такое же уравнение, что и для только что рассмотренного контура с конденсатором переменной емкости.

В уравнениях (5) и (9) величины

$$\omega_0^2=1/LC_0,\quad \omega_0^2=\frac{k_0}{M}$$

играют роль квадрата частоты.

Обозначив

$$\alpha_0^2=\frac{4\pi\delta}{LS\varepsilon}\ \text{ и }\ \alpha_0^2=\frac{k_0\delta}{M},$$

мы можем привести уравнения (5) и (9) к виду

$$\ddot{x}+(\omega_0^2+\alpha_0^2\cos pt)\,x=0. \tag{10}$$

Это — частный случай уравнения (1); здесь, во-первых, $p_1(t)=0$ и, во-вторых, функция $p_2(t)$ синусоидальна.

Уравнение

$$\ddot{x}+p(t)\,x=0,$$

где $p(t)$ — периодическая функция, называется уравнением Хилла. Наше уравнение (10) есть частный случай уравнения Хилла. Оно называется уравнением Матьё.

Мы знаем, что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}\Phi_1(t)+C_2e^{\lambda_2 t}\Phi_2(t),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; λ_1 и λ_2 — постоянные, определяемые самим уравнением; $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ — периодические функции периода $\tau=2\pi/p$.

Особенно важно знать, каковы λ_1 и λ_2. Вообще говоря, они комплексны:

$$\lambda_1=a_1+ib_1,\quad \lambda_2=a_2+ib_2.$$

В зависимости от того, каковы значения параметров, входящих в уравнение, действительные части a_1 и a_2 могут быть отрицательными, равными нулю или положительными. Вообще говоря, λ_1 и λ_2 различны. В том специальном случае, когда они равны, имеется частное решение вида

$$te^{\lambda t}\Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — периодическая функция периода $\tau=2\pi/p$.

То, что C_1 и C_2 входят в решение линейно, типично для линейных уравнений. Если $x=0$ и $\dot{x}=0$ при $t=0$, то $C_1=0$ и $C_2=0$. В этом случае x остается равным нулю при любом t. Таким образом, здесь совершенно другое положение, чем при обычном резонансе: если система в начале была в равновесии, то она остается в равновесии и в дальнейшем.

Но что будет с системой, если в начальный момент она не находится в равновесии? Все зависит от того, каковы a_1 и a_2.

Если обе эти величины отрицательны, то со временем амплитуда величины x убывает. При таком подборе значений параметров система совершает затухающее колебание.

Если $\lambda_{1,2}$ — чисто мнимые, то решения периодические или почти периодические.

Если величина a_1 положительна, то (за исключением случая, когда $C_1=0$ и $a_2<0$) амплитуда величины x все больше и больше возрастает.

Итак, положение равновесия всегда имеется, но равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым. В последнем случае система, будучи выведена из состояния равновесия, автоматически себя раскачивает. Это свойство — рост колебаний — придает всему явлению характер резонанса. Мы говорим при этом о *параметрическом* возбуждении или о *параметрическом резонансе*.

При каких условиях наступает раскачивание, не так просто поддается вычислению. Физически дело сводится, грубо говоря, к следующему: возрастание колебаний происходит тогда, когда подобран правильный темп изменения параметра.

Возьмите конденсаторную цепь. Будем менять емкость скачками. Пусть в некоторый начальный момент имеется маленький заряд $q=q_0$, а тока нет ($\dot{q}=0$). Раздвинем в этот момент пластины конденсатора. Мы затрачиваем на это некоторую работу. Через $^1/_4$ периода заряд обращается в нуль, и в этот момент мы сведем пластины до прежнего расстояния. При этом никакой работы не совершается. Через $^1/_2$ периода после начала опять имеется заряд, и мы снова разводим пластины, совершая работу; через $^3/_4$ периода мы опять их сводим, и т. д. Затрачиваемая нами работа должна увеличить запас электромагнитной энергии в контуре. Отсюда видно, что если раздвигать и сдвигать пластины с периодом, вдвое меньшим, чем средний собственный период контура, то непременно наступает раскачивание. Это — частный случай, его трудно вполне точно осуществить на практике. Но здесь ясно, как и почему происходит раскачивание. Что будет в остальных случаях, „на пальцах“ показать довольно трудно.

На этот вопрос дает ответ график (рис. 71), построенный для уравнения (10). В заштрихованной части плоскости есть нарастание колебаний, в незаштрихованной части нарастания нет.

Пусть относительная амплитуда изменения параметров постоянна:

$$\frac{\alpha_0}{\omega_0} = \mathrm{const}.$$

Будем менять только частоту изменения параметра p. Первая область нарастания колебаний соответствует частоте изменения

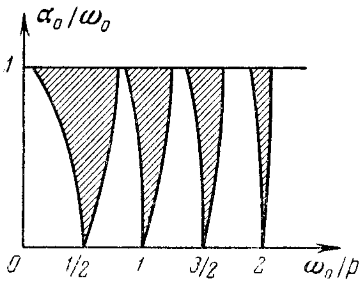

Рис. 71.

