точно мал, то он пропустит отдельные синусоидальные слагаемые по-разному. Он их пропустит приблизительно одинаково — и тогда целесообразно говорить о косинусе с переменной амплитудой или частотой, — когда

$$\frac{|\omega - \omega_1|}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\omega} \ll \frac{d}{2\pi}.$$

Критерием того, когда имеет смысл говорить о функции, как о косинусе с переменной амплитудой, а когда нет, лежит *вне* самой функции, из самой функции это вычитать нельзя.

При переменной частоте картина боковых полос несколько сложнее, чем при переменной амплитуде, кроме того простого частного случая, для которого можно пользоваться приближенной формулой (20).

ДВАДЦАТАЯ ЛЕКЦИЯ

(15/I 1931 г.)

Интеграл Фурье. Разложение в интеграл Фурье отрезка синусоиды. Несовместимость монохроматичности и концентрированности сигнала. Аналогия с соотношением неопределенностей в волновой механике. Рассмотрение действия произвольной внешней силы на гармонический осциллятор без разложения в спектр.

Мы рассматривали действие периодической силы на линейную колебательную систему с одной степенью свободы[1]. Повторяющиеся импульсы (рис. 62) физически полностью подходят под случай периодической силы. Нового математического аппарата здесь не нужно. Но *сигналом* может быть только не повторяющееся периодически воздействие. Периодическое воздействие — это не сигнал.

В конечном интервале можно разложить в ряд Фурье функцию, изображающую любое воздействие. Но вне этого интервала функция, представленная рядом, периодически повторяется. Если мы возьмем на оси t очень большой интервал и разложим функцию, изображающую воздействие в ряд Фурье в этом интервале, то

[1] [См. 16-ую лекцию.]

функция, представляемая рядом, будет повторяться бесконечное число раз, но через очень большие интервалы. Если интервал разложения достаточно велик, то физически совершенно безразлично, что было раньше начала этого интервала и что будет после его конца. Поэтому мы можем искусственно заменить интересующий нас сигнал периодически повторяющейся силой, представленной рядом Фурье.

Что значит здесь „достаточно большой интервал времени"? Нужно, чтобы к началу реального сигнала успело давно затухнуть то, что дал бы предыдущий искусственный сигнал. Поэтому, чем меньше затухание воспринимающего устройства, тем больше должен быть интервал.

Уравнение движения осциллятора под действием произвольной внешней силы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \qquad (1)$$

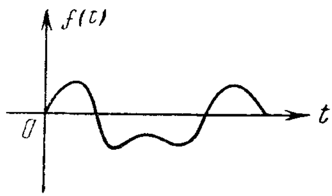

Рис. 74.

Пусть сила $f(t)$ отлична от нуля лишь на протяжении конечного промежутка времени, начиная с $t=0$ (рис. 74). Здесь начальные условия: $x=0$, $\dot{x}=0$ при $t=0$. Разложим силу в ряд Фурье за достаточно большой (по сравнению с $1/\delta$) промежуток времени и возьмем периодическое решение уравнения (1), являющееся суммой периодических вынужденных колебаний, соответствующих всем членам разложения Фурье. Решение удовлетворяет вполне определенным начальным условиям, так как не содержит произвольных постоянных. Можно показать, что это как раз начальные условия $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=0$. Таким путем мы получаем то, что нам нужно. Физически ясно, почему это так. В течение всего бесконечного времени никакие силы, кроме $f(t)$, на осциллятор не действуют. Разложение в ряд Фурье приводит к замене $f(t)$ периодической функцией. Так как промежутки, на протяжении которых эта периодическая функция равна нулю, велики по сравнению со временем затухания осциллятора, периодическое решение спадает до нуля к концу этих промежутков, в частности к моменту $t=0$.

Итак, решение в виде ряда Фурье является решением задачи с определенными начальными условиями. К нему можно прибавить собственные колебания и удовлетворить таким образом любым начальным условиям.

Можно решить задачу иначе: не представляя силы в виде ряда Фурье и учитывая явно начальные условия[1]. Часто это целесообразнее. Оба способа дают принципиально одно и то же.

Остановлюсь на вопросе, имеющем принципиальное значение, хотя практически он может быть обойден. Можно ли для любой непериодической функции найти разложение, аналогичное ряду Фурье для периодической функции (т. е. разложение на синусы и косинусы), представляющее функцию на всем бесконечном интервале?

Мы рассмотрим вопрос эвристически. Математическое доказательство мы оставим в стороне.

Мы писали ряд Фурье в таком виде:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t), \tag{2}$$

$$a_k=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega}f(\xi)\cos k\omega\xi d\xi, \qquad b_k=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega}f(\xi)\sin k\omega\xi d\xi, \tag{3}$$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$, где T — период функции $f(t)$. Можно переписать ряд Фурье немного иначе, обозначив

$$a'_k=\frac{a_k}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad b'_k=\frac{b_k}{\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{4}$$

Мы получаем тогда:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(\omega a'_k\cos k\omega t+\omega b'_k\sin k\omega t).$$

Посмотрим теперь, что получится, если переходить к пределу

$$\omega\to 0, \quad T\to\infty.$$

Напишем:

$$k\omega=u_k, \quad \omega=\Delta u \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{5}$$

(Δu есть разность двух последовательных значений u_k). Тогда

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\Delta u\,(a'_k\cos u_k t+b'_k\sin u_k t). \tag{6}$$

---

[1] [См. ниже формулу (15).]

При $\omega \to 0$ интервалы Δu сужаются. Если $\omega \to 0$, то мы можем ожидать, что сумма в (6) превратится в интеграл.

Для разложимости в ряд Фурье функция $f(t)$ должна быть всюду ограничена и изображающая ее кривая должна разбиваться на конечное число непрерывных кусков. Теперь, при $\omega \to 0$, мы должны еще сказать, как ведет себя функция $f(t)$ в бесконечности. Потребуем, чтобы

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} |f(\xi)|\, d\xi$$

был конечной величиной, т. е. чтобы функция $f(t)$ была абсолютно интегрируемой. В этом случае при $\omega \to 0$ имеем:

$$a_0 \to 0.$$

Коэффициенты a'_k и $b'_k (k \neq 0)$ мы можем представить, подставляя (3) и (5) в (4), в виде функции от u:

$$a'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \cos u\xi d\xi, \quad b'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\xi) \sin u\xi d\xi.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{T \to \infty} a'(u) = g_1(u), \quad \lim_{T \to \infty} b'(u) = g_2(u),$$

причем

$$g_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos u\xi d\xi, \quad g_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin u\xi d\xi. \tag{7}$$

Таким образом, у нас есть основания ожидать, что функция $f(t)$ может быть записана в виде интеграла

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \{g_1(u) \cos ut + g_2(u) \sin ut\}\, du. \tag{8}$$

Это — интеграл Фурье. Мы *не* доказали, что всякая функция, удовлетворяющая определенным условиям, может быть разложена в интеграл Фурье, но можно доказать, что всякая функция $f(t)$, определенная в бесконечном промежутке, удовлетворяющая в каждом конечном участке условиям Дирихле и такая, что интеграл от ее абсолютного значения существует, может быть разложена в интеграл Фурье.

Обычно выполняют подстановку (7) в (8). При этом получается формула

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos u(t-\xi)\,d\xi \tag{9}$$

— другое написание знаменитой теоремы Фурье или, как ее часто называют, формулы Фурье.

Если функция $f(t)$ разрывна, то интеграл Фурье имеет в точках разрыва значение

$$\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)].$$

Как уже было сказано, в обычных колебательных вопросах можно обойтись без интеграла Фурье, так как в них продолжение интервала разложения в бесконечность не играет фундаментальной роли. Но в волновой механике продолжение интервала разложения в бесконечность и применение интеграла Фурье играет весьма существенную роль. Для ряда принципиальных вопросов интеграл Фурье представляет фундаментальный интерес.

Укажем теперь некоторые свойства функций, которые можно вычитать из их представления с помощью интеграла Фурье. Некоторые представления, играющие чрезвычайно важную роль в современной физике, основываются на одном, редко формулируемом, свойстве интеграла Фурье. Для того, чтобы показать, о чем идет речь, возьмем простейший пример. Заметим, что для двух классов функций — для функций четных и для функций нечетных — общая формула (8) значительно упрощается.