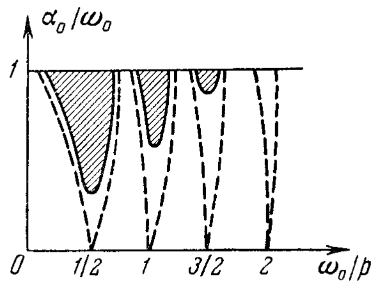

Рис. 72.

параметров, приблизительно вдвое большей, чем частота собственных колебаний. Во второй области частота собственных колебаний и частота изменения параметров приблизительно равны. В третьей области частота p приблизительно в полтора раза меньше собственной и т. п. Таких *областей нестабильности* оказывается бесконечно много.

С увеличением относительной амплитуды изменения параметра ширина каждой области частот p, в которой происходит нарастание, увеличивается.

Итак, мы видим, что явление параметрического резонанса существенно отличается от обычного резонанса. Отличие состоит в том, что:

1. Если система находится строго в положении равновесия, то при периодическом изменении параметра она не раскачивается.

2. Несмотря на то, что воздействие косинусообразно, существует бесконечно много областей параметрического резонанса, и притом именно *областей*, а не точек.

Наличие затухания смазывает явление. Оно вызывает появление порога возбуждения (рис. 72). Области нестабильности, соответствующие все меньшим отношениям p/ω_0, начинаются все выше и выше. Поэтому очень трудно получить на практике далекие области возбуждения.

Из линейности уравнения следует, что и при наличии трения (если оно линейно) в областях нестабильности имеет место бесконечное нарастание.

Как и всегда, при наличии нестабильности линейное уравнение недостаточно для описания всего хода явления. Оно не дает установления колебания. Установление стационарной амплитуды возможно только вследствие нелинейности.

Иллюстрацией явления параметрического резонанса является известный опыт Мельде (рис. 73). Когда камертон колеблется, натяжение струны — параметра, от которого зависит частота ее поперечных колебаний, — периодически меняется. Когда собственная частота поперечных колебаний струны приблизительно вдвое меньше частоты камертона, происходит возбуждение этих колебаний.

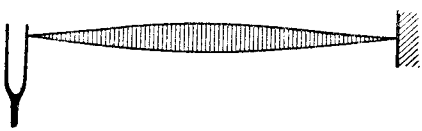

Рис. 73.

В технике на возможность возбуждения колебаний путем изменения параметров обратили внимание, повидимому, при постройке электровозов. В электровозе упругость передающей системы, соединяющей вал мотора с ведущей осью, периодически меняется. Получаются собственные колебания системы с переменной упругостью. Многие неудачи произошли от того, что этого раньше не замечали.

В последнее время явлениями в системах с периодически меняющимися параметрами стали заниматься в связи с тем, что они позволяют трансформировать частоты „вниз“ (трансформировать частоты „вверх“ сравнительно легко; трансформировать вниз гораздо труднее). С помощью явлений, о которых мы сейчас говорим, эта задача может быть решена.

В электрических контурах имеется значительное затухание, но теперь мы имеем средство уменьшать затухание. Это достигается с помощью обратной связи. Уменьшая затухание, можно сделать явления параметрического возбуждения гораздо более ярко выраженными.

Посылая ток в катушку с железным сердечником, мы изменяем коэффициент самоиндукции. Пользуясь этим, можно сравнительно просто осуществить контур с периодически меняющейся индуктивностью.

Как происходит раскачивание качелей? На них раскачиваются, периодически поднимая и опуская свое тело. Это — параметрический резонанс. Раскачивание возможно только, если есть хотя бы маленький начальный толчок. Здесь происходит то же явление, как в контуре с конденсатором переменной емкости, но в более сложном виде.

Есть другой круг вопросов, где мы также приходим к уравнениям с периодическими коэффициентами, но где нас интересуют не области нестабильности. Это — вопросы модуляции. Модуляция в радиотелефонии обычно состоит в том, что амплитуда колебания меняется в темпе звукового колебания в передаваемом разговоре.

Модулированное колебание, воспринимаемое приемником, имеет в простейшем случае вид

$$E = A_0(1 + k\cos pt)\cos\omega t,$$

или, *что то же самое*,

$$E = A_0\cos\omega t + \frac{kA_0}{2}\cos(\omega - p)t + \frac{kA_0}{2}\cos(\omega + p)t.$$

Представление модулированного колебания в виде суммы трех синусоидальных колебаний целесообразно тогда, когда мы имеем три резонатора, которые отзываются на частоты ω, $\omega - p$ и $\omega + p$.