Пусть

$$f(t)=f(-t)$$

четная функция). Тогда

$$g_1(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(\xi)\cos u\xi d\xi,\quad g_2(u)=0.$$

Пусть

$$f(t)=-f(-t)$$

(нечетная функция). Здесь

$$g_1(u)=0, \quad g_2(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin u\xi d\xi.$$

Представим теперь в виде интеграла Фурье функцию, заданную уравнениями (рис. 75):

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t<-T/2, \\ \sin\omega t & \text{при } -T/2\leqslant t\leqslant T/2, \\ 0 & \text{при } t>T/2, \end{cases} \tag{10}$$

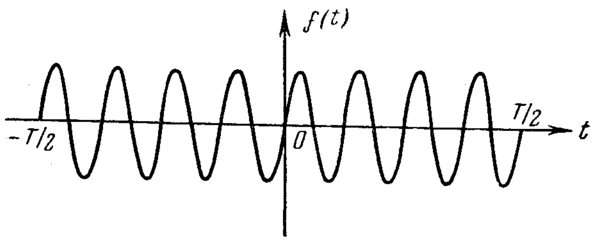

Рис. 75.

причем промежуток T содержит целое число $2N$ полных колебаний:

$$T=2N\tau=2N\frac{2\pi}{\omega} \quad (N\text{ — целое}).$$

Функция $f(t)$ — нечетная. Поэтому

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin ut\,du, \tag{11}$$

где

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin u\xi d\xi. \tag{12}$$

Отсюда, между прочим, видно, для чего мы ввели множители $\sqrt{\pi/2}$ в выражения (4). При таком выборе коэффициентов в (11) и (12) получается полная взаимность функций f и g.

Подставим (10) в (12):

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{T/2}\sin\omega\xi\sin u\xi d\xi,$$

или

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(uT/2)}{u^2-\omega^2}. \tag{13}$$

Каков физический смысл величины $g(u)$? Функция (10) есть конгломерат синусоидальных колебаний с непрерывно меняющейся от колебания к колебанию амплитудой $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,g(u)\,du$. Величина $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,g(u)$ есть плотность амплитуд в спектральной области $(u,\ u+du)$.

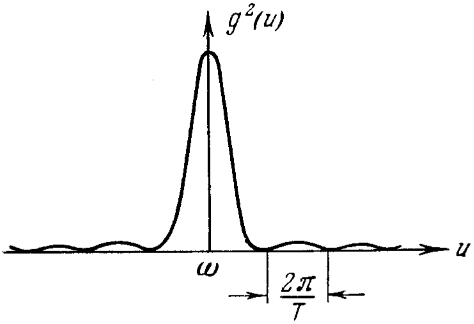

Рис. 76.

Займемся исследованием функции $g(u)$. Легко видеть, что самый большой ее максимум находится там, где $u=\omega$. Несмотря на равенство нулю знаменателя, этот максимум конечен, так как при $u=\omega$ имеем $\sin(uT/2)=0$. Раскрывая в (13) неопределенность при $u=\omega$, получаем для максимальной плотности амплитуд значение

$$g(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{N\tau}{2\omega}. \tag{14}$$

Будем откладывать по оси абсцисс u, а по оси ординат — квадрат плотности амплитуд (рис. 76). Найдем плотность амплитуд $g(u_1)$ в том максимуме, который соответствует расстройке:

$$\frac{u_1-\omega}{\omega}=\alpha.$$

Считая (приближенно), что в максимуме $\sin(uT/2)=1$,, получаем

$$g(u_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{(u_1-\omega)(u_1+\omega)},$$

или приближенно

$$g(u_1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2\omega}\cdot\frac{\tau}{2\pi\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{g(\omega)}{g(u_1)}=2\pi\alpha N.$$

Чем больше N, тем больше при заданном α это отношение.

Итак, мы задались конечным отрезком синусоиды. Мы разложили его в интеграл Фурье, и мы толкуем этот результат как разложение на всевозможные монохроматические колебания. Коль скоро отрезок синусоиды конечен, он не монохроматичен. Он состоит из бесконечного числа — континуума — монохроматических колебаний. В этом конгломерате особенно сильно представлены определенные монохроматические колебания, — те, период которых очень близок к периоду того монохроматического колебания, частью которого является наш отрезок синусоиды. Они играют тем более доминирующую роль, чем он длиннее. Иначе говоря, чем длиннее отрезок синусоиды, тем он более монохроматичен. При малом N монохроматичность пропадает: колебания, сильно различающиеся по частоте, представлены примерно одинаково сильно.

Назовем величину, характеризующую протяженность отрезка синусоиды во времени, его расплывчатостью. Тогда можно сказать, что если отрезок расплывчат, то он может быть очень монохроматичен, но концентрированность сигнала во времени (малая расплывчатость) и его монохроматичность — противоречивые свойства. Всегда монохроматичность достигается в ущерб концентрации сигнала.

Мы рассмотрели частный пример отрезка синусоиды. Возьмем теперь другой частный пример:

$$f(t) = e^{-k^2t^2} \cos \omega t.$$

Если k очень мало, то амплитуда изменяется очень медленно-сигнал весьма расплывчат. И здесь можно показать, что если k мало, то колебания очень монохроматичны, а если k велико, то происходит потеря монохроматичности.

Можно и нужно ввести меру (критерий) монохроматичности и меру (критерий) расплывчатости (или, что то же самое, меру немонохроматичности и меру концентрированности), и нужно показать, как мера расплывчатости связана с мерой монохроматичности. Для общего случая это не сделано[1].

Мы знаем, мы на этом останавливались[2], почему вопросы спектрального разложения играют в физике существенную роль.

---

[1] [См. А. Г. Майер и М. А. Леонтович. Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье. ДАН, 4, 353, 1934.]

[2] [См. 16, 20-ую и 21-ую лекции.]

Так, например, монохроматический свет дает при падении на диффракционную решетку острые максимумы, резкие линии. Монохроматический свет другой длины волны дает резкие линии в другом месте. Для того, чтобы узнать, что будет после падения на диффракционную решетку данного импульса, данного светового сигнала, мы должны разложить его в ряд или в интеграл Фурье. Диффракционная решетка, так же как резонатор, выделяет монохроматические волны. Решетка — это тоже реактив на монохроматичность. Поэтому и здесь важно знать, что концентрированный сигнал не может быть монохроматическим.

В волновой механике ставятся аналогичные вопросы. Идеи, связанные с появлением волновой механики, мы здесь оставим в стороне. Однако я не могу не упомянуть о том, какую роль играет в волновой механике теорема о несовместимости монохроматичности и концентрированности.

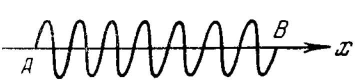

Рис. 77.

В волновой механике утверждается, что с электроном сопряжена волна, квадрат амплитуды которой дает вероятность того, что электрон находится в данном месте. Пусть волна имеет форму рассмотренного нами отрезка синусоиды (рис. 77). Волновая механика истолкует это так: левее A вероятность нахождения электрона равна нулю, между A и B она имеет некоторое постоянное значение, правее B она снова равна нулю.

Бесконечная монохроматическая волна соответствует электрону с определенной, фиксированной скоростью. Но пусть волна немонохроматическая. Тогда можно говорить о вероятности того, что скорость находится в данных границах. Волновая механика утверждает следующее. Нужно разложить заданную волну на сумму монохроматических волн (бесконечных синусоид). Тогда вероятности того, что электрон имеет ту или другую скорость, относятся друг к другу, как квадраты амплитуд соответствующих этим скоростям монохроматических волн (для точности здесь нужно говорить об интеграле Фурье и об отношении квадратов амплитудных плотностей).

Если волна, указывающая вероятность положения электрона, сконцентрирована, т. е. если с значительной точностью задано положение электрона, то на основании предыдущего мы можем утверждать, что имеется размытое распределение для вероятности скоростей. Мы получаем большую неопределенность в скорости электронов.

Если согласиться с тем, что связь между волной, с одной стороны, координатой и скоростью электрона — с другой, такая, как указывает волновая механика, то отсюда с необходимостью следует вывод: точное значение положения и точное значение скорости исключают друг друга.

Классическая механика исходила из мысли, что можно одновременно установить с любой (принципиально) точностью и *положение* и *скорость* частицы. Она учит, как движется тело, если даны x_0 и $\dot{x}_0$, в один и тот же момент времени. Волновая механика приводит к тому принципиальному результату, что электрон не может иметь одновременно точное положение и точную скорость.