В колебании модулированного передатчика, наряду с линией частоты ω, имеются, таким образом, боковые полосы или боковые спектры. Если мы хотим сохранить особенности передачи, то мы должны принять не только частоту ω, но и боковые полосы. Они занимают довольно большое место в спектре.

Явилось желание передавать речь, не занимая такую широкую полосу частот. Рассуждали приблизительно следующим образом: если приемник, обладающий острым резонансом, слегка расстроить и если с помощью голоса менять *частоту* передатчика в темпе звукового колебания, то придется лишь немного менять частоту передатчика, чтобы ток в приемнике, изменяясь на склоне резонансной кривой, пульсировал очень сильно. Именно на таких соображениях основывалось упомянутое ранее „изобретение" Робинсона[1].

[1] [См. 1-ую лекцию.]

Но дело в том, что чем меньше затухание контура, тем медленнее устанавливается в нем колебание. Крутизна резонансной кривой имеет смысл только для *установившегося* режима. Таким образом, приведенное рассуждение в корне неправильно.

Для того, чтобы узнать, что происходит в действительности, нужно разложить колебание, создаваемое передатчиком, в ряд по синусам и косинусам. В общем случае систем с периодически меняющимся параметром это довольно сложно, но в данном случае есть одно облегчающее обстоятельство. Нас интересует случай, когда частота модуляции p гораздо меньше, чем ω. А. А. Андронов и М. А. Леонтович нашли для этого случая асимптотическое решение[1]. При $p \to 0$ общее решение уравнения (10) стремится к такому:

$$x = C\left(\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt\right)^{-1/4} \cos\left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt}\, dt + b\right), \tag{11}$$

где C и b — произвольные постоянные.

То, что при периодическом изменении емкости меняется и амплитуда, имеет принципиальное значение[2]. Однако практически малые изменения амплитуды не играют роли, и мы можем написать с известным приближением, при достаточно малом α_0:

$$x = C' \cos\left(\int_0^t \sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt}\, dt + b\right). \tag{12}$$

Можно ли сказать, что (10) представляет собой косинусообразное колебание с переменными амплитудой и частотой? Не вводя нового представления, говорить о косинусообразном колебании с переменной амплитудой и переменной частотой бессмысленно. Косинусообразное колебание определено, как колебание вида

$$A \cos(\omega t + \varphi), \tag{13}$$

с *постоянными* A, ω и φ. Но при достаточно медленном изменении величины A со временем может случиться, что если мы найдем решение какой-нибудь задачи для постоянного A и подставим в это готовое решение, вместо постоянного A, *переменное* A,

[1] [Журнал Русского физико-химического общества, 1927, 59, 429.]
[2] [См. 11-ую и 12-ую лекции.]

то мы получим с достаточным приближением решение той же задачи для переменного A. В этом случае можно говорить об $A(t)\cos(\omega t+\varphi)$, как о косинусообразном колебании с переменной амплитудой. Аналогично можно определить колебание с переменной частотой.

Но как записать косинусообразное колебание с переменной частотой? Вернемся к нашей формуле (11). Мы склонны сказать, что медленно меняющейся частотой является величина

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\alpha_0^2\cos pt}. \tag{14}$$

Это требует разъяснения. Если мы подставим (14) в формулу (13), подобно тому, как вместо постоянного A в нее можно подставить $A(t)$, мы получим:

$$x=A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2+\alpha_0^2\cos pt}\cdot t+\varphi\right).$$

Получится совсем не то, что мы хотели сказать, говоря об ω, как о переменной частоте. Записывать таким способом колебание с переменной частотой неверно.

Что такое период? Если функция имеет период τ, это значит, что она имеет одно и то же значение при $t=t_1$ и при $t=t_1+\tau$.

Если „период τ медленно меняется“ и частота

$$\frac{2\pi}{\tau}=\omega=\omega_0+\varphi(t)=f(t), \tag{15}$$

то косинус с периодом τ следует записать так:

$$\cos F(t), \tag{16}$$

где

$$F'(t)=f(t),\quad F(t)=\int\limits_0^t f(t)\,dt.$$

Это можно пояснить такой аналогией. При равномерном движении

$$x=vt. \tag{17}$$

Переходя к медленно меняющейся скорости

$$v=v_0+\alpha t, \tag{18}$$

нужно написать

$$\frac{dx}{dt}=v_0+\alpha t,$$

и интегрировать, а не подставлять (18) в готовую формулу (17).