Если мы приняли то определение вероятности для скорости и координаты, которое дает волновая механика, то вопрос о том, верен ли только что сформулированный результат, — вопрос чисто математический, связанный с теорией интеграла Фурье. Этого нельзя понять с двух слов. Для того, чтобы здесь все понять, нужно математическое исследование.

Позвольте на этом кончить с интегралом Фурье.

Мы узнали, что действие произвольной силы можно свести на знакомые вещи, на монохроматические колебания. Часто поступают иначе. Часто бывает гораздо правильнее задать начальные условия и решать задачу в лоб, беря силу такой, как она дана.

Не трудно убедиться подстановкой (доказательство подстановкой является совершенно строгим), что

$$x = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_{t_0}^{t} e^{\delta \xi} f(\xi) \sin \omega (t - \xi)\, d\xi, \qquad (15)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, является решением уравнения (1) при какой угодно $f(t)$. Оно применимо, например, и в том случае, если на маятник подействовал кратковременный толчок — заведомо несинусоидальная сила. Как найдено решение (15) — это другое дело (его находят методом вариации постоянных). Но это *решение*, и оно содержит две произвольные постоянные, т. е. является *общим* решением. Начальные условия удовлетворяются подбором C_1 и C_2. Последний член вместе с его производной пропадает при $t = t_0$. Как сказано, решение (15) годно „на все случаи жизни", но в случае синусоидальной силы пользоваться им нецелесообразно.

Мы не будем дискутировать решение (15) в общем виде, а рассмотрим только тот частный случай, когда вначале ($t = t_0 = 0$) осциллатор не смещен и находится в покое. При этом $C_1 = C_2 = 0$ и

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^t e^{\delta\xi} f(\xi) \sin\omega(t-\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Пусть $f(t)$ представляет собой импульс, действующий в течение промежутка времени $(0, T)$. Пусть на протяжении всего импульса сила $f(t)$ положительна. Обработаем решение (16) так, чтобы легко было дать ответ на интересующий нас вопрос: как ведет себя осциллатор после того, как подействовал очень кратковременный импульс. Так как при $\xi > T$ имеем $f(\xi) = 0$, то можно написать, вместо (16), для $t > T$:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^T e^{\delta\xi} f(\xi) \sin\omega(t-\xi)\, d\xi. \tag{17}$$

По теореме о среднем, поскольку $f(\xi) > 0$, имеем:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} e^{\delta\theta T} \sin\omega(t-\theta T) \int_0^T f(\xi)\, d\xi \qquad (0 < \theta < 1). \tag{18}$$

Нас интересует случай, когда длительность импульса мала по сравнению с периодом τ: $T/\tau \ll 1$, т. е. $\omega T \ll 2\pi$, и, следовательно,

$$\omega\theta T \ll 2\pi. \tag{19}$$

Обозначив

$$I = \int_0^T f(\xi)\, d\xi, \tag{20}$$

мы получаем приближенно для этого случая на основании (18)—(20):

$$x = I\frac{e^{-\delta t}}{\omega} \sin\omega t. \tag{21}$$

Посмотрим теперь, что это значит физически. I есть импульс силы. Если система такова, что продолжительность действия силы $f(t)$ мала по сравнению с периодом τ, то вид функции $f(t)$

не имеет значения; важен только импульс силы. Этот результат очень важен для построения измерительных устройств. Пусть система, обладающая определенным периодом (например, маятник), получает удар. Каково максимальное отклонение?

Из (21) получаем (если $\delta \ll \omega_0$):

$$x_{\max} = \frac{I}{\omega}. \tag{22}$$

Наблюдая максимальное отклонение, можно сразу определить импульс силы. Возьмем для примера баллистический маятник (рис. 78). Пусть m — масса снаряда, M — масса маятника, причем $m \ll M$.

Снаряд застревает в маятнике. Тогда

$$I = mv,$$

где v — скорость снаряда.

На основании (20) и (22), вспомнив, что „сила“ $f(t)$ в уравнении (1) была в действительности сила, деленная на массу, мы получаем для максимального отклонения маятника значение

$$x_{\max} = \frac{mv}{M\omega}.$$

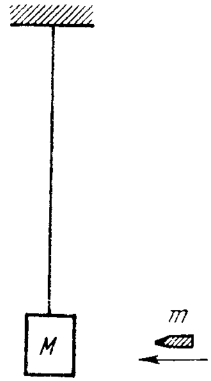

Рис. 78.

Зная m, ω, M и измерив $x_{\max}$, можно узнать v.

Аналогично обстоит дело в баллистическом гальванометре. Здесь вращающий момент пропорционален силе тока:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \alpha i$$

(φ — угол отклонения; i — сила тока). При токах малой продолжительности (продолжительность тока мала по сравнению с периодом собственных колебаний) максимальное отклонение пропорционально

$$Q = \int_0^T i\,dt,$$

т. е. количеству электричества, прошедшему через прибор.

При выводе соотношения (18) мы сделали предположение, что $f(t)$ не меняет знака. Но от этого предположения можно освободиться. Формула (18) справедлива и при знакопеременной кратковременной силе. Для того, чтобы это доказать, нужно представить знакопеременную $f(t)$ как чередование знакопостоянных сил (рис. 79).

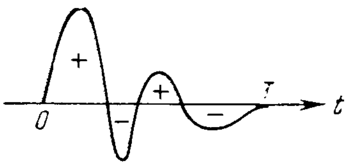

Рис. 79.

Мы рассмотрели случай кратковременной силы. Другой важный случай — тот, когда сила меняется *очень медленно.*

Что значит „очень медленное" нарастание силы? Дать точную формулировку здесь труднее, чем для кратковременной силы. Ясно одно: если бы было

$$f(t) = f_0 = \text{const},$$

то мы имели бы статическое отклонение

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

Если $f(t)$ изменяется достаточно медленно, то с достаточным приближением решение будет квазистатическим, т. е. таким

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2}. \tag{23}$$

Для того, чтобы это показать, преобразуем формулу (16) посредством интегрирования по частям:

$$x = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \int_0^t e^{\delta\xi} f(\xi) \frac{d\cos\omega(t-\xi)}{\omega} =$$

$$= \frac{f(t)}{\omega^2} - \frac{e^{-\delta t}}{\omega^2} \int_0^t [f'(\xi) + \delta f(\xi)]\, e^{\delta\xi} \cos\omega(t-\xi)\, d\xi$$

(здесь принято во внимание, что $f(0) = 0$). Пренебрегая затуханием, получаем:

$$x = \frac{f(t)}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t f'(\xi) \cos\omega_0 (t-\xi)\, d\xi.$$

Получилось статическое отклонение (23) + поправка, которая тем меньше, чем меньше $f'(t)$, т. е. чем медленнее меняется сила. Этой поправкой можно пренебречь, если сила меняется достаточно медленно по отношению к периоду собственных колебаний.

ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ

(18/I 1931 г.)

Реальность синусообразных слагаемых в интеграле Фурье. Применения гармонических резонаторов в регистрирующих приборах. „Молоточек" Н. Н. Андреева. Ток в ускоренно движущемся электрическом контуре; инерция электронов. Аналогия в вопросах колебаний.

Я хочу ответить сначала на записку. В ней поставлен разумный и интересный вопрос. Он касается физического смысла разложения в интеграл Фурье.

Когда мы разлагали

$$(1+k\cos pt)\cos\omega t \tag{1}$$

на три синусоидальные составляющие, то на вопрос об их реальности мы отвечали следующим образом. Представление (1) и представление

$$\cos\omega t+\frac{k}{2}\cos(\omega-p)\,t+\frac{k}{2}\cos(\omega+p)\,t \tag{2}$$

это (на основании тригонометрии) — одно и то же. Каждое из трех колебаний (2) можно выделить резонатором.

Когда же мы имели дело с непериодической функцией такого типа, как на рис. 74, и разлагали ее в интеграл Фурье

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \{g_1(u)\cos ut+g_2(u)\sin ut\}\,du, \tag{3}$$

то мы тоже представляли ее в виде суммы синусоидальных колебаний, каждое из которых длится от $t=-\infty$ до $t=+\infty$. В первом случае был дискретный спектр, здесь — сплошной. Реальны ли здесь эти синусоидальные составляющие?

Возьмем наш интеграл Фурье при $t<0$, когда заведомо $f(t)=0$. Разумеется, там не имеет смысла говорить о существовании синусоидальных составляющих, но никакого противоречия с (3) нет.