Покажем, что при записи (16) мы получаем именно то, что хотели. При t, близком к t_1, мы имеем приближенно:

$$\cos F(t) = \cos [F(t_1) + F'(t_1)(t - t_1)],$$

или

$$\cos F(t) = \cos [F'(t_1)\,t + \text{const}] = \cos [f(t_1)\,t + \text{const}],$$

т. е. при t, близком к t_1, значение функции действительно повторяется через промежутки времени τ, определяемые формулой (15). Значит, если мы хотим, чтобы период равнялся $2\pi/f(t)$, то мы должны записать колебание в виде

$$A \cos \left(\int_0^t f(t)\,dt + \text{const} \right).$$

Нахождение асимптотического выражения дало для частоты значение (14).

Для того, чтобы ответить на вопрос о том, дает ли частотная модуляция выигрыш в ширине полосы, нужно разложить (12) в ряд Фурье. При этом оказывается, что никакого выигрыша нет.

Пусть

$$\alpha_0^2 \ll \omega_0^2.$$

Тогда приближенно

$$\sqrt{\omega_0^2 + \alpha_0^2 \cos pt} = \omega_0 \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0^2} \cos pt \right),$$

и формула (12) принимает вид

$$x = C' \cos \left(\omega_0 t + \frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right) \tag{19}$$

(если выбрать начало отсчета времени так, что $b = 0$).

Мы можем представить (19) в таком виде:

$$x = C' \cos \omega_0 t \cos \left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right) - C' \sin \omega_0 t \sin \left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \sin pt \right).$$

Если

$$\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p} \ll 1,$$

то приближенно имеем:

$$\cos\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right)=1,\quad \sin\left(\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt\right)=\frac{\alpha_0^2}{2\omega_0 p}\sin pt,$$

$$x=C'\left(\cos\omega_0 t+\frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p}\cos(\omega_0+p)t-\frac{\alpha_0^2}{4\omega_0 p}\cos(\omega_0-p)t\right). \tag{20}$$

Мы получаем и здесь несущую частоту ω_0 и боковые полосы $\omega_0 \pm p$. Никакого сужения полосы при частотной модуляции не получается, но здесь есть много интересных особенностей по сравнению с амплитудной модуляцией[1].

Вернемся к вопросу о „синусоидальном колебании с переменной амплитудой и частотой".

Сложение двух синусоидальных колебаний дает:

$$\cos\omega t+\cos\omega_1 t=2\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}t\cos\frac{\omega-\omega_1}{2}t. \tag{21}$$

Если разность частот ω и ω_1 достаточно мала, то можно сказать: здесь получается одно колебание с периодически меняющейся амплитудой. Аналогичным образом, согласно формуле (20), можно сказать: сложение трех колебаний различной частоты может дать одно колебание с периодически изменяющейся частотой. Это тригонометрия, это математически правильно. Но при каких условиях имеет смысл говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой? Часто говорят: это имеет смысл тогда, когда $\omega-\omega_1$ или p мало по отношению к ω. Но это неверно, не в этом соль. Нужно знать, *для чего* требуется говорить об одном колебании с переменной амплитудой или частотой, что вы хотите делать с этим колебанием.

Предположим, что нам нужно решить задачу о приеме колебания с помощью резонатора. Для того, чтобы можно было при этом обращаться с (12) или (21), как с обычным синусоидальным колебанием, а потом подставить в результат переменную амплитуду или частоту, нужно, чтобы данный приемник примерно одинаково воспроизводил все синусоидальные слагаемые. Так ли обстоит дело или нет, — это зависит от логарифмического декремента приемника. Как бы ни было мало $|\omega-\omega_1|$ или p по отношению к ω_0, если логарифмический декремент приемника доста-

[1] [Ср. том III, стр. 410.]

точно мал, то он пропустит отдельные синусоидальные слагаемые по-разному. Он их пропустит приблизительно одинаково — и тогда целесообразно говорить о косинусе с переменной амплитудой или частотой, — когда

$$\frac{|\omega-\omega_1|}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi}.$$

Критерием того, когда имеет смысл говорить о функции, как о косинусе с переменной амплитудой, а когда нет, лежит *вне* самой функции, из самой функции это вычитать нельзя.

При переменной частоте картина боковых полос несколько сложнее, чем при переменной амплитуде, кроме того простого частного случая, для которого можно пользоваться приближенной формулой (20).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/I 1931 г.)

Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллятор без разложения в спектр.

Мы рассматривали действие периодической силы на линейную колебательную систему с одной степенью свободы[1]. Повторяющиеся импульсы (рис. 62) физически полностью подходят под случай периодической силы. Нового математического аппарата здесь не нужно. Но *сигналом* может быть только не повторяющееся периодически воздействие. Периодическое воздействие — это не сигнал.

В конечном интервале можно разложить в ряд Фурье функцию, изображающую любое воздействие. Но вне этого интервала функция, представленная рядом, периодически повторяется. Если мы возьмем на оси t очень большой интервал и разложим функцию, изображающую воздействие в ряд Фурье в этом интервале, то

[1] [См. 16-ую лекцию.